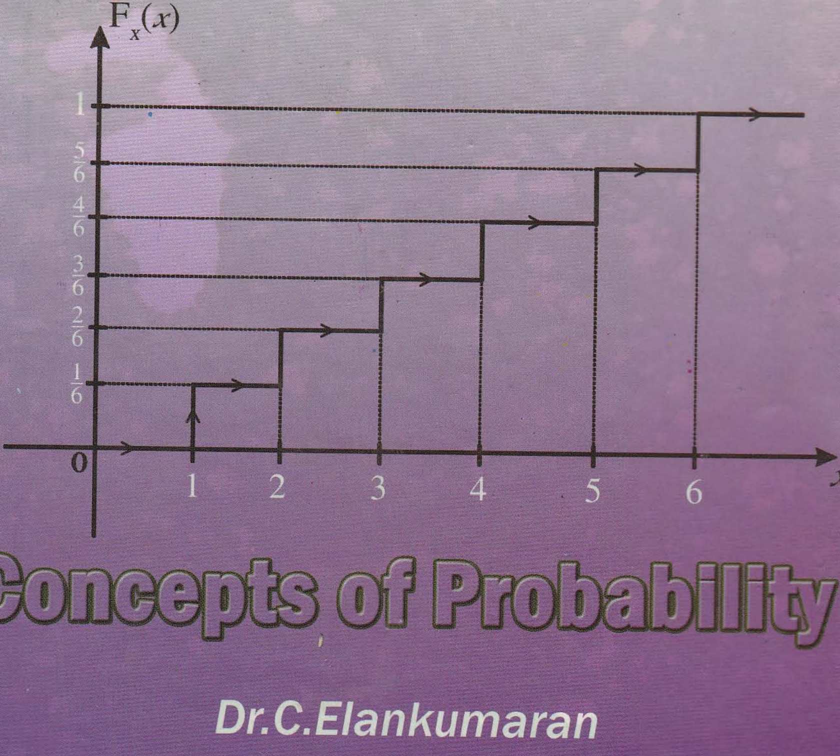
நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்



Concepts of Probability

Dr.C.Elankumaran

Pubhshed under the auspices of
SOUTH ASIAN SOCIAL SCIENCE TRUST

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்

மூன்றாம் நிலைக் கல்விக்குரிய ஒரு பாடநூல்

Concepts of Probability

A text book for tertiary education

கலாநிதி செ.இளங்குமாரன்
சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர் (புள்ளிவிபரவியல்)
பொருளியல்துறை, யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்,
யாழ்ப்பாணம், இலங்கை.

Published under the auspices of SASST

2005

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்

மூன்றாம் நிலைக் கல்விக்குரிய ஒரு பாடநூல்

ஆசிரியர் : கலாநிதி.செ.இளங்குமரன்,
பொருளியல்துறை, யாழ்.பல்கலைக்கழகம்.

பதிப்புரிமை : ஆசிரியருக்கு

முதற்பதிப்பு : கார்த்திகை 2005

வெளியீட்டுஅனுசரணை: தென்னாசிய சமூக விஞ்ஞான நிதியம்

பதிப்பு : கரிகனன் பிறின்டேர்ஸ்,
424, காங்கேசன்துறை சாலை, யாழ்ப்பாணம்.
தொ.பேசி: 021 222 2717. 4590123

பக்கங்கள் : x+230

விலை : 350/-

Concepts of Probability

A text book for tertiary education

Author : Dr.C.Elankumaran, B.Sc(Hons), M.Sc, Ph.D
Department of Economics,
University of Jaffna.

First edition : November 2005

Publisher Patronage : SASST (South Asian Social Science Trust)

Printing : Harikanan Printers,
424, K.K.S Road, Jaffna.
T.P:021 222 2717. 4590123

Pages : x+230

Price : 350/-

ISBN : 955-99419-0-9

යාපනය විශ්වවිද්‍යාලය ශ්‍රී ලංකාව
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம், இலங்கை
UNIVERSITY OF JAFFNA., SRI LANKA

Prof. S.Mohanadas
B.Sc Hons (S.L), Ph.D. (Adelaide),
C.Chem, F.I. Chem

த.பெ. எண் 57,
P.O Box 57,

திருநெல்வேலி, யாழ்ப்பாணம்,
Thirunelvely, Jaffna.

Office : 021- 222 2294
Fax : 021- 222 2294
e-mail : ujvc@mail.ewisl.net

அணிந்துரை

கலாநிதி செ.இளங்குமரன் கடந்த இருபது ஆண்டுகளாக யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகத்தில் முதலில் விஞ்ஞானபீட கணித புள்ளிவிபரவியல்துறையிலும், பின்னர் கலைப்பீட பொருளியல்துறையிலும் புள்ளிவிபரவியல் கற்பிக்கும் பணியில் ஈடுபட்டுள்ளார். துடிப்பும், ஆர்வமும் மிக்க இவர் பிரயோகப் புள்ளிவிபரவியல் சார்ந்த பல ஆராய்ச்சிக் கட்டுரைகளை எழுதியுள்ளார். எமது பல்கலைக்கழகத்தின் சகல பீடங்களிலும் கணிதம், புள்ளி விபரவியல் கற்பித்த பெருமைக்காக இவரை நான் பாராட்டவேண்டும்.

தமிழில் வெளிவரும் பாடப்புத்தகங்கள் எமது தமிழ்ச்சமூகத்தின் சொத்துக்களாகும். இவ்வகையில் விவரணப்புள்ளி விபரவியல் நூலிற்கு அடுத்ததாக ஆசிரியர் வழங்கும் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் எனும் இந்த இரண்டாவது நூல் சமூக, பிரயோக விஞ்ஞானத்துறைகளுக்கு மிகவும் பயன்படத்தக்க அரிய நூலாக உள்ளது. இந்தியாவிலும், நியூசிலாந்திலும் இவர் பெற்ற உயர் பட்டப்படிப்பு அனுபவங்கள் இவரின் திறமைக்கு வலுச்சேர்த்துள்ளன.

புள்ளிவிபரவியலைக் கற்க விரும்பும் மாணவர்களுக்கும், ஆசிரியர்களுக்கும் இவரது "நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்" எனும் இந்நூல் பெரிதும் வழிகாட்டவல்ல தாகும். ஆராய்ச்சிப்படிப்புகள், பட்டப்பின்படிப்புகள், முதுமெய்யியல்மாணிகள் பயில்வோருக்கு புள்ளிவிபரவியலின் பிரயோகம் மிகமிக அவசியமான இச்சூழலில் இப்பாடநூல் மிகப் பொருத்தமாக வெளிவருகின்றது. இவரது கல்விப் பணிகள் மேன்மேலும் தொடர வாழ்த்துகின்றேன்.

துணைவேந்தர் அலுவலகம்
15.11.2005

Prof. S.Mohanadas
Vice-Chancellor,
University of Jaffna.

Dedication

This publication is dedicated to those who have sacrificed their lives in Sri Lanka for the cause of Educational Development, Peace and Harmony.

"....... the great difficulty in social sciences .... and in applying scientific methods is that we have not yet established any agreed standards for disproving a hypothesis"

- Joan Robinson

மதிப்பீட்டுரை

புள்ளிவிபரவியலினை விரிவாக விளக்கமாக கற்பதற்கு விவரணப் புள்ளி விபரவியலுடன் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் பற்றிய அறிவு அவசியமாகும். நிகழ்தகவுக்கோட்பாடுகள் பற்றிய முன் அறிவு இல்லாமல் புள்ளிவிபரவியலின் எந்தப் படிமுறையினையும் உயர்நிலையில் கற்கமுடியாது.

இந்நூலினை எழுதிய ஆசிரியர் கலாநிதி செ.இளங்குமரன் எனக்கு மிகவும் பரிட்சயமானவர். கடந்த இருபது ஆண்டு காலமாக பல்கலைக்கழக ஆசிரியராக பணியாற்றிவரும் அவர் புள்ளிவிபரவியிலில் இளநிலை, முதுநிலை, கலாநிதி பட்டங்களைப் பெற்றதுடன் இந்நூலை ஆக்குவதற்கு தகுதியானவரும் ஆவார். தனது அறிவு, கற்பித்தல் அனுபவங்களைக் கொண்டு இந்நூலைப் படைத்திருக்கின்றார்.

இன்நூலின் மூலப்பிரதியினை தெளிவாக வாசித்ததுடன் தேவையான திருத்தங்களையும் சிபார்சு செய்தவர் என்ற அடிப்படையில் இளநிலைப்பட்டதாரி மாணவர்களுக்கு இது மிகவும் பயனளிக்கும் நூல் என நான் கருதுகின்றேன். அத்தியாயங்களும், பிரிவுகளும் முறையாக ஒழுங்குபடுத்தப்பட்டு வாசகர்களை தொடர்நிலையாக புள்ளிவிபரவியலைக் கற்பதற்கு ஏற்ற நூலாக இவர் இதனைக் கொண்டு செல்கின்றார். குறிப்பாக B.Sc (Statistics), B.A (Social Sciences), B.Com, BBA பட்டதாரி மாணவர்கள் இந்நூலின் மூலம் அதிக பயன்களைப் பெறலாம் என நினைக்கின்றேன். ஆசிரியர் மேன்மேலும் இவ்வாறான நூல்களை படைக்க வேண்டும் என வாழ்த்துகின்றேன்.

கலாநிதி இ.விக்கினேஸ்வரன்,
சிரேஸ்ட விரிவுரையாளர்,
கணித புள்ளிவிபரவியல்துறை,
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்.

முன்னாள் தலைவர்,
கணிதவியற்துறை,
கிழக்குப் பல்கலைக்கழகம்.

10.11.2005

Evaluation

The knowledge of Probability theory along with Descriptive statistics becomes very essential for the detail study of statistics. It becomes very difficult to study advanced statistics without a prior knowledge of Probability theory.

The author Dr.C.Elankumaran is well known to me for the last 20 years as a University teacher and a fellow student for another four years previously. He is fully qualified to produce such a book based on his knowledge in the subject, and his teaching experience.

As a person who has gone through the original manuscript and made suitable suggestions, I am very confident that this book will be a good resource material for the undergraduate students. The author has arranged the chapters and sections in such a way to make the student to understand the topics in a sequential and orderly manner. This resource material, I am sure, will be very useful especially for the students of B.Sc in statistics, BA in Social Sciences, B.Com and B.B.A studies.

I am very happy to state that this book becomes a second one in the series of his statistics text books. I expect and wish Dr.Elankumaran to produce many more books in this series to facilitate the easy learning of statistics. I wish him well.

Dr.R.Vigneswaran, B.Sc(Hons), Ph.D.
Senior Lecturer, Mathematics and Statistics,
Department of Mathematics and Statistics,
University of Jaffna.
(Former Head / Mathematics,
Eastern University of Sri Lanka).

முகவுரை

இரண்டாம் நிலைக் கல்வியிலும் பல்கலைக்கழக கல்வியிலும் புள்ளிவிபரவியலின் அறிமுகமும், உள்ளடக்கமும் வருடா வருடம் விரிவடைந்து பரவலாகப் பயன்படுத்தப்பட்டு வருகின்றது. அடிப்படைப் புள்ளி விபரவியலினைக் கற்பதற்கு எமது தமிழ்ச்சமூகத்திற்கு நான் அறிமுகப்படுத்தும் இரண்டாவது பாடநூல் இதுவாகும். விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் நூல் புள்ளிவிபரவியலின் அடிப்படை விடயங்களைக் கற்பதற்கு 1998 இல் வெளியிடப்பட்டது. புள்ளிவிபரவியல் பாடநெறியினை மேலும் விரிவாகக் கற்பதற்கும் இத்துறையில் முன்னேறுவதற்கும் இந்நூல் அவசியமாகின்றது.

நிகழ்தகவுக்கோட்பாடுகளை அடிப்படை விடயங்களிலிருந்து போதுமான உயர்நிலை விடயங்கள் வரை தொடர்ச்சியாக இந்நூலில் ஒழுங்குபடுத்தி விரிவாக விளக்கியுள்ளேன். பொருத்தமான உதாரணங்கள் மூலம் கோட்பாடுகள் விளக்கப்பட்டுள்ளன. முன்னறிவு இன்றியே நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளை இந்நூலின் மூலம் எவரும் கற்கலாம். இருப்பினும் இறுதி அத்தியாயங்களில் நுண்கணிதம் தொடர்பான முன் அறிவு சற்று அதிகம் தேவைப்படுகின்றது. இந்நூலின் மூலம் நிகழ்தகவினை தெளிவாகக் கற்பவர் புள்ளிவிபரவியலில் வேறு எந்தப் பாட அலகினையும் இலகுவாகக் கற்கலாம்.

பல்கலைக்கழக கல்வியில் புள்ளிவிபரவியலை கற்பதற்கு எல்லா பீடங்களிலும் இந்நூலைப் பயன்படுத்த முடியும். க.பொ.த(உ/த) மாணவர்களுக்கும் இணைந்த கணிதத்தினை கற்பிக்கும் ஆசிரியர் களுக்கும் கூட இது பயன்படத்தக்கது.

கலாநிதி செ.இளங்குமரன்

பொருளடக்கம்

உடையார்முன் இல்லார்போல் ஏக்கற்றும் கற்றார்

கடையரே கல்லாதவர்.

– குறள் 395

க.பொ.த(சா/த) இல் கணித அறிவுடன் இந்நூலினுள் நுழையலாம். ஆறு அத்தியாயங்களும் எளிமையான விளக்கத்துடன் தொடங்கி படிப்படியாக முன்னேறிச் செல்கின்றன. இந்நூலில் கையாளப்பட்டுள்ள உதாரணங்களில் அநேகமானவை சமூகவிஞ்ஞானம் சார்ந்த, குறிப்பாக பொருளியல், வணிகவியல் சார்ந்தவையாக தெரிவுசெய்யப்பட்டுள்ளன.

– ஆசிரியர்.

Chapter 1

Probability - A Statistical Tool

At the end of this chapter you will be able to

(1) Define a "Random Experiment"

(2) Define what is meant by "Probability"

(3) Understand various approaches of Probability

(4) Define an "Event" and Calculate its "Probability"

(5) Distinguish between "Mathematical Probability" and "Statistical Probability"

1. நிகழ்தகவு - ஒரு புள்ளியியல் கருவி
Probability - A Statistical tool

1.1: அறிமுகம் (Introduction)

புள்ளிவிபரவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் ஊடாகத் தரப்படுகின்றன. விவரணப் புள்ளிவிபரவியலில் தரவு சேகரிப்பு (Collection of Data), அவற்றின் வகுப்பாக்கம்-அட்டவணையாக்கம் (Classification and Tabulation), வரிப்படங்கள் - வரைபுகள் மூலம் விவரித்தல் (Presentation), அத்துடன் அடிப்படைப் பகுப்பாய்வு (Analysis of Data) என்பன முக்கியத்துவம் பெறுகின்றன. இதில் புள்ளிவிபரங்கள், அல்லது தொடர்புடைய புள்ளிவிபர மாறிகளின் (Statistical Variables) இயல்தகு பெறுமானங்கள் நிச்சயமான சூழ்நிலை (Certainty)க்கு உட்பட்டவையாக கருதப்படுகின்றன. அதாவது விவரண புள்ளிவிபரப் பகுப்பாய்வு முழுமையான இயங்கு புலத்தினை (Operational field) உள்ளடக்குவதில்லை. எனவே புள்ளிவிபர மாற்றங்களின் நிச்சயமற்ற சூழலையும் (Uncertainty) கருத்திற் கொண்ட பகுப்பாய்வு அவசியமாகின்றது. நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் இவ்வாறான பிரச்சனைகள் யாவற்றையும் இலகுவாக்கி பொதுமைப்படுத்துகின்றன.

நிகழ்தகவு கோட்பாடுகளின் உருவாக்கம் முதன்முதலில் தாயக்கட்டை சூது விளையாட்டுக்களில் ஆரம்பித்தது. இத்தாலிய கணிதவியலாளன் கலிலியோ (Galileo,1564-1642) என்பவர் இக்கோட்பாடுகளை சூதாட்ட விளையாட்டுக்களின் பெறுபேறுகளூடாக பிரேரித்தார். இருப்பினும் அறிவியல் ரீதியாக, கணித கோட்பாடுகளின் அடித்தளத்துடன் பிரெஞ்சு கணிதவியலாளர்கள் பஸ்கால் (Pascal, 1623-1662), பேமற் (Fermat, 1601-1665) என்போர் முறையான நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளை உருவாக்கினர். மேலும் பேணோலி (Bernolli, 1654 - 1705), டிமோவி (De-Moive, 1667-1754) போன்றோரி

னால் இக்கோட்பாடுகள் விரிவாக்கம் பெற்றன. நவீன நிகழ்தகவு அணுகுமுறைகள் (Modern Concepts of Probability) லப்பிளாஸ் (Laplace,1749 -1827), செபிச்சேபு (Chebyshev, 1821-1894), மார்க்கோபு (Markoff, 1885-1922) போன்றோரின் குறிப்பிடத்தக்களவு நிகழ்தகவு கோட்பாட்டு ஆய்வுகளூடாக (Probability research) பிரபல்யமாகின. இவ்வகையில் பேயிசு (Bays), லெவி (Levy, 1900s), பிசர் (Fisher, 1940s), கொல்மோக்குரொவு (Kolmogrov, 1950s) போன்றோரின் கடந்த நூற்றாண்டு ஆய்வுகள் குறிப்பிடத் தக்கவை.

நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளானவை பரிசோதனைகள், நிகழ்ச்சிகள், நிகழ்வுகள் போன்ற இயற்கையாக திடமாகக் கூறமுடியாத விளைவுகளைக் கொண்டுள்ள தோற்றப் பாடுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப் படுகின்றன. பௌதீக, சமூக விஞ்ஞான (Physical and Social Sciences) முறைகளின் பல்வேறு பிரிவுகளில் புள்ளியியல் பிரயோகத்தின் அடிப்படைக்கருவி நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு ஆகும். மீள் பரிசோதனை (Repeated Trials) ஒன்றின் ஓர் பெறுபேறு (result) அல்லது வெளியீடு (outcome) நிகழ்வதற்கான சாத்தியக்கூறினை நிகழ்தகவு அளவிடுகின்றது. நிகழ்தகவுக்கான கணித கோட்பாடானது நிகழ்தகவுக்கு ஒரு கணிய அளவை (numerical measure) யினை வரையறுப்பதாக அமைகிறது.

உதாரணம்1.1.1: ஒரு கோணலற்ற நாணயம் சுண்டப் படுகையில் தலை (H) அல்லது பூ (T) விழுவதற்கான சந்தர்ப்பங்கள் சமம் ஆதலால் அவற்றுக்கான நிகழ்தகவுகள் இரண்டு வெளியீடுகளுக்கும் சமமும் ½ உம் ஆகும்.

உதாரணம்1.1.2: ஒரு கோணலற்ற தாயக்கட்டை உருட்டப் படுகையில் அதன் எந்த ஒருமுகமும் சமவாய்ப்புடன் விழுவதனால் ஆறு முகங்களிலுமுள்ள எண்களில் ஏதாவது ஒரு எண் விழுவதற்கான நிகழ்தகவு ஆறுக்கும் சமமும் $^1/_6$ உம் ஆகும்.

நாளாந்த வாழ்க்கையில் நிகழ்தகவு மறைமுகமாக பயன்படுகின்றது அல்லது பரீட்சிக்கப்படுகின்றது.

உதாரணமாக,

(i) **அனேகமாக** இன்று மழை பெய்யும்

(ii) உலகக் கிண்ண கிரிக்கட்டில் இலங்கை வெல்வதற்கு இம்முறை **நல்ல தருணம்** உண்டு.

(iii) இப்பொருளுக்கு கூடிய கேள்வி கிடைப்பது இம்முறை **சாத்தியம்** ஆகும்.

(iv) இவ்வொப்பந்தம் நிறைவேறுவது 2:1 என்ற **பெருத்த வித்தியாசத்தில்** ஆகும்.

எனும் வசனங்களில் அனேகமாக (possibly), நல்ல தருணம் (good chance), சாத்தியம் (likely), பெருத்த வித்தியாசம் (odds) என்பன நிகழ்தகவை அளவிடுவதற்கு பயன் பாட்டிலுள்ள சொற்கள் ஆகும்.

உயர் புள்ளியியல் முறைகளில், சிறப்பாக புள்ளிவிபர அனுமானங்களில் (Statistical Inference) நிகழ்தகவு கோட்பாடுகள் அடிப்படையாக அமையும் பல சந்தர்ப்பங்கள் உள்ளன. அவற்றில் சில பின்வருமாறு :

(i) புள்ளிவிபர ஒழுங்காக்கல் விதி (Law of Statistical regularity), புள்ளிவிபர பேரெண் விதி (Law of Large numbers) போன்ற புள்ளிவிபர அடிப்படை விதிகளின் பிரயோகம்.

(ii) புள்ளிவிபரக் குடிகளின் சிறப்பியல்புகளை ஆய்வு செய்வதில், அதில் இருந்து எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்ட மாதிரியானது பயன்படுத்தப்படுகையில், மாதிரிச் சிறப்பியல்பு களால் குடிச்சிறப்புகள் சிறப்பாகப் பிரதிபலிக்கப்படுதல்.

(iii) குடியின் பரமானங்களை மதிப்பீடு செய்வதில் மாதிரிப் புள்ளிவிபரங்களைப் பயன்படுத்துதல்.

(iv)கருதுகோள்களை புள்ளிவிபர பொருண்மைச் சோதனை கட்கு உட்படுத்துகையில் சோதனைப் பெறுமான, கொள்கைப் பெறுமான ஒப்பீடுகள்.

(v) எழுமாற்று மாறிகளின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை அமைத்தல், அவற்றின் எதிர்வு, மாறற்றிறன்களை மதிப்பிடுதல்.

(vi)தீர்மானமெடுத்தல் கோட்பாடுகளில் (Decision theories) எதிர்வுப் பெறுமானங்கள், நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள் அடிப்படையாக அமைதல்.

(vii)இடர் (Risk), நிச்சயமின்மை (Uncertainty) ஆய்வுகள், குறிப்பாக பொருளியல் தீர்மானங்களில் (Economic decision making), நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளால் அமைதல்.

எனவே அடிப்படை நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளை கற்றல் மிக அவசியமான முதற்படியாகும். இந்நூலின் அடுத்து வரும் மூன்று அலகுகளிலும் பழைய, புதிய அணுகுமுறைகளில் நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் பற்றியும், ஒருபடி மேலே போய் நிபந்தனையுடனான சிக்கலான நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் பற்றியும் ஆராயப் படுகின்றன. இறுதி இரண்டு அலகுகளிலும் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு களின் பிரயோகங்கள் எழுமாற்று மாறிகள், அவற்றின் பரம்பல்கள் என்பனவற்றினூடாக விளக்கப்படுகின்றன.

1.2 : வரைவிலக்கணம் (Definition)

"In the subjective or personal interpretation of probability, it is interpreted as a measure of degree of belief, or as the qualified judgment of a particular individual"

"The objective probability is obtained on the basis of certain laws of nature, which are undisputed or on some experiments conducted for the purpose"

ஒரு நிகழ்ச்சி (event) நடைபெறுவதற்கான சாத்தியக் கூறின் அளவிடை (Measure of chance) நிகழ்தகவு என வரையறுக்கப்

படுகிறது. ஓர் நிகழ்ச்சி நிச்சயமாக (Certainity) நடக்கலாம் அல்லது நடப்பது முழுமையாக நிச்சய மற்றதாக (Uncertainity) போகலாம் என்பன இரு எல்லைச் சாத்தியக் கூறுகளாகும் (Extreme Cases). மேலும் நடைமுறையில் அது 25% நிகழலாம், 50% நிகழலாம் அல்லது 75% நிகழலாம் எனவும் அவ்வெல்லைச் சாத்தியக்கூறுகளிற் கிடையிலும் விபரிக்கின்றோம். இவ்வடிப் படையினை [0, 1] எனும் எண் பெறுமான வீச்சில் மேலே கூறப்பட் டவற்றை 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 எனும் எண் பெறுமானங்களூடாக "நிச்சயமாக நடக்காது" என்பதிலிருந்து "நிச்சயமாக நடக்கும்" என்பது வரை அளவிடுகிறோம். இதுவே நிகழ்தகவுக்கான பழைய அடிப்படை வரைவிலக்கணமாகும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட, ஒன்றுக்கொன்று மாற்றீடாக அமையக்கூடிய வெளியீடுகளை அல்லது விளைவுகளை உண்டாக்கும் பரிசோதனைகள் அல்லது செயற்பாடுகளை எடுத்துக்கொண்டால் அத்தனித்தனி வெளியீடுகளின் தனித்தனி நிகழ்தகவுகள் யாவும் சேர்ந்து 100%, அதாவது மொத்த நிகழ்தகவு 1 இற்கு சமமாக இருக்கும் என வரையறுக்கப்படுகின்றன. எனவே நிகழ்தகவுக்கான முறையான வரைவிலக்கணத்தைப் பற்றி விபரிக்க முன்னர் பரிசோதனைகள், நிகழ்ச்சிகள் பற்றி விபரிக்க வேண்டியுள்ளது.

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை (Random Experiment)

எந்த வெளிப்புற பாதிப்புக்குமுட்படாத ஒரு சீரான சூழ்நிலையில் மீள மீள மேற்கொள்ளப்படுகையில் ஒரு தனியானதாக அல்லாமல் பல்வேறு மாற்றீடான இயல்தகு வெளியீடுகளை (outcomes) தருகின்ற செயற்பாடு எழுமாற்றுப் பரிசோதனை அல்லது மீள்முயல்வுப் (repeated trials) பரிசோதனை எனப்படும். அதாவது எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றினை ஒரு வெளியீட்டை திட்டவட்டமாக எதிர்பார்த்து மேற்கொள்ள முடியாது.

இயல்தகு வெளியீடுகள் (Possible Outcomes)

ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் எல்லாச் சாத்தியமான விளைவுகளையும் அல்லது முடிவுகளையும் இயல்தகு வெளியீடுகள் அல்லது வெளியீடுகள் எனக் கூறுவோம்.

நிகழ்ச்சிகள் எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளின் வெளியீடுகளில் வரையறுக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு இயல்தகு வெளியீட்டினையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு ஆரம்ப நிகழ்ச்சி (Elementary event) ஒன்றினை வரையறுக்கலாம். ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட வெளியீடுகளின் சேர்க்கையாக கருத்துடன் வரையறுக்கப்படுவது ஒரு நிகழ்ச்சி (Event) ஆகும்.

சாதகமான நிகழ்ச்சி (Favorable event)

வரையறுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியொன்றினை எல்லா இயல்தகு வெளியீடுகளும் முழுமையாக அனுசரிக்குமாயின் அந்நிகழ்ச்சி சாதகமான நிகழ்ச்சி அல்லது நிச்சயமான நிகழ்ச்சி (Certain event) எனப்படும். இதன் நிகழ்தகவு, 100% வெளியீடுகளுடன், அதாவது 1 ஆகும்.

பாதகமான நிகழ்ச்சி (Unfavorable event)

வரையறுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியொன்றினை அனுசரிப் பதற்கு எந்த ஒரு இயல்தகு வெளியீடும் இல்லையாயின் அந்நிகழ்ச்சி பாதகமான நிகழ்ச்சி அல்லது நிச்சயமற்ற நிகழ்ச்சி (Uncertain event) எனப்படும். இதன் நிகழ்தகவு, 0% வெளியீடுகளுடன், அதாவது 0 ஆகும். இது சூனிய நிகழ்ச்சி எனவும் கொள்ளப்படும்.

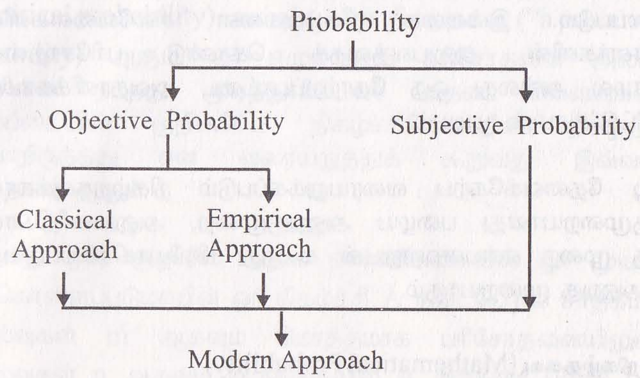
ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள்

(Equally Likely Elementary events)

எழுமாற்றுப் பரிசோதனையொன்றின் எல்லா இயல்தகு வெளியீடுகளும் நிகழ்வதற்கு சமவாய்ப்பு அல்லது சமநிகழ்தகவு இருக்குமாயின் அவை யாவும் ஒரே மாதிரியான நிகழ்ச்சிகள் என வரையறுக்கப்படும்.

மேற்படி விடயங்களை உள்ளடக்கியதாக நிகழ்தகவிற்கான வரைவிலக்கணமானது இரண்டு வழிகளில் வரையறுக்கப்படுகின்றது. அவை பின்வருமாறு விபரிக்கப்படுகின்றன.

நிகழ்தகவுக் கணிப்பீட்டு அணுகு முறைகளை வரைவிலக்கண ரீதியாக வகைப்படுத்தலாம். பின்வரும் படம் இவ்வகைப்படுத்தலை தெளிவாக்குகிறது.



புறப்போக்கு நிகழ்தகவு (Objective Probability)

இவ்வகை நிகழ்தகவானது இயற்கையான சில விதிகள் அல்லது சட்டப்பிரமாணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப் படுபவையாகும். இவ்விதிகள் அல்லது சட்டப்பிரமாணங்கள் சில பரிசோதனைகளை நோக்கமாகக் கொண்டு அமைவதனால் அவற்றை மீளத் திருத்துதல் என்பதற்கு இடமில்லை. தனி நபர்களின் தேவைக்கேற்ற, அபிப்பிராயத்துக்கேற்ற வகையில் இவை அமையமுடியாது.

மேற்படி புறவய நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் இரு அணுகுமுறைக் குட்பட்டவையாகும். அவ்வாறான பழைய அணுகுமுறை (Classical approach), அனுபவத்துக்குரிய அணுகுமுறை (Empirical approach) என்பன கணித நிகழ்தகவு, புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு என்பனவற்றினால் கீழே வரையறுக்கப்படுகின்றன.

அகப்போக்கு நிகழ்தகவு (Subjective Probability)

இவ்வகை நிகழ்தகவானது பரிசோதனையாளர்கள் அல்லது ஆய்வாளர்களின் தேவைகள், நோக்கங்கள், அபிப்பிராயங்

களுக்கு ஏற்ற வகையில் வரையறுக்கப்படுபவையாகும். இவ்வகை நிகழ்தகவுகளை மீளத் திருத்தியமைக்கலாம். இது தனிப்பட்ட நிகழ்தகவு. (Personal Probability) எனவும் சொல்லப்படும். இவ்வகை நிகழ்வுகளை சிலவேளைகளில் ஆய்வாளர்களின் அனுபவத்தைக் கொண்டு பரிசோதனை நடத்தாமல் அல்லது ஒரு தோற்றப்பாட்டை அவதானிக்காமல் குறிப்பிட்டு கூறவும் முடியும்.

மேற்படி தேவைக்கேற்ப வரையறுக்கப்படும் நிகழ்தகவுக்கான அணுகுமுறையானது பழைய அணுகுமுறை, அனுபவரீதியான அணுகு முறை என்பனவற்றுடன் கலந்து பிரயோகிக்கப்படுவது நவீன அணுகு முறையாகும்.

கணித நிகழ்தகவு (Mathematical Probability)

கணித நிகழ்தகவு என்பது முன்கூட்டியே கூறப்படும் நிகழ்தகவு (Classical Probability) அல்லது முன் நிகழ்தகவு ("a priori" probability) ஆகும். ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை அல்லது பிரச்சினை நடக்குமாயின் அதன் விளைவுகளினடிப்படையில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவு எவ்வாறிருக்கும் என முன்கூட்டியே வரையறுத்துக் கூறுவது இவ்வகை நிகழ்தகவு ஆகும்.

அதாவது எழுமாற்று பரிசோதனை ஒன்றின் n வெளியீடுகளில், ஒரு நிகழ்ச்சி A நடைபெறுவதற்கு m விளைவுகள் சாதகமாகவும் மீதி (n-m) விளைவுகள் பாதகமாகவும் அமையுமாயின் A இற்கான கணித நிகழ்தகவானது,

$$\Pr(A) = \frac{m}{n} \qquad \text{................ (1.1)}$$

என வரையறுக்கப்படும். இங்கு மேற்படி எல்லா n விளைவுகளும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகும் என்பது எடுகோளாகும்.

புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு (Statistical Probability)

புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு என்பது பின்னர் கூறப்படும் நிகழ்தகவு (Empirical probability) அல்லது பின் நிகழ்தகவு ("a posteriori" probability) ஆகும். ஓர் எழுமாற்றுப் பரிசோதனை அல்லது பிரச்சினை நடந்து முடிந்துவிட்டால் அதன் விளைவுகளின் அடிப்படையில் குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவு எவ்வாறிருந்தது என வரையறுத்துக் கூறுவது இவ்வகை நிகழ்தகவு ஆகும்.

அதாவது ஒரே சூழலில் அதிக எண்ணிக்கையில் ஓர் முயல்வு மேற்கொள்ளப்படுமாயின் ஓர் நிகழ்ச்சி A நடைபெறும் சாதகமான முயல்வுகள் m ஆகவும் மொத்தமாக பரிசோதனையிலுள்ள முயல்வுகள் n ஆகவும் இருக்கையில் A இற்கான புள்ளி விபர நிகழ்தகவானது,

$$\Pr(A) = \underset{n\to\alpha}{\text{எல் லை}}\left(\frac{m}{n}\right) \qquad \text{................ (1.2)}$$

என வரையறுக்கப்படும். அதாவது n மிகப்பெரிதாக இருக்கையில் மிகத்திருத்தமான புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு கிடைக்கும் என்பதாகும். இருப்பினும் n குறிப்பிடத்தக்களவு பெரிதாக அல்லது பொருத்த மான எண்ணாக இருக்கையில் புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு

$$\Pr(A) = \frac{m}{n} \text{ என அமையும்.} \qquad \text{................ (1.3)}$$

உதாரணம் 1.2.1 : உதாரணம் 1.1.1 இலுள்ள நாணயம் சுண்டும் பிரச்சினையை கருதுக. அது ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையாகும். அதன் இயல்தகு வெளியீடுகள் {தலை, பூ} ஆகும். "தலை விழல்", "பூ விழல்" என்பன ஆரம்ப நிகழ்ச்சிக ளாகும். கோணலற்ற நாணயமாதலால் அவை H≡தலை, T≡பூ இரண்டும் ஒரே மாதிரியான நிகழ்ச்சிகளுமாகும். இரண்டுக்கும் m=1, n=2 ஆதலால்

$$\Pr(H) = \frac{1}{2}, \ \Pr(T) = \frac{1}{2} \text{ ஆகும்}$$

மேலும் $\Pr(H) + \Pr(T) = 1$ ஆகும்.

உதாரணம் 1.2.2 : உதாரணம் 1.1.2 இலுள்ள தாயக்கட்டை உருட்டும் எழுமாற்றுப் பரிசோதனையினை கருதுக. கோணலற்ற தாயக்கட்டை ஆதலால் இயல்தகு வெளியீடுகள் $\{1, 2, \ldots, 6\}$ யாவும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளை தரும். எல்லாவற்றுக்கும் m=1, n=6 ஆதலால்

$$\Pr(\{1\}) = \frac{1}{6}, \ldots\ldots\ldots, \Pr(\{6\}) = \frac{1}{6}, \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $\Pr(1) + \Pr(2) + \ldots\ldots + \Pr(6) = 1$ ஆகும்.

A ≡ "ஒற்றை எண் விழல்"

B ≡ "இரட்டை எண் விழல்"

எனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் வரையறுக்கப்படுமாயின் இரண்டுக்கும் m=3, n=6 ஆதலால்

$$\Pr(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \text{இதே போல}$$

$$\Pr(B) = \frac{1}{2}, \quad \text{ஆகும்.}$$

C ≡ "இலக்கம் 7 விழுதல்"

D ≡ "7 இலும் சிறிய எண் விழுதல்"

எனும் நிகழ்ச்சிகள் முறையே நிச்சயமற்ற (பாதகமான), நிச்சயமான (சாதகமான) நிகழ்ச்சிகளாகும்.

C இற்கு $m = 0, n = 6; \ \Pr(C) = \frac{0}{6} = 0$

D இற்கு $m = 6, n = 6; \ \Pr(D) = \frac{6}{6} = 1$

மேற்படி இரு உதாரணங்களும் பழைய அணுகுமுறைகளை அடிப்படையாகக்கொண்டவை. அடுத்து வருகின்ற உதாரணம் அனுபவரீதியான அணுகுமுறையினை அடிப்படையாகக் கொண்டதாகும். அதாவது புள்ளிவிபர நிகழ்தகவுக் கணிப்பீட்டுக்குரிய தாகும்.

உதாரணம் 1.2.3: பின்வரும் அட்டவணைத் தரவுகள் ஒரு தொழிற்சாலையின் 2000 ஊழியர்களின் நாளாந்த ஊதியத்தினை தருகின்றது.

நாளாந்த ஊதியம் (ரூபா)	ஊழியர் எண்ணிக்கை
< 280	18
280 - < 320	236
320 - < 360	956
360 - < 400	400
400 - < 440	284
440 - < 480	70
480<	36

ஒரு ஊழியன் இத்தொழிற்சாலையிலிருந்து எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்டான். அவரின் ஊதியம் பின்வருமாறு இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

i) 320 ரூபாவிலும் குறைவு

ii) 400 ரூபாவிலும் அதிகம்

iii) 320 ரூபாவிற்கும் 400 ரூபாவிகுமிடையில்.

தீர்வு:

மொத்தமாக உள்ள 2000 ஊழியர்ளையும் தனித்தனியாக, பூரணத்துவமான, சமவாய்ப்புடன் தெரிவு செய்யப்படக்கூடிய

தனித்தனி வெளியீடுகளாகக் கொள்ளலாம். $m = 2000$ ஆகும். மேற்படி (i), (ii), (iii) இலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் மூன்றையும் முறையே A,B,C எனக்கொள்வோம். ஆயின்

A இற்கு சாதகமானவர்கள் $n = 18 + 236 = 254$
B இற்கு சாதகமானவர்கள் $n = 284 + 70 + 36 = 390$
C இற்கு சாதகமானவர்கள் $n = 956 + 400 = 1356$

$$\therefore \Pr(A) = \frac{254}{2000} = 0.127$$

$$\Pr(B) = \frac{390}{2000} = 0.195$$

$$\Pr(C) = \frac{1356}{2000} = 0.678$$

என அந்நிகழ்தகவுகள் அமையும்.

மேலே விபரிக்கப்பட்ட உதாரணங்களை ஆராய்வோமாயின் நிகழ்தகவுக்கான அடிப்படை விதிகள் தெளிவாகும். எனவே நிகழ்தகவுக்கான அடிப்படை விதிகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

நிகழ்ச்சிகள் F, A, E என்பன முறையே நிச்சயமற்ற (பாதகமான), யாதாயினுமொரு, நிச்சயமான (சாதகமான) நிகழ்ச்சி களாயின்

(i) $\Pr(F) = 0,$ .... (1.4)

(ii) $0 \le \Pr(A) \le 1,$ .... (1.5)

(iii) $\Pr(E) = 1$ .... (1.6)

ஆகும்.

Chapter 2

Classical Approaches

At the end of this chapter you will be able to calculate probabilities by

(1) Calculating "Permutations"

(2) Calculating "Combinations"

(3) Finding "Individual Selection" procedures by with and without replacement

(4) Drawing "Probability Tree diagrams"

(5) Using "Relative Frequency Approach"

2. பழைய அணுகுமுறைகள்
Classical Approaches

2.1 : வரிசைமாற்றங்களும் சேர்மானங்களும் (Permutations and Combinations)

பழைய அணுகுமுறை நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளில் வரிசை மாற்றங்கள், சேர்மானங்கள் போன்ற ஒழுங்கு படுத்துதல் (Arrangements), தெரிவுமுறைகள் (Selection Methods) பிரயோகிக்கப்படுகின்றன. பல்வேறு வகை வரிசைமாற்றங்களும், சேர்மானங்களும் அவற்றைப் பயன்படுத்தும் நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளும் இங்கு விபரிக்கப்படுகின்றன.

எண்ணுதலின் அடிப்படை கோட்பாடு (Fundamental principle of Counting)

ஒரு நிகழ்ச்சி n_1 வழிகளிலும், பிறிதொரு நிகழ்ச்சி n_2 வழிகளிலும், இன்னுமொரு நிகழ்ச்சி n_3 வழிகளிலும், ... இவ்வாறே நிகழ்ந்தால் இவ்வெல்லா நிகழ்ச்சிகளும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறும் சாத்தியக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறு

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \qquad (2.1)$$

உதாரணம் 2.1.1 : ஒரு நிறுவனத்தில் 20 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர். தலைவர், செயலாளர், பொருளாளர் ஆகியோரை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். ஒரு குறிப்பிட்ட மூவர் அப்பதவிகளில் அமர்வதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு :

தலைவர் 20 உறுப்பினர்களில் ஒருவராக தெரிவு செய்யப்படின், தொடர்ந்து செயலாளர் மீதி 19 உறுப்பினர்களில் ஒருவராக தெரிவு செய்யப்படலாம், தொடர்ந்து மீதி 18 உறுப்பினர்களில்

ஒருவர் பொருளாளராக தெரிவாவார். எனவே மொத்த தெரிவு வழிகள்

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3$$
$$= 20 \times 19 \times 18$$
$$= 6840$$

ஒரு குறிப்பிட்ட மூவர் தெரிவு (A) இவ்வாறான 6840 வழிமுறைகளில் ஏதாவதொரு தெரிவு ஆகும். எனவே அதற்கான நிகழ்தகவு

$$Pr(A) = \frac{1}{6840} \text{ ஆகும்.}$$

வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations)

ஒன்றாக எடுக்கப்பட்ட உறுப்புக்களைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் ஓர் தரப்பட்ட ஒழுங்கிலான அவற்றின் ஒழுங்குபடுத்துதல் ஒரு வரிசைமாற்றம் எனப்படும். இவற்றில் r உறுப்புக்களின் ($r< n$) ஒரு தரப்பட்ட ஒழுங்கிலான ஏதாவ தொரு ஒழுங்குபடுத்தல் r-வரிசைமாற்றம் (r-permutation) அல்லது r உறுப்புக்கள் ஒன்றாக எடுக்கப்பட n உறுப்புக் களின் வரிசை மாற்றம் எனப்படும்.

இவ்வாறான வரிசை மாற்றங்களின் எண்ணிக்கை ^np_r என்பதனால் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$^np_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ....(2.2)$$

இதில் n! என்பது n இன் காரணியம் (n-factorial) எனப்படும்

$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots\; 2\,.\,1$ என வரையறுக்கப்படும். அத்துடன் $0! = 1$ உம் ஆகும். தொடர்பு (2.2) ஆனது காரணிய முறைப்படி சுருக்கப்பட்டால்

$$^np_r = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-r+1) \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3)$$

எனவும் அமையும். எல்லா n உறுப்புக்களையும் ஒழுங்குபடுத்து வதாயின் மேற்படி தொடர்பில் $r = n$ ஆக இருத்தல் வேண்டும். எனவே (2.3) ஆனது

$$^np_n = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \quad ....(2.4)$$

என அமையும். அதாவது n! முறைகளில் அவற்றை ஒழுங்கு படுத்தலாம்.

உதாரணம் 2.1.2 : a, b, c, d எனும் நான்கு நபர்கள் நான்கு கதிரைகளில் எத்தனை வழிகளில் அமரலாம்? அவை மூன்று கதிரைகளாகக் குறைக்கப்பட்டால் யாதாயினும் மூவர் எத்தனை வழிகளில் அமரலாம்?

தீர்வு:

(i) நான்கு நபருக்கும் தெரிவுக்கு நான்கு கதிரைகள் உள்ளன. எனவே தொடர்பு (2.4) இன்படி

$^4p_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ வழிமுறைகள் ஆகும்.

அவ்வழிமுறைகள்

abcd, abdc, acdb, acbd, adbc, adcb
bcda, bcad, bdac, bdca, bacd, badc
cdab, cdba, cabd, cadb, cbda, cbad
dabc, dacb, dbca, dbac, dcab, dcba

என்பன ஆகும்.

(ii) நான்கு நபர்களில் மூன்று நபர்களுக்கே கதிரைகள் உள்ளன. எனவே தொடர்பு (2.3) இன்படி $n=4, r=3$;

$^4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$ வழிகள்.

இவ்வொழுங்குகள் மேலே (i) இல் தரப்பட்ட 24 ஒழுங்குகளில் முதல் எழுத்துக்களை நீக்கினால் பெறப்படும் ஒழுங்குகள் ஆகும்.

உதாரணம் 2.1.3 : EQUATION எனும் சொல்லிலிருந்து எழுமாறாக ஒவ்வொரு எழுத்தாக மொத்தம் ஐந்து எழுத்துக்களை தெரிவு செய்து புதிய சொல்லமைப்பு நடைபெறுகின்றது. இவ்வமைப்பு வேலையில் QUOTA எனும் சொல் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு:

எட்டெழுத்து சொல் EQUATION, லிருந்து ஐந்தெழுத் துக்கள் Q, U, O, T, A என்பன தெரிவு செய்யப்பட வேண்டும், அத்துடன் சொல் அமைக்கப்படவும் வேண்டும்.

எனவே மொத்த வழிமுறைகள் $= {}^{8}p_5$

$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$

இவற்றில் ஒரு தெரிவு QUOTA ஆகும். எனவே அச்சொல் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $Pr(QUOTA) = \frac{1}{6720}$ ஆகும்.

மீளவரும் வரிசைமாற்றங்கள்

(Permutations with Repetitions)

மேலே கூறப்பட்ட வரிசை மாற்றத்தில் கருத்திற் கொள்ளப் பட்ட n உறுப்புக்களும் தொகுதியில் தனியானவை எனும் நிபந்தனை அல்லது எடுகோள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. அந்நிபந்தனை அல்லது எடுகோள் இல்லாத பொதுவான பரிசோதனையினை கருதினால், அதாவது சில உறுப்புக்கள் ஒரே மாதிரியானவையாக இருந்தால், ஒழுங்குபடுத்தல்களில் சில ஒரே மாதிரியானவையாக அமையும். இது மீளவரும் வரிசைமாற்றம் ஆகும். இவ்வாறான மீளவரும் வரிசை மாற்றங்களை சீர்செய்து தனித்தனியான (Unique) வரிசைமாற்றங்களை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

ஒரு தொகுதியில் n_1 ஒரேமாதிரியான உறுப்புக்களும், n_2 இன்னொருமாதிரியான உறுப்புக்களும், ..., n_r ஒரே மாதிரியானதுமாக r வகையான மொத்தமாக n உறுப்புக்கள் இருக்குமாயின் வரிசைமாற்றங்களின் மொத்த எண்ணிக்கை

$$^{n}P_{n_1, n_2, \ldots\ldots\ldots, n_r} = \frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\ldots\ldots\ldots(n_r!)} \quad \ldots\ldots(2.5)$$

என வரையறுக்கப்படும். இதில் $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_r$ ஆகும். ஒவ்வொரு வகையும் ஒவ்வொரு உறுப்பினையே கொண்டிருப்பின் $n_1 = 1, n_2 = 1, \ldots\ldots, n_r = 1$ ஆகும். ஆயின் r = n உம் ஆகும்.

இவ்வகையில்

$$^{n}P_{1,1,\ldots\ldots\ldots,1} = \frac{n!}{(1!)(1!)\ldots\ldots\ldots(1!)}$$

$= n!$ ஆகும்.

இது தொடர்பு (2.4) இனால் தரப்படும் மீள வராத வரிசை மாற்றம் ஆகும்.

உதாரணம் 2.1.4: STATISTICS எனும் சொல்லிலுள்ள எழுத்துக்களின் வரிசைமாற்றங்கள் எத்தனை?

தீர்வு:

இச்சொல்லின் 10 எழுத்துக்களும் வெவ்வேறானவை அல்ல, எனவே தொடர்பு (2.4) பொருத்தமற்றதாகவும் தொடர்பு (2.5) பொருத்தமாக வருவதையும் காணலாம்.

S, T, A, I, C எனும் எழுத்துக்கள் மீள வருமாறு இச்சொல் அமைந்துள்ளது. இவற்றில் முறையே 3, 3, 1, 2, 1 எண்ணிக் கையுடைய எழுத்துக்கள் உள்ளன. எனவே தனித்தனியான வரிசைமாற்றங்களின் எண்ணிக்கை

$$^{10}P_{3,3,1,2,1} = \frac{10!}{(3!)(3!)(1!)(2!)(1!)}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2)\ (3 \times 2)\ (2)}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 2 \quad = 50400$$

அதாவது மொத்தமாக 50400 தனித்தனியான வரிசை மாற்றங்களைப் பெறலாம்.

உதாரணம் 2.1.5 : MISSISSIPPI எனும் சொல்லின் எழுத்துக்களைக் குழப்பி புதிய சொல் வடிவமைக்கப் படுகிறது. இச்சொற்களில் 4S களும் தொடர்ச்சியாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு:

தரப்பட்ட 11 எழுத்துக்கள் (M இல் 1, I இல் 4, S இல் 4, P இல் 2) உடைய சொல்லினை குழப்புவதனால் பெறப்படும் மொத்த சொற்களின் எண்ணிக்கை

$$n = \frac{(11!)}{(1!)\,(4!)\,(4!)\,(2!)}$$

$$= \frac{11 \, x \, 10 \, x \, 9 \, x \, 8 \, x \, 7 \, x \, 6 \, x \, 5 \, x \, 4 \, x \, 3 \, x 2}{4 \, x \, 3 \, x \, 2 \, x \, (4!) \, x \, 2}$$

$$= 34650$$

நான்கு S எழுத்துக்களும் தொடர்ச்சியாக அமைவதற்கு மொத்தமாக 8 இடங்கள் சொல்லில் உள்ளன. ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஏனைய 7 எழுத்துக்களை குழப்பி எழுதுவதன் மூலம் மொத்தமாக ஏற்படக் கூடிய சொற்களின் எண்ணிக்கை

$$m = 8 \left\{ \frac{(7!)}{(1!)\,(4!)\,(2!)} \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{7 \, x \, 6 \, x \, 5}{2} \right\} = 840$$

எனவே 4S கள் தொடராக வரும் சொல் அமைவதற்கு (நிகழ்ச்சி) (A) உரிய நிகழ்தகவு

$$\Pr(A) = \frac{840}{34650}$$

$$= \frac{4}{165} \text{ ஆகும்.}$$

சேர்மானங்கள் (Combinations)

ஒரு தொகுதி n உறுப்புக்களிலிருந்து ஒரு பகுதி r உறுப்புக்களை ($r \leq n$) ஒரே தடவையில் தெரிவு செய்யும் வழிமுறை சேர்மானம் எனப்படும். இவ்வகையான தெரிவில் ஒழுங்குமுறைக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்கப்படுவதில்லை. r உறுப்புக்கள் மொத்தமாக தெரிவு செய்யப்படுவதனால் r-சேர்மானம் (r-Combination) என இத்தெரிவு சொல்லப்படும்.

இவ்வாறான சேர்மானங்களின் எண்ணிக்கை ${}^{n}C_{r}$ என்பதனால் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \text{.....................(2.6)}$$

சேர்மானம் தொடர்பான பின்வரும் முடிவுகள் கருத்திற் கொள்ளப்பட வேண்டியவையாகும்.

(i) n உறுப்புக்களில் இருந்து ஒன்றையும் எடுக்காமல் விடல், முழுவதையும் எடுத்தல் என்பன ஒரே ஒருமுறை மட்டுமே சாத்தியமாகும். ஏனெனில்

$${}^{n}C_{0} = \frac{n!}{0!\; n!} = 1$$

$${}^{n}C_{n} = \frac{n!}{n!\; 0!} = 1 \quad \text{ஆகும்.}$$

(ii) n உறுப்புக்களில் r உறுப்புக்களை எடுப்பதும் அல்லது மீதி (n-r) உறுப்புக்களை எடுப்பதும் ஒரே எண்ணிக்கையான

வழிமுறைகளில் ஆகும். ஏனெனில்

$$^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^{n}C_{n-r} \text{ ஆகும்.}$$

(iii) n உறுப்புக்களிலிருந்து ஒரு உறுப்பை எடுப்பதாயின் n வழிகளில் எடுக்கலாம். ஏனெனில்

$$^{n}C_{1} = \frac{n!}{1!\ (n-1)!} = n \quad \text{ஆகும்.}$$

உதாரணம் 2.1.6 : உதாரணம் 2.1.2 இனை கருதுக. நான்கு நபர்களிலிருந்து மூவரை எத்தனை வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம்?

தீர்வு:

மொத்த வழிகள் $^{4}C_{3} = \frac{4!}{(3!)\ (1!)} = 4$ ஆகும்

a, b, c, d என்போர் அந்நபர்களாயின் இச் சேர்மானங்கள் முறையே $\{a,b,c\}, \{b,c,d\}, \{c,d,a\}, \{d,a,b\}$ என்பனவாகும்.

உதாரணம் 2.1.7: ஒரு பெட்டியில் 5 சிவப்பு நிற (R), 6 வெள்ளைநிற (W), 4 பச்சை நிற (G), பந்துகள் உள்ளன. இப்பெட்டியிலிருந்து மூன்று பந்துகள் எழுமாறாக எடுக்கப்பட்டன. எடுக்கப்பட்ட பந்துகள்

(அ) யாவும் வெள்ளை நிறம்

(ஆ) ஒவ்வொன்றும் வெவ்வேறு நிறம்

ஆக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளை கணிப்பிடுக.

தீர்வு:

n = "யாதாயினும் 3 பந்துகளைத் தெரிவதற்கான மொத்த வழிமுறைகள்", ஆயின் பெட்டியில் மொத்தமுள்ள பந்துகள் 15 ஆதலால்,

$$n = {}^{15}C_{3} = \frac{(15!)}{(3!)\ (12!)}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2} = 455$$

(அ) மூன்று பந்துகளும் வெள்ளையாயின் அதற்கான வழிமுறைகள்

$$m = {}^{6}C_{3} = \frac{(6!)}{(3!)\ (3!)} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

எனவே $\Pr(WWW) = \frac{20}{455}$ ஆகும்.

(ஆ) மூன்று பந்துகளும் வெவ்வேறு நிறமாயின் அவை தனித்தனியாக தெரிவு செய்யப்படுவதற்கான வழிமுறைகள் முறையே

$^{5}C_{1},\ ^{6}C_{1},\ ^{4}C_{1}$ ஆகும்.

அதாவது 5, 6, 4 முறைகள் ஆகும். ஒவ்வொரு R இற்கான தெரிவும் ஒவ்வொரு W இற்கான தெரிவுடனும், ஒவ்வொரு G இற்கான தெரிவுடனும் சேர்மானமாக முடியுமாதலால் மொத்தமான வழிமுறைகள்

$$m = 5 \times 6 \times 4 = 120 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே $\Pr(RWG) = \frac{120}{455}$ ஆகும்.

உதாரணம் 2.1.8: ஒரு கடையில் பெட்டியில் உள்ள 15 முட்டைகளில் 5 பழுதடைந்தவையாகும். ஒரு வாடிக்கையாளனுக்கு கடையில் 5 முட்டைகள் விற்கப்பட்டன.

(i) வாங்கிய முட்டைகளில் 2 பழுதடைந்தவையாக

(ii) ஆகக் குறைந்தது 2 பழுதடைந்தவையாக

(iii) ஆகக் கூடியது 4 பழுதடைந்தவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் யாவை ?

தீர்வு :

பெட்டியில் 10 நல்லவையும், 5 பழுதானவையும் இருந்தன. எடுக்கப்பட்ட 5 முட்டைகளில் ஒன்றும் பழுதில்லை, 1 பழுது, 2 பழுது, 3 பழுது, 4 பழுது, 5 பழுது என்றவாறு அமையக்கூடியதாக 6 சந்தர்ப்பங்கள் உள்ளன.

(i) $Pr(2 \text{ பழுதானவை}) = Pr(3 \text{ நல்லவை } \& \ 2 \text{ பழுதானவை})$

$$= \frac{({}^{10}C_3)({}^{5}C_2)}{({}^{15}C_5)}$$

$$= \left(\frac{10!}{3!\ 7!}\right)\left(\frac{5!}{2!\ 3!}\right)\left(\frac{5!\ 10!}{15!}\right)$$

$$= \left(\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2}\right)\left(\frac{5 \times 4}{2}\right)\left(\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}\right)$$

$$= \frac{400}{1001}$$

(ii) $Pr(\text{ஆகக் குறைந்தது 2 பழுதுகள்})$

$= Pr(2, 3, 4, 5 \text{ பழுதுகள்})$

$= 1 - Pr(\text{ஒரு பழுதுமில்லை, 1 பழுது})$

$$= 1 - \frac{({}^{10}C_5)({}^{5}C_0)}{({}^{15}C_5)} - \frac{({}^{10}C_4)({}^{5}C_1)}{({}^{15}C_5)}$$

$$= 1 - \left(\frac{10!}{5!\ 5!}\right)\left(\frac{5!\ 10!}{15!}\right) - \left(\frac{10!}{4!\ 6!}\right) 5 \left(\frac{5!\ 10!}{15!}\right)$$

$$= 1 - \frac{12}{143} - \frac{50}{143} = \frac{81}{143}$$

(iii) $Pr(\text{ஆகக்கூடியது 4 பழுதுகள்})$

$= Pr(\text{ஒரு பழுதுமில்லை}, 1, 2, 3, 4 \text{ பழுதுகள்})$

$= 1 - Pr(5 \text{ பழுதுகள்})$

$$= 1 - \frac{({}^{10}C_0)({}^{5}C_5)}{({}^{15}C_5)}$$

$$= 1 - (1)\ (1)\left(\frac{5!\ \ 10!}{15!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3003} = \frac{3002}{3003}$$

இவ்வுதாரணத்தின் (ii), (iii) பகுதிகளில் மறைமுகமாக பயன்படுத்தப்படும் கோட்பாடு 3 ஆம் அத்தியாயத்தில் தொடர்பு (3.6) இனால் பின்னர் விளக்கப்படும். அதாவது, "ஆககுறைந்தது 2 பழுதுகள்", "ஆககூடியது 1 பழுது" என்பன ஒன்றையொன்று நிரப்பும் நிகழ்ச்சிகளாகும். அவற்றின் மொத்த நிகழ்தகவு 1 உம் ஆகும்.

தனித்தனியான தெரிவுகள்

(Individual Selections)

மேலே விபரிக்கப்பட்ட சேர்மானங்களுடனான தெரிவுகளை ஒரு மாதிரித் தொகுதியை மொத்தமாக கவனத்தில் கொள்வதன் மூலம் அமைக்கின்றோம். ஆனால் நடைமுறையில் தெரிவுகள் ஒவ்வோர் உறுப்பாக நடைபெறும் சந்தர்ப்பங்களும் உள்ளன. அவ்வாறான சந்தர்ப்பங்கள் இரு வகைப்படும்.

(அ) பிரதிவைப்புடனான தெரிவு (WR)
(Selection with replacement)

(ஆ) பிரதிவைப்பற்ற தெரிவு (WOR)
(Selection without replacement)

முதலுறுப்பு தெரிவு செய்யப்பட்ட பின்னர் அவ்வுறுப்பு மீளவும் தொகுதியிலிடப்பட்டு இரண்டாம் தெரிவு நடைபெறுவதும், இவ்வாறே தொடர்வதாகவுமிருந்தால் தெரிவு பிரதி வைப்புடனான தெரிவு (WR) எனவும் பதிலாக தெரிவு செய்யப்படும் உறுப்பு மீளதொகுதியிலிடப்படாமல் அடுத்த உறுப்பு தெரிவு செய்யப்படுவதும் அவ்வாறே தொடர்வதுமாகவிருந்தால் பிரதிவைப்பற்ற தெரிவு (WOR) எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

உதாரணம் 2.1.9 : ஒரு பெட்டியில் 4 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இப்பெட்டியிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் பிரதிவைப்புடனும், பின்னர் பிரதிவைப்பின்றியும் எழுமாறாக எடுக்கப்படுகின்றன. அப்பந்துகள் இரண்டும்

(i) வெள்ளையாக (W)

(ii) கறுப்பாக (B)

(iii) வெவ்வேறு நிறங்களாக

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் கண்டுபிடிக.

தீர்வு :

முதலில் மொத்தமாக உள்ள வழிமுறைகளின் எண்ணிக் கையினைக் காண்போம். மொத்தமாக 7 பந்துகள் பெட்டியி லிருப்பதனால்

$$WR; \quad n = {}^7C_1 \times {}^7C_1 = 7 \times 7 = 49$$

$$WOR; \quad n = {}^7C_1 \times {}^6C_1 = 7 \times 6 = 42$$

(i) இரண்டும் வெள்ளையாக இருப்பதற்கான வழிமுறைகள்

$$WR; \quad m = 4 \times 4 = 16$$

$$WOR; \quad m = 4 \times 3 = 12$$

எனவே

$$WR; \quad Pr(WW) = \frac{16}{49}$$

$$WOR; \quad Pr(WW) = \frac{12}{42}$$

(ii) இரண்டும் கறுப்பாக இருப்பதற்கான வழிமுறைகள்

$$WR; \quad m = 3 \times 3 = 9$$

$$WOR; \quad m = 3 \times 2 = 6$$

எனவே

$$WR; \quad Pr(BB) = \frac{9}{49}$$

$$WOR; \quad Pr(BB) = \frac{6}{42}$$

(iii) இரண்டும் வெவ்வேறு நிறங்களாக இருப்பதற்கான வழிமுறைகள் ;

$$WR; \quad m = 4 \times 3 = 12$$

$$WOR; \quad m = 4 \times 3 = 12$$

எனவே ;

$$WR; \quad Pr(WB) = \frac{12}{49}$$

$$WOR; \quad Pr(WB) = \frac{12}{42}$$

எனவே ஒழுங்குபடுத்துதல்கள், தனித்தனியான தெரிவுமுறைகள், மொத்தமான தெரிவு முறைகள் என்பனவற்றுக்கேற்ப மொத்த சாத்தியக்கூறுகளையும் நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான வெளியீடு களையும் எண்ணுதல் வேண்டும். இவற்றின் மூலம் பழைய முறையில் நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடலாம்.

2.2 : நிகழ்தகவு மரவரிப்படங்கள்

(Probability Tree Diagrams)

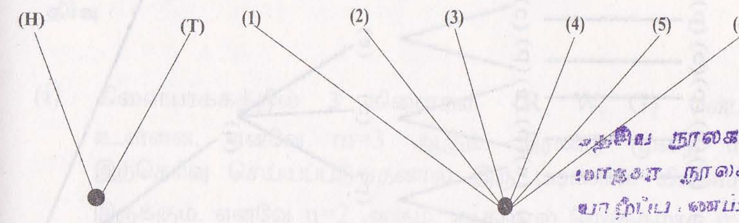
நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடுவதற்கான பழைய அணுகுமுறைகளில் வரிசை மாற்றங்கள், சேர்மானங்களின் பிரயோகங்கள் பற்றி பகுதி 2.1 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. இவை எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளின் விளைவுகளில் வரையறுக்கப்படும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு சாதகமான, பாதகமான வெளியீடுகளை எண்ணுவதன் மூலம் கணித நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணங்களூடாக நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடுவதற்கு உதவுகின்றன

இச்சாதக, பாதக வெளியீடுகளை உள்ளடக்கியதாக ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் எல்லா இயல்தகு வெளியீடுகளையும் விபரிக்குமுகமாக வரிசை மாற்ற, சேர்மான முறைகளுக்கு ஒரு மாற்றீடாக நிகழ்தகவு மர வரிப்பட முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. மரங்களின் அமைப்பு தனியான ஓர் வேருடன (Single root) படிப்படியாக கிளைகளாக (stepwise branches) பிரிந்து இருப்பது ஆகும். இம்மரவரிப் படத்தினை கீழிருந்து மேல் நோக்கி கிளைகளாக்காமல் (உதாரணம் 2.2.1 இனைப் பார்க்க) வசதி கருதி இடமிருந்து வலம் நோக்கி அல்லது மேலிருந்து கீழ்நோக்கி கிளைகளாக்கியும் அமைக்கலாம். (உதாரணம் 2.2.2 இனைப் பார்க்க)

மரவரிப் படங்கள் தனி வேரில் ஆரம்பித்து குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையுடைய கிளைகளுடன் முடிவடைகையில் இறுதிக் கிளைகள் யாவும் இயல்தகு வெளியீடுகளைக் (Possible outcomes) காட்டுவதாக அமைகின்றன. நிகழ்தகவுகள் சிலவேளைகளில் கிளையாக்கலுடன் சமாந்தரமாகவும், கணிக்கப்படுவதனால் இவற்றை நிகழ்தகவு மரவரிப் படம் என்கிறோம்.

சில நிகழ்தகவுப் பிரச்சனைகளை இலகுவாக்குவதற்கு மரவரிப் படங்களே சிறந்தவையாகும். வரிசைமாற்ற, சேர்மான அணுகுமுறைகள் சிலவேளைகளில் சிக்கலானவையாக அமைகையில் இவ்வணுகுமுறை பொருத்தமாகவிருக்கும்.

உதாரணம் 2.2.1: மிக எளிமையான எடுத்துக்காட்டலாக உதாரணங்கள் 1.1.1, 1.1.2 என்பனவற்றை கருதுவோம். தொடர்புடைய மரவரிப் படங்கள் பின்வருமாறு அமையும்.



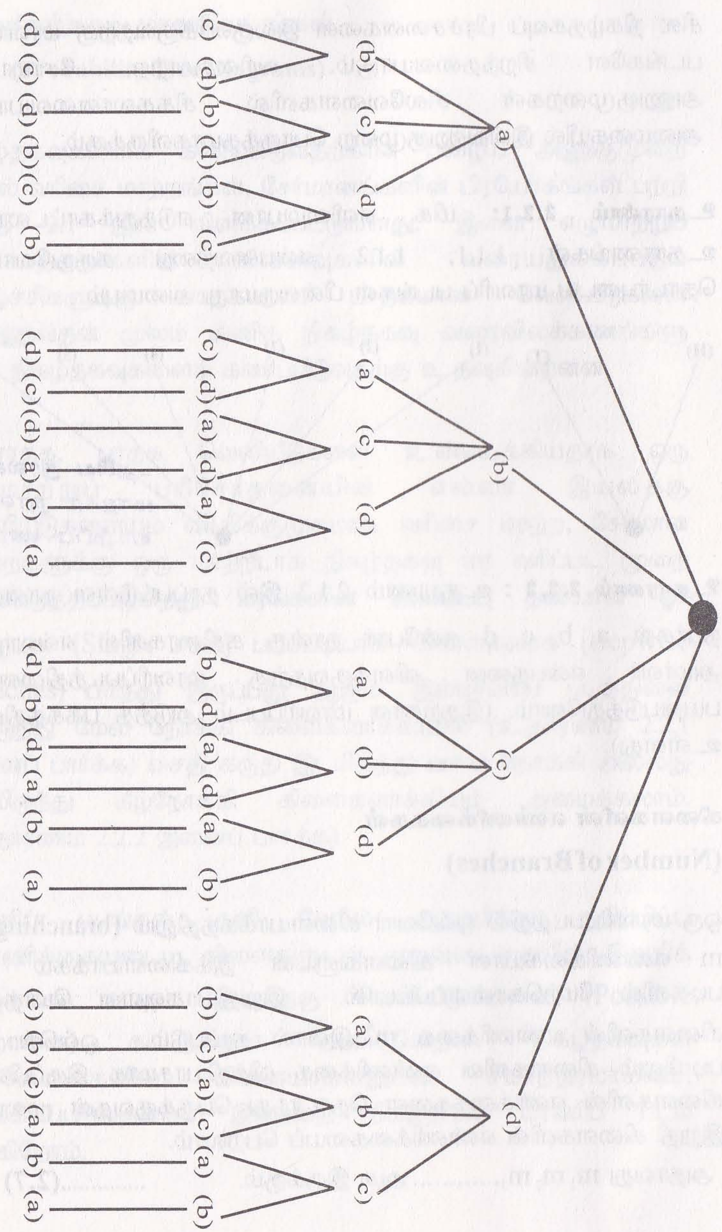
உதாரணம் 2.2.2 : உதாரணம் 2.1.2 இல் தரப்பட்டுள்ள நான்கு நபர்கள் a, b, c, d என்போர் நான்கு கதிரைகளில் எவ்வாறு அமர்வர் என்பதனை விளக்குவதற்கு மரவரிப்படத்தினைப் பயன்படுத்துவோம். (இதற்கான மரவரிப்படம் அடுத்த பக்கத்தில் உள்ளது).

கிளைகளின் எண்ணிக்கைகள்

(Number of Branches)

ஒரு மரவரிப்படத்தில் ஒவ்வோர் கிளையாக்கத்திலும் (branching) m எண்ணிக்கையான கிளைகளுடன் இக்கிளையாக்கம் n படிகளில் மேற்கொள்ளப்பட்டால் இறுதியாகவுள்ள மொத்த கிளைகளின் எண்ணிக்கை m^n இனால் தரப்படும். ஒவ்வொரு படியிலும் கிளைகளின் எண்ணிக்கை வித்தியாசமாக இருப்பின் கிளைகளின் எணிக்கைகளை தொடர்ந்து பெருக்குவதன் மூலம் இறுதி கிளைகளின் எண்ணிக்கையைப் பெறலாம்.

அதாவது $m_1 m_2 m_3$............ ஆக இருக்கும். ....**(2.7)**



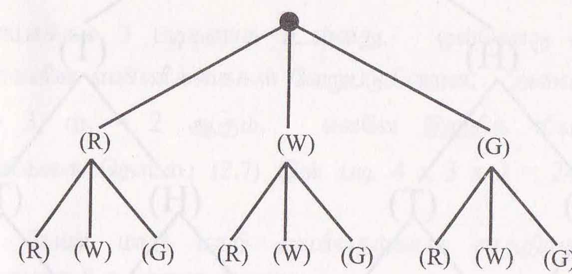
உதாரணம் 2.2.3: ஒரு பெட்டியில் சம எண்ணிக்கையுள்ள சிவப்பு (R), வெள்ளை (W), பச்சை (G) நிற பந்துகள் உள்ளன. பெட்டியில் இருந்து எழுமாறாக ஒரு பந்து தெரிவு செய்யப்படும் சூழலை கருதுக. இத்தெரிவு பிரதிவைப்புடன் மீண்டுமொருமுறை செய்யப்படுவதாக கொள்க.

(i) இயல்தகு வெளியீடுகளை விளக்குக.

(ii) இறுதியாக பச்சை நிறப் பந்து பெறப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு :

(i) கிளையாக்கத்தில் 3 கிளைகள் {R, W, G} என்பன உள்ளன. எனவே m=3 ஆகும். இரண்டு முறை மீள இத்தெரிவு செய்யப்படுவதனால் இரு படிகளில் கிளைகள் இருக்கும். எனவே n=2 ஆகும். ஆதலால் மொத்தமாக $m^n = 3^2 = 9$ இறுதிக்கிளைகள் இருக்கும். இதனை பின்வரும் மரவரிப்படம் தெளிவாக்குகின்றது.



(ii) இறுதியாக பச்சை நிற பந்துகள் கிடைப்பதற்கு மூன்று சந்தர்ப்பங்கள் மொத்தமாக உள்ள 9 வெளியீடுகளில் உள்ளன.

$$Pr(\text{இரண்டாம் முறை } G) = Pr(RG, WG, GG)$$

$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

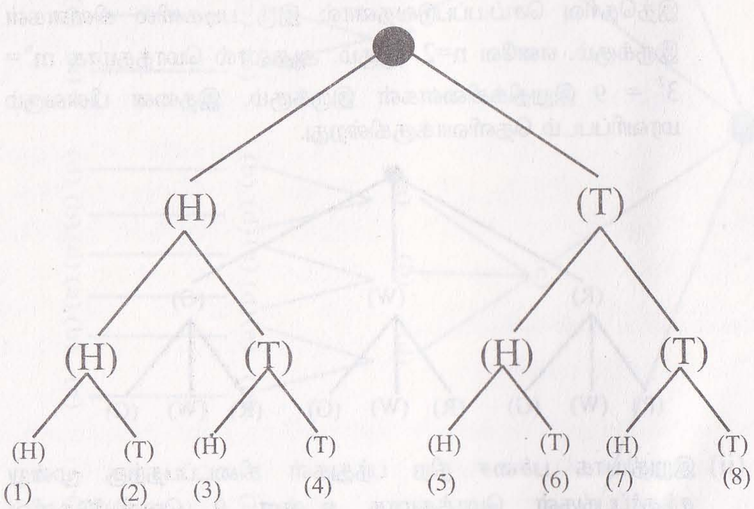
உதாரணம் 2.2.4 : ஒரு கோணலற்ற நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகின்றது. இப்பரிசோதனையின் வெளியீடுகளை விளக்குக. பின்வரும் நிகழ்தகவுகளையும் கணிப்பிடுக.

(i) மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் விழுதல்.

(ii) தலையும், பூவும் மாறி மாறி விழுதல்.

தீர்வு :

கிளையாக்கத்தில் 2 கிளைகள் $\{H, T\}$ என்பன உள்ளன. எனவே $m = 2$ ஆகும். மூன்று முறை நாணயம் சுண்டப்பட்டுள்ளதனால் மூன்று படிகளில் கிளையாக்கம் நடக்கும். எனவே $n = 3$ ஆகும். எனவே மொத்தமாக $m^n = 2^3 = 8$ வெளியீடுகள் உள்ளன. மரவரிப்படம் இதனை தெளிவாக்குகிறது.



கோணலற்ற நாணயமாதலால் தலை, பூ விழும் நிகழ்தகவுகள் சமமாகும். எனவே மேற்படி எட்டு இயல்தகு வெளியீடுகளும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(i) மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் விழுவதற்கான சந்தர்ப்பங்கள் மரவரிப்படத்தில் (2), (3), (5) என்பனவாகும்.

$$\therefore \text{Pr(இரண்டு H)} = \frac{3}{8}$$

(ii) தலையும், பூவும் மாறி மாறி விழும் சந்தர்ப்பங்கள் மரவரிப்படத்தில் (3), (6) என்பனவாகும்.

$$\therefore \quad Pr(HTH, THT) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 2.2.5: நான்கு நபர்கள் a,b,c,d என்போர் கதிரையில் அமரும் பிரச்சனைக்கான மரவரிப்படம் உதாரணம் 2.2.2 இல் தரப்பட்டுள்ளது. a, b என்போர் ஆண்களையும் c,d என்போர் பெண்களையும் குறிக்குமாயின் ஆண், பெண் மாறி மாறி அமர்ந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு:

கிளையாக்கம் 3 படிகளாக உள்ளது. ஒவ்வொரு படியிலும் கிளைகளின் எண்ணிக்கைகள் வேறுபடுகின்றன. அவை $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$ ஆகும். எனவே இறுதிக் கிளைகளின் எண்ணிக்கை தொடர்பு (2.7) இன் படி $4 \times 3 \times 2 = 24$ ஆகும்.

ஆண் பெண் மாறி மாறி அமர்வதற்கான சாத்தியக்கூறுகள் மொத்தமாக 8 உள்ளன. அவை

acbd	adbc	bcad	bdac
cadb	cbda	dacb	dbca

என்பனவாகும். எனவே தொடர்புடைய நிகழ்தகவு

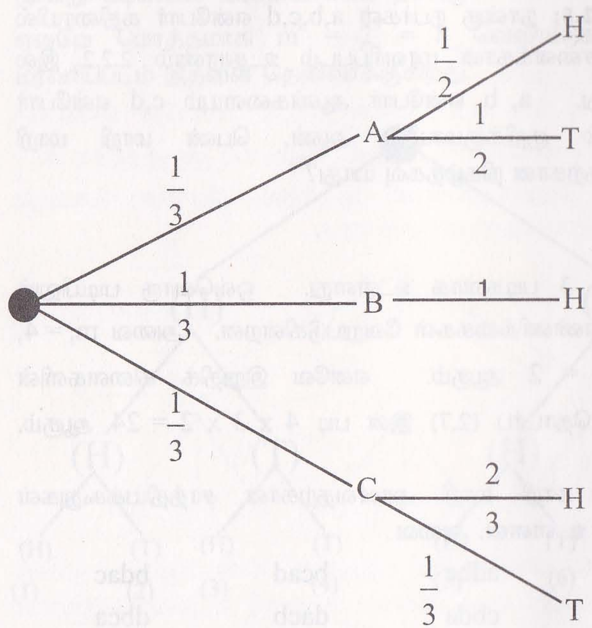
$$\text{Pr (ஆண் பெண் மாறிமாறி அமர்தல்)} = \frac{8}{24}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 2.2.6 : ஒரு பெட்டியில் மூன்று நாணயங்கள் உள்ளன. அவற்றில் ஒன்று (A) கோணலற்றதும், இன்னொன்று (B) இருதலைகளுடனும், மற்றையது (C) தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவு $^2/_3$ ஆகுமாறு கோணலுற்றும் உள்ளன. ஒரு நாணயம் பெட்டியிலிருந்து எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்டு சுண்டப்பட்டது. தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவுகளை விபரிக்குக.

தீர்வு :

இப்பரிசோதனைக்கான மரவரிப்படம் நிகழ்தகவுகளுடன் பின்வருமாறு காட்டப்படும்.



நாணயம் தெரிவு செய்யப்படுவது முதல் நிகழ்வு ஆகும். இங்கு,

$$Pr(A)=\frac{1}{3}, \quad Pr(B)=\frac{1}{3}, \quad Pr(C)=\frac{1}{3}$$

ஆகும். தொடர்ந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட நாணயம் சுண்டப்படுவதனால் இறுதி வெளியீடுகள் இரு செயற்பாடுகளையும் கொண்டு பின்வரும் தொடை மூலம் காட்டப்படும். அதாவது

$$\{AH, AT, BH, CH, CT\}$$

இங்கு தலை விழும் நிகழ்தகவை விளக்குவதற்கு நாணயத் தெரிவு நிபந்தனையாக உள்ளது.

A தெரிவு செய்யப்படின் $Pr(H)=\frac{1}{2}$

B தெரிவு செய்யப்படின் $Pr(H)=1$

C தெரிவு செய்யப்படின் $Pr(H)=\frac{2}{3}$

உதாரணம் 2.2.7: ஒரு நிறுவனத்தின் உற்பத்திப் பொருள் சோதனைக்காக சந்தைப்படுத்தப்படுகையில் 40% வெற்றி வாய்ப்பையும் (A), 50% சுமாரான வெற்றி வாய்ப்பையும் (B), அல்லாவிடில் தோல்வியையும் (C) கொடுப்பதாக அமைந்தது. வெற்றி வாய்ப்பை அடைகையில் உற்பத்தியை அதிகரிக்கலாம்(P) அல்லது மாறாமல் வைத்திருக்கலாம்(Q). இதற்கு 50% சந்தர்ப்பங்கள் சமமாக உள்ளன. சுமாரான வெற்றி வாய்ப்பை அடைகையில் உற்பத்தியை மாறாமல் வைத்திருக்க 60% சந்தர்ப்பமும், உற்பத்தியைக் குறைப்பதற்கு (R) மீதி சந்தர்ப்பமும் உண்டு. தோல்வியடைந்தால் உற்பத்தியைக் குறைப்பது முடிவாகும். இப் பிரச்சனைக்கான நிகழ்தகவு மரவரிப்படத்தை அமைக்குக.

தீர்வு :

முதல் கட்ட சந்தைப்படுத்தல் விளைவு நிகழ்ச்சிகள் :

A - வெற்றி வாய்ப்பு

B - சுமாரான வெற்றி வாய்ப்பு

C - தோல்வி

இரண்டாம் கட்ட பதில் நடவடிக்கை நிகழ்ச்சிகள் :

P - உற்பத்தியை அதிகரித்தல்

Q - உற்பத்தியை மாறாமல் வைத்திருத்தல்

R - உற்பத்தியை குறைத்தல்

தரவுகளின் படி

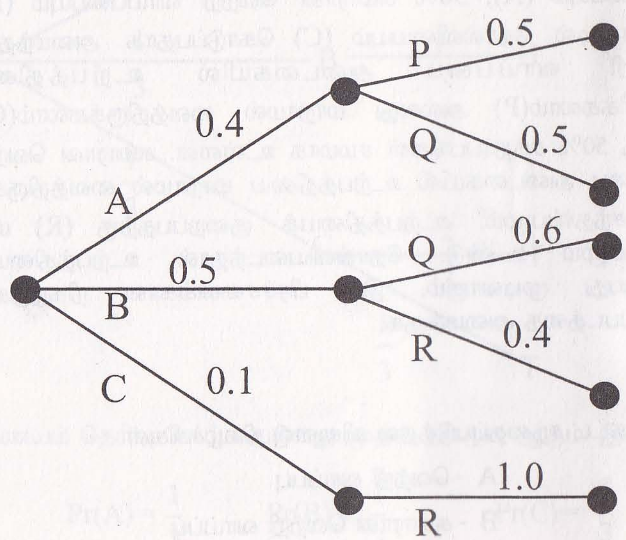
$Pr(A) = 0.4$, $Pr(B) = 0.5$, $Pr(C) = 0.1$

A தரப்பட ; $Pr(P) = 0.5$
$Pr(Q) = 0.5$

B தரப்பட ; $Pr(Q) = 0.6$
$Pr(R) = 0.4$

C தரப்பட ; $Pr(R) = 1.0$ ஆகும்.

எனவே நிகழ்தகவு மரவரிப்படத்தை பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.



2.3 தொடர்பு மீடிறன் அணுகுமுறை (Relative Frequency Approach)

அத்தியாயம் ஒன்றில் விபரிக்கப்பட்ட கணித நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணத்தில், ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் ஒரேமாதிரியான இயல்தகவு வெளியீடுகளில் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு சாதகமான வெளியீடுகளை எண்ணுவதன் மூலம் வரையறுக் கப்பட்டது. எழுமாற்றுப் பரிசோதனையொன்றில் வித்தியாசமான வெளியீடுகளுக்கான புதிய அணுகுமுறைகள் அடுத்துவரும் அத்தியாயம் மூன்றில் விபரிக்கப்படுகின்றன.

இவ்வத்தியாயம் இரண்டின் முதலிரு பகுதிகளிலும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு சாதகமான தனித்தனியான வெளியீடுகளை எண்ணுவதும், மொத்த வெளியீடுகளை தொகுப்பதும் அவற்றின் மூலம் நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பதும் இரு வெவ்வேறு வழிகளில் விபரிக்கப்பட்டுள்ளன. நடைமுறையில் சில வெளியீடுகள் ஒரே மாதிரியானவையாகவும், வேறு சில ஒரேமாதிரியானவையாகவும், இவ்வாறே மீதி வெளியீடுகள் அமைவதையும் காணலாம். எனவே மேலே 2.1, 2.2 இல் விபரிக்கப்பட்ட அணுகுமுறைகளைவிட பிறிதொரு அணுகுமுறை அவசியமாகின்றது.

இவ்வாறான சூழலுக்கான அனுபவத்துக்குரிய அணுகுமுறை யாகிய தொடர்பு மீடிறன் அணுகுமுறை இங்கு விபரிக்கப் படுகின்றது. வித்தியாச மான வெளியீடுகளில் தனித்துவமானவை அடையாளம் காணப்பட்டால் அவற்றின் மீள் வெளியீடுகள் மீடிறன்கள் மூலம் தொகுக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பல் ஒன்று பொருத்தமாக அமைக்கப்படலாம். இங்கு புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணமும் தொடர்புடைய கணிப்பீடுகளும் பொருத்த மாக உள்ளன அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன்கள் நியம எண்ணுக்கு தொடர்பு மீடிறன்களாக மாற்றப்படுவது இங்கு கருத்தில் கொள்ளப்படுகின்றது. இம்மாற்றீடு சதவீதத்துக்கும் அமைவ

துண்டு. சதவீதத்திற்கான தொடர்பு மீடிறன்களை நேரடியாக நிகழ்தகவுகளாக மாற்றலாம்.

மீடிறன் பரம்பல்களை அமைத்தல், பகுப்பாய்வு செய்தல் போன்ற விடயங்கள் இந்நூலாசிரியரின் முதல் வெளியீட்டில் (இளங்குமரன், 1998) விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் எனும் நூலில் விளக்கப்படுகின்றன. ஒரு மீடிறன் பரம்பலுக்கு எவ்வாறு தொடர்பு மீடிறன் பரம்பலை அமைக்கலாம் என்பது பற்றி அங்கு அலகு 2.3 இல் விபரிக்கப்பட்டுள்ளது. இத் தொடர்பு மீடிறன்கள் மூலம் நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடலாம்.

உதாரணம் 2.3.1 : ஒரு தொழிற்சாலையின் சந்தை முகாமையாளன் ஒரு பொருளின் விற்பனை வடிவம் பற்றி ஆராய விரும்பினார். கடந்த வாரத்தின் 100 விற்பனைகள் பற்றிய விபரங்களைத் திரட்டிய போது பின்வரும் விபரங்கள் பெறப்பட்டன. (முதல் இரண்டு நிரல்கள்)

விற்பனைத் தொகை (அலகுகள்) நிகழ்ச்சிகள்	விற்பனைகளின் எண்ணிக்கை மீடிறன்	தொடர்பு மீடிறன் (%) நிகழ்தகவு
1	4	0.04
2	6	0.06
3	25	0.25
4	35	0.35
5	19	0.19
6	11	0.11
மொத்தம்	100	1.00

விகிதாசாரத்துக்கான தொடர்பு மீடிறனூடான நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளை மூன்றாம் நிரல் தருகின்றது. அதாவது,

உதாரணமாக

$$\Pr(\text{விற்பனைத் தொகை } 4) = 0.35,$$

$$\Pr(\text{விற்பனைத் தொகை 3 இலும் குறைவு}) = 0.10 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 2.3.2 : ஒரு கம்பனியின் ஆளணி முகாமையாளர் தனது கம்பனியில் பணியாற்றும் 200 ஊழியர்கள் பற்றி சேகரித்த தகவல்களை பின்வரும் அட்டவணை தருகின்றது.

வயது	மாத ஊதியம் ரூபா 10000 இலும் குறைவு	ரூபா 10000 - ரூபா 20000 இடையில்	ரூபா 20000 இலும் கூட
30 இலும் குறைவு	30	10	10
30 - 40 இடையில்	25	25	20
40 - 50 இடையில்	10	30	10
50 இலும் கூட	10	10	10

கம்பனியிலிருந்து எழுமாறாகத் தெரிவு செய்யப்பட்ட ஊழியர் ஒருவர் தொடர்பான பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) 40 வயதிலும் குறைந்தவர்
(ii) ரூபா 10000 இலும் கூடிய ஊதியம் பெறுபவர்
(iii) 30 வயதிற்கு மேற்பட்ட ரூபா 20000 இலும் அதிக ஊதியம் பெறுபவர்

தீர்வு :

வயது, ஊதியம் எனும் இரு காரணிகள் அடிப்படையில் 200 ஊழியர்களும் (200 எழுமாற்று வெளியீடுகள்) இரு வழி மீடிறன் (Two-way frequency table) அட்டவணை மூலம் தொகுக்கப்பட்டுள்ளனர். இவ்விருவழி மீடிறன் பரம்பலைப்

பயன்படுத்தி மேற்படி கேட்கப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளுக்கான தொடர்பு மீடிறன்களைக் கணிப்பதன் மூலம் நிகழ்தகவுகளை விளக்கலாம்.

வயது	ஊதியம் <10000	ஊதியம் 10000-20000	ஊதியம் > 20000	மொத்தம்
< 30	30	10	10	50
30 - 40	25	25	20	70
40 - 50	10	30	10	50
50<	10	10	10	30
மொத்தம்	75	75	50	200

(i) $\Pr(\text{வயது} < 40) = \dfrac{50+70}{200} = 0.60$

(ii) $\Pr(\text{ஊதியம்} > \text{ரூபா } 10000) = \dfrac{75+50}{200} = 0.625$

(iii) $\Pr(\text{வயது} > 30 \text{ உம் ஊதியம்} > 20000 \text{ உம்})$

$$= \frac{20+10+10}{200} = 0.20$$

மேற்படி இருவழி மீடிறன் பரம்பலை நேரடியாக விகிதாசாரத்துக்கான தொடர்பு மீடிறன் பரம்பலாக மாற்றினால் கணிப்பீடுகள் மேலும் இலகுவாக்கப்படும்.

Chapter 3

Modern Approaches

At the end of this Chapter you will be able to

(1) Define various "Types of events"

(2) Define "Probability Space"

(3) Define "Combined Events" and calculate their probabilities

(4) Apply "Additive Probability Law"

(5) Apply other "Elementary Probability Laws"

3. புதிய அணுகுமுறைகள்
Modern Approaches

3.1 : நிகழ்தகவு வெளிகள் (Probability Spaces)

பழைய அணுகுமுறை நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளில் இயல்தகு வெளியீடுகள் யாவும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கின்றன என எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டன. இவ்வாறு இருக்கையில் வரிசைமாற்றம், சேர்மானம், நிகழ்தகவு மரவரிப்படம் போன்றனவற்றை பயன்படுத்துவது இலகுவானதாகும். இவ்வெடுகோள் ஆனது எப்பொழுதும் பொருத்தமாக இருக்காது.

வித்தியாசமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் (Unequal Elementary Events)

எழுமாற்றுப் பரிசோதனையொன்றின் இயல்தகு வெளியீடு கள் ஒவ்வொன்றும் நிகழ்வதற்கு வெவ்வேறு வாய்ப்புகள் அல்லது வித்தியாசமான நிகழ்தகவுகள் இருக்குமாயின் அவை வித்தியாசமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

இயல்தகு வெளியீடுகள் வித்தியாசமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாக இருக்கையில் மேற்படி பழைய அணுகுமுறைகளை நேரடியாகப் பயன்படுத்த முடியாது. அத்துடன் பகுதி 1.2 இல் தரப்பட்ட நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணங்களும் பொருத்தமற்றவையாகி விடுகின்றன. எனவே ஒரு பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட அணுகுமுறை அவசியமாகின்றது. புதிய அணுகுமுறைகள் மேற்படி குறை பாடுகளை பூர்த்தி செய்கின்றன.

மாதிரி விவரண வெளி (Sample Description Space)

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் எல்லா இயல்தகு வெளியீடுகளையும் கொண்டு வரையறுக்கப்படும் ஒரு அகிலத்தொடை (Universal Set) அப்பரிசோதனையின் மாதிரி விவரண வெளி என வரையறுக்கப்படும். இது $\mathbf{S}$ இனால் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 3.1.1. : மேலே தரப்பட்ட சில உதாரணங்களில் தொடர்புடைய மாதிரி விவரண வெளிகளை அமைப்போம்.

(1) உதாரணம் 1.1.1 இற்கு $\mathbb{S}_1 = \{H, T\}$

(2) உதாரணம் 1.1.2 இற்கு $\mathbb{S}_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(3) உதாரணம் 2.1.6 இற்கு $\mathbb{S}_4 = \{abc, bcd, cda, dab\}$

(4) உதாரணம் 2.2.2 இற்கு $\mathbb{S}_3 = \{abcd, abdc, \ldots, dcba\}$

மேற்படி உதாரணங்களில் காட்டப்பட்ட மாதிரி விவரண வெளிகளில் உள்ள இயல்தகு வெளியீடுகள் யாவும் தனித்துவ மானவை (Unique) ஆகும். அத்துடன் மேற்படி நான்கு உதாரணங் களிலும் எல்லா வெளியீடுகளும் (ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளும்) ஒரேமாதிரி யானவையும், தம்முள் புற நீக்கலானவை (Mutually Exclusive) யும் ஆகும்.

இவ்வாறான பிரச்சினைகளில் பகுதி 1.2 இல் வரையறுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணம் பொருத்தமானதாகும். இதற்கான கோட்பாடுகள் கீழே தரப்படுகின்றன.

$\mathbb{S} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ என்றவாறிருந்தால்

$Pr(w_1) = Pr(w_2) = \cdots = Pr(w_n)$ ஆகும்.

அதாவது

$$Pr(w_i) = \left(\frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.1)}$$

அத்துடன்

$$\sum_i Pr(W_i) = n\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3.2)}$$

தனித்துவமில்லாத (Non-unique) இயல்தகு வெளியீடுகளைக் கொண்ட மாதிரி விவரண வெளிகளும் உள்ளன.

உதாரணம் 3.1.2 : பகுதி 2.1 இல் தரப்பட்டுள்ள உதாரணம் 2.1.7 இனை கருதுவோமாயின் பெட்டியிலுள்ள பந்துகள் பின்வருமாறு இருக்கும்.

R	R	R	R	R	W	W	W	W	W	W	G	G	G	G
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4

மூன்று பந்துகள் தெரிவு செய்யப்பட்டுள்ளன. உதாரணம் 2.1.7 இல் கூறப்பட்ட 455 தெரிவுகளும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில் பந்து இலக்கம் அங்கு முக்கியத்துவம் பெறவில்லை. மேலே காட்டப்பட்டவாறு பெட்டியிலுள்ள ஒவ்வொரு பந்துக்கும் முக்கியத்துவம் கொடுப்போமாயின் மாதிரி விவரண வெளி பின்வருமாறு அமையும்.

$$\mathbb{S} = \{R_1R_2R_3,\ R_1R_2R_4, \ldots\ldots\ldots G_2G_3G_4\}$$

இதில் உள்ள வெளியீடுகள் யாவும் தனித்துவமானவை யாகும். அத்துடன் பெட்டியில் வெவ்வேறு எண்ணிக்கையில் R,W,G நிற பந்துகள் இருப்பதனால் இவை யாவும் வித்தியாசமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

மேலும் பெட்டியிலுள்ள ஒவ்வொரு பந்துக்கும் முக்கியத்துவம் கொடுக்காமல் நிறத்துக்கு மட்டும் முக்கியத்துவம் கொடுப்போமாயின் மாதிரி விவரண வெளி பின்வருமாறு அமையும்.

$\mathbb{S}$ = {RRR, RRW, RRG, RWR, RWW, RWG,
RGR, RGW, RGG, WRR, WRW, WRG,
WWR, WWW, WWG, WGR, WGW, WGG,
GRR, GRW, GRG, GWR, GWW, GWG,
GGR, GGW, GGG}

இதில் உள்ள 27 வெளியீடுகளும் தனித்துவமானவை அல்ல. ஏனெனில் ஒவ்வொரு R உம் 5 வெவ்வேறு பந்துகளால் பிரதிவைப்புச் செய்யப்படலாம். இதே போல் W, 6 வெவ்வேறு

பந்துகளாலும் அத்துடன் G, 4 வெவ்வேறு பந்துகளிலும் மீள்தெரிவுக்கு உட்படலாம். அத்துடன் இவை வித்தியாசமான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளும் ஆகும்.

■ இவ்வாறான பிரச்சினைகளில் பகுதி 1.2 இல் வரையறுக் கப்பட்ட நிகழ்தகவு வரைவிலக்கணம் பொருத்தமற்றதாகும். இதற்கான கோட்பாடுகள் கீழே தரப்படுகின்றன.

$\mathbb{S} = \{w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n\}$ என்றவாறிருந்தால்

$Pr(w_1) \neq Pr(w_2) \neq \ldots\ldots\ldots\ldots \neq Pr(w_n)$ ஆகும்.

அதாவது $Pr(w_i) = p_i$ .... (3.3)

ஆகும். அத்துடன்

$$\sum_i Pr(w_i) = \sum_i p_i = 1 \qquad \ldots\ldots (3.4)$$

ஆகும். எனவே ஒரு நிகழ்ச்சி A = $\{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_r\}$ என தரப்பட்டால்

$$Pr(A) = \sum_i Pr(w_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i \qquad \ldots\ldots (3.5)$$

உதாரணம் 3.1.3 : உதாரணம் 2.1.9 இனைக் கருதுக. இதில் நிறத்தை மட்டும் கருத்தில் கொண்டால் மாதிரி விவரணவெளி பின்வருமாறு அமையும்.

$$\mathbb{S} = \{WW, WB, BW, BB\}$$

இவ்வெளியீடுகள் நான்கும் வித்தியாசமானவையும் தம்முள் புறநீக்கலானவையுமாகும்.

WR முறையில்

$$P(WW) = \frac{16}{49}, \quad P(WB) = \frac{12}{49}, \quad P(BW) = \frac{12}{49},$$

$$P(BB) = \frac{9}{49} \text{ ஆகும்.}$$

$$\sum_i Pr(w_i) = P(WW) + P(WB) + P(BW) + P(BB)$$

$$= \frac{16}{49} + \frac{12}{49} + \frac{12}{49} + \frac{9}{49}$$

$$= 1$$

WOR முறையில்

$$P(WW) = \frac{12}{42}, \ P(WB) = \frac{12}{42}, \ P(BW) = \frac{12}{42},$$

$$P(BB) = \frac{6}{42} \text{ ஆகும்.}$$

$$\sum_i Pr(w_i) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} + \frac{12}{42} + \frac{6}{42} = 1$$

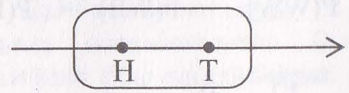
இரு வழிகளிலும் (3.3) உடன் தொடர்பு (3.4) திருப்தியாக்கப் படுகின்றது.

மாதிரி விவரண வெளியினை வரைபில் காட்டுதல்
(Sample Description Space in Graph)

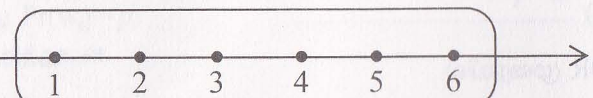
எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளின் மாதிரி விவரண வெளி யினை $\mathbb{S}$ எனும் அகிலத் தொடை மூலம் குறித்துக்காட்டு கின்றோம். சில பிரச்சினைகளில் $\mathbb{S}$ இலிருந்து நேரடியாக நிகழ்ச்சிகளை வரைய றுத்தலும், சாத்தியமான வெளியீடுகளை எண்ணுதலும் சிக்க லானதாக இருப்பதை காணலாம். இதனை வரைபுகள் இலகு வாக்குகின்றன.

உதாரணம் 3.1.4: ஒரு பரிமாண வரைபுகள் சில பின்வருமாறு

(1) உதாரணம் 1.1.1, 3.1.1 இல் $\mathbb{S} = \{H, T\}$ ஆகும். இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.

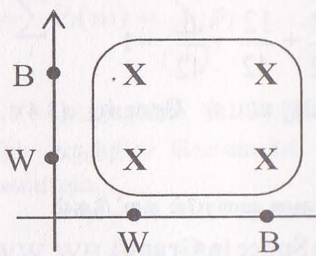


(2) உதாரணம் 1.1.2, 3.1.1 இல் $\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ஆகும். இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.

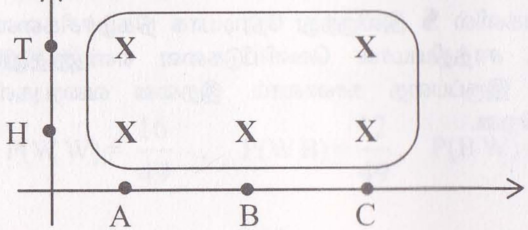


இருபரிமாண வரைபுகள் சில பின்வருமாறு :

(3) உதாரணம் 2.1.9, 3.1.3 இல் $\mathbb{S} = \{WW, WB, BW, BB\}$ ஆகும். இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



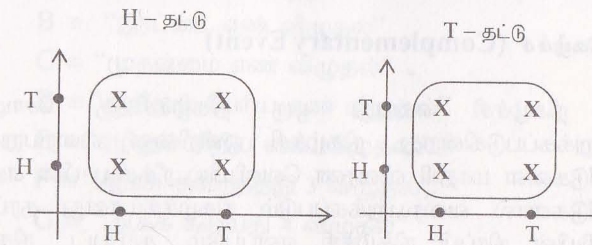
(4) உதாரணம் 2.2.6 இல் $\mathbb{S} = \{AH, AT, BH, CH, CT\}$ ஆகும். இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



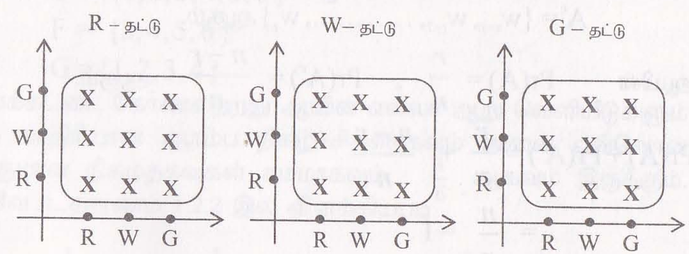
முப்பரிமாண வரைபுகள் சில பின்வருமாறு :

(5) உதாரணம் 2.2.4 இல்

$\mathbb{S} = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ ஆகும். இதன் வரைபு இரு தட்டுக்களாக (Layers) பின்வருமாறு அமையும்.



(6) உதாரணம் 2.2.3 இனைக் கருதுக. பந்துகளின் தெரிவு மூன்று முறை நடைபெற்றதாகக் கொள்க. இதன் மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S} = \{RRR, \ldots\ldots\ldots\ldots, GGG\}$ என்பது மொத்தமாக $3^3 = 27$ வெளியீடுகளைக் கொண்டிருக்கும். இப்பிரச்சினையில் வரையறுக் கப்படும் நிகழ்ச்சிகளின் புள்ளிகளைக் கணக்கிடுதலை $\mathbb{S}$ இலகுவாக்கவில்லை, ஆனால் பின்வரும் வரைபு இதனை இலகுவாக்கும்.



நிகழ்ச்சி (Event)

பகுதி 1.2 இல் கூறப்பட்ட வரைவிலக்கணத்தை மேலும் தெளிவாக விபரிப்போம். எழுமாற்றுப் பரிசோதனை யொன்றில்

வரையறுக்கப்படும் மாதிரி விவரண வெளியில் உள்ள எல்லா இயல்தகு வெளியீடுகளும் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகும். நிகழ்ச்சி என்பது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இயல்தகு வெளியீடுகளினால் கருத்துடன் வரையறுக்கப்படும் ஒரு உப தொடை (Subset) ஆகும். இவ்வுபதொடைகளை பொருத்தமாக கருத்துடன் அமைப்பதற்கு வரைபுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

நிரப்பி நிகழ்ச்சி (Complementary Event)

நிரப்பி நிகழ்ச்சி என்பது ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு சோடியாக வரையறுக்கப்படுகின்றது. நிகழ்ச்சி ஒன்றினை வரையறுக்கும் வெளியீடுகளை மாதிரி விவரண வெளியில் நீக்கிய பின் எஞ்சிய வெளியீடுகளால் வரையறுக்கப்படும் நிகழ்ச்சியானது தரப்பட்ட நிகழ்ச்சியின் நிரப்பி நிகழ்ச்சி எனப்படும். தரப்பட்ட நிகழ்ச்சி விவரண வெளியாகிய அகிலத் தொடையின் ஓர் உபதொடையாயின் அதன் நிரப்பி நிகழ்ச்சி அவ்வுப தொடையின் நிரப்பி தொடை (Complementary Set) ஆகும்.

$\mathbb{S} = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ என்க.

$A = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ $r<n$; என்றவாறு நிகழ்ச்சி A வரையறுக்கப்படின் A இன் நிரப்பி நிகழ்ச்சி

$A^c = \{w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots\ldots\ldots, w_n\}$ ஆகும்.

ஆயின் $Pr(A) = \dfrac{r}{n}$, $Pr(A^c) = \dfrac{n-r}{n}$ ஆகும்.

$$Pr(A) + Pr(A^c) = \frac{r}{n} + \frac{n-r}{n}$$

$$= \frac{n}{n} = 1$$

எனவே $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$ ....(3.6)

நிகழ்ச்சி A யினுடைய கருத்துக்கு எதிர்மறையான கருத்தினை நிகழ்ச்சி A^c பிரதிபலிக்கும்.

உதாரணம் 3.1.5 : உதாரணம் 1.1.2 இல் தரப்பட்டுள்ள தாயக்கட்டை உருட்டற் பரிசோதனையை கருதுக.

இதன் மாதிரி விவரண வெளி ; $\mathbb{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$ ஆகும்

பின்வருவன நிகழ்ச்சிகளாக வரையறுக்கப்படலாம்.

A ≡ "ஒற்றை எண் விழுதல்"
B ≡ "இரட்டை எண் விழுதல்"
C ≡ "முதன்மை எண் விழுதல்"
D ≡ "ஆறிலும் பெரிய எண் விழுதல்"
E ≡ "ஏழிலும் சிறிய எண் விழுதல்"
F ≡ "ஆகக் குறைந்தது 3 விழுதல்"
G ≡ "ஆகக் கூடியது 4 விழுதல்"

இவற்றை தொடைக் குறியீடுகளில் பொருத்தமான இயல்தகு வெளியீடுகளுடன் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$A = \{1,3,5\}$
$B = \{2,4,6\}$
$C = \{2,3,5\}$
$D = \{\} = \phi$
$E = \{1,2,3,4,5,6\} = \mathbb{S}$
$F = \{3,4,5,6\}$
$G = \{1,2,3,4\}$

தாயக்கட்டை கோணலற்றது ஆயின் எல்லா ஆறு வெளியீடுகளும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாகவும் அவை ஒவ்வொன்றுக்குமான நிகழ்தகவுகள் சமமாகவும் $\frac{1}{6}$ ஆகவும் இருக்கும். எனவே உதாரணம் 1.2.2 இல் விளக்கியபடி

$Pr(A) = \dfrac{1}{2}$, $Pr(B) = \dfrac{1}{2}$ ஆகும்.

தாயக்கட்டை கோணலுள்ளது ஆகவும், ஒரு எண் விழுவதற்கான வாய்ப்பு அவ்வெண்ணுக்கு நேர் விகித சமமாகுமாறு அக்கோணல் உள்ளதாகவும் கொள்வோம்.

ஆயின் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ஆறும் வித்தியாசமானவையாக அமையும். ஏனெனில் இலக்கம் i விழும் நிகழ்தகவு $Pr(i) \propto i$ ஆகும்.

k ஒரு மாறிலி ஆயின் $Pr(i)=ki$ ஆகும்.

$\sum_i Pr(i)=1$ ஆதலால் $\sum_i k\,i=1$ ஆகும்.

அதாவது $k(1+2+3+4+5+6)=1$

$$21k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{21}$$

$$\therefore Pr(1)=\frac{1}{21},\ Pr(2)=\frac{2}{21},\ \ldots\ldots\ldots,Pr(6)=\frac{6}{21}$$

தொடர்பு (3.5) இனை இப்போது பயன்படுத்தி மேலே தரப்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளை கணிப்பிடலாம்.

$$Pr(A)=Pr(1)+Pr(3)+Pr(5)$$

$$=\frac{1}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{9}{21}$$

இதே போல் $Pr(B)=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{12}{21}$

$$Pr(C)=\frac{2}{21}+\frac{3}{21}+\frac{5}{21}=\frac{10}{21}$$

Pr(B) இனைத் தொடர்பு (3.6) இனை பயன்படுத்தி பின்வருமாறும் கணிக்கலாம்.

$$Pr(B)=1-Pr(A)$$

$$=1-\frac{9}{21}=\frac{12}{21}$$

ஏனெனில் A, B என்பன ஒன்றையொன்று நிரப்பும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

A இன் நிரப்பி A^c என்பதனால் குறிக்கப்படும்.

$A^c=\{$ஒற்றை எண்கள்$\}^c$

$=\{$ இரட்டை எண்கள்$\}$

$=B$

மேலும் $F^C=\{1, 2\}$, $G^c=\{5\ ,\ 6\}$என்பன முறையே "ஆகக் கூடியது 2 விழுதல்", " ஆகக் குறைந்தது 5 விழுதல்" எனும் F, G இன் நிரப்பி நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\therefore Pr(F)=1-Pr(F^C)=1-\frac{1}{21}-\frac{2}{21}=\frac{18}{21}$$

$$Pr(G)=1-Pr(G^C)=1-\frac{5}{21}-\frac{6}{21}=\frac{10}{21}$$

D ஒரு நடக்கமுடியாத (பாதகமான) நிகழ்ச்சியாகும். E ஒரு நிச்சயமான (சாதகமான) நிகழ்ச்சியாகும்.

$Pr(D)=Pr(\phi)=0$

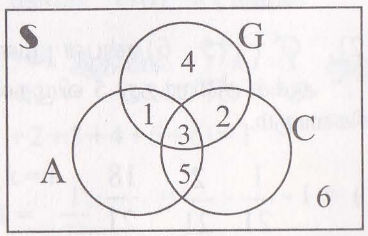
$Pr(E)=Pr(\mathbb{S})=1$

வென்வரிப் படம் (Venn Diagram)

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் இயல்தகு வெளியீடுகள் யாவற்றையும் மாதிரி விவரண வெளியால் விளக்குகிறோம். இதனை ஓர் அகிலத் தொடையினால் அல்லது வரைபு மூலம் குறிப்பிடலாம் என மேலே விளக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் இவை இரண்டையும் ஒன்றாக கருதுவதன் மூலம் ஒரு பெட்டி வடிவ வென்வரிப்படம் மூலமும் மாதிரி விவரண வெளியினைக் குறிப்பிடலாம்.

அத்துடன் நிகழ்ச்சிகளை தொடைப் பிரிவுகள் மூலம் வரையறுப்பதுடன் பொருத்தமான புள்ளிகளை இணைத்து வட்டவடிவ, நீள்வளைய வடிவங்களிலும் அந்நிகழ்ச்சிகளைக் குறிப்பிடலாம்.

உதாரணம் 3.1.6 : மேலேயுள்ள உதாரணம் 3.1.5 இலுள்ள பரிசோதனையினை வென் வரிப்படம் மூலம் காட்டுக. அதில் நிகழ்ச்சிகள் A, C, G என்பனவற்றைக் குறித்துக் காட்டுக.



நிகழ்ச்சி வெளி (Space of Events)

மாதிரி விவரண வெளியொன்றில் வரையறுக்கப்படக் கூடிய எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் கொண்ட அகிலத்தொடை நிகழ்ச்சிகளின் வெளி எனப்படும். அதாவது மாதிரி விவரண வெளியின் வலுத்தொடை நிகழ்ச்சி வெளி ஆகும். அதாவது $\mathbf{W} = \wp(\mathbb{S})$

உதாரணம் 3.1.7 : கோடலற்ற நான்முகியொன்று உருட்டப்படும் பரிசோதனையினை கருதுக. இவ்வெழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி விவரண வெளியினையும், நிகழ்ச்சிகளின் வெளியினையும் தருக.

தீர்வு :

நான்முகியில் 1, 2, 3, 4 என்ற இலக்கங்கள் குறிக்கப்பட்டிருந்தால் இப்பரிசோதனையின் மாதிரி விவரண வெளி பின்வருமாறு அமையும்.

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4\}$$

இம்மாதிரி விவரண வெளியில் வரையறுக்கப்படக்கூடிய சாத்தியமான நிகழ்ச்சிகள் பின்வருமாறு ;

தனி வெளியீடுகளாலமையும் ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகள் ;

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\} \text{ என்பனவாகும்.}$$

இரு வெளியீடுகளாலமையும் நிகழ்ச்சிகள் ;

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \text{ என்பனவாகும்.}$$

மூன்று வெளியீடுனாலமையும் நிகழ்ச்சிகள் ;

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\} \text{ என்பனவாகும்.}$$

எனவே நிகழ்ச்சி வெளி ;

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \{ & \phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \\ & \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \\ & \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \mathbb{S} \}. \end{aligned}$$

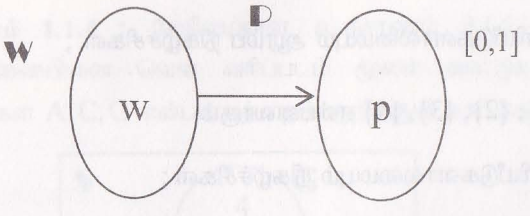
என்பதனால் தரப்படும்.

நிகழ்தகவு வெளி (Probability Space)

ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S}$ உம், அதில் வரையறுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி வெளி $\mathbf{W}$ உம், அதில் வரையறுக்கப்படும் நிகழ்தகவு அளவை (Probability measure) $\mathbb{P}$ உம் என்போம். ஆயின்

(i) $\mathbb{P}(\phi) = 0$
(ii) $0 \leq \mathbb{P}(w) \leq 1, \forall w \in \mathbf{W}$
(iii) $\mathbb{P}(\mathbb{S}) = 1$

எனும் நிபந்தனைகளை $(\mathbb{S}, \mathbf{W}, \mathbb{P})$ எனும் மும்மை (triplet) திருப்தியாக்குமாயின் அம்மும்மை ஒரு நிகழ்தகவு வெளியினை வரையறுப்பதாகக் கொள்ளப்படும்.



நிகழ்ச்சி w, நிகழ்ச்சி வெளி $\mathbb{W}$ இலிருக்கையில் அதில் (ஆட்சியில்) வரையறுக்கப்படும் படமாக்கல் (சார்பு) ஆகிய நிகழ்தகவு அளவை $\mathbb{P}$ ஆனது p எனும் விம்பத்தை (சார்புப் பெறுமானம்) உருவாக்கினால்

$$p = \mathbb{P}(w)$$

ஆகும். இங்கு p இன் பெறுமானங்களைக் கொண்ட இணை ஆட்சி முடிய தொடர்ச்சி மெய்யெண் பெறுமான ஆயிடை $[0,1]$ இல் இருக்கும்.

அதாவது $p = \mathbb{P}(w) \in [0,1]\ ;\ \forall\, w \in \mathbb{W}$

உதாரணம் 3.1.8 : மேலேயுள்ள உதாரணம் 3.1.7 இல் தரப்பட்ட நான்முகியானது இரட்டை எண் விழுவதற்கான வாய்ப்பு ஒற்றை எண் விழுவதற்கான வாய்ப்பின் இருமடங்கு ஆகுமாறு கோணலுற்றதாக கொள்வோம். நிகழ்தகவுப் பெறுமான வீச்சினை காண்க

தீர்வு :

ஒற்றை எண் விழும் நிகழ்தகவு p ஆயின் இரட்டை எண் விழும் நிகழ்தகவு 2p ஆகும்.

அதாவது $Pr(1)=p\,, Pr(2)=2p\,, Pr(3)=p\,, Pr(4)=2p$ ஆகும்.

$\sum_i Pr(i) = 1$ ஆதலால் $6p=1$ ஆகும்.

$p=\frac{1}{6}$ ஆதலால் $Pr(1) = Pr(3) = \frac{1}{6}$

$Pr(2) = Pr(4) = \frac{2}{6}$ ஆகும்.

உதாரணம் 3.1.7 இல் அமைக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சி வெளி $\mathbb{W}$ இனை கருதுக.

$Pr(\phi) = 0,\quad Pr(\{1,2\}) = \frac{3}{6},\quad Pr(\{1,2,3\}) = \frac{4}{6}$

$Pr(\{1\}) = \frac{1}{6},\quad Pr(\{1,3\}) = \frac{2}{6},\quad Pr(\{1,2,4\}) = \frac{5}{6}$

$Pr(\{2\}) = \frac{2}{6},\quad Pr(\{1,4\}) = \frac{3}{6},\quad Pr(\{1,3,4\}) = \frac{4}{6}$

$Pr(\{3\}) = \frac{1}{6},\quad Pr(\{2,3\}) = \frac{3}{6},\quad Pr(\{2,3,4\}) = \frac{5}{6}$

$Pr(\{4\}) = \frac{2}{6},\quad Pr(\{2,4\}) = \frac{4}{6},\quad Pr(\mathbb{S}) = 1$

$Pr(\{3,4\}) = \frac{3}{6}$

எனவே நிகழ்தகவு அளவையின் வீச்சு;

$\left\{0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1\right\}$ ஆகும்.

முடிவுள்ள நிகழ்தகவு வெளி
(Finite Probability Space)

மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S}$ ஆனது முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுடைய வெளியீடுகளைக் கொண்டிருக்கையில் வரையறுக்கப்படும் நிகழ்தகவு வெளி முடிவுள்ள நிகழ்தகவு வெளி எனப்படும்.

சம நிகழ்தகவு வெளி (Equi - probable Space)

மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S}$ இலுள்ள வெளியீடுகள் யாவும் ஒரே மாதிரியான ஆரம்ப நிகழ்ச்சிகளாயின், அதாவது சமநிகழ்தகவுடைய வெளியீடுகளாயின் வரையறுக்கப்படுவது சமநிகழ்தகவு வெளி எனப்படும்.

3.2 கூட்டு நிகழ்ச்சிகளும் நிகழ்தகவும்

(Combined Events and Probability)

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றில் வரையறுக்கப்படக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளின் வெளி மேலே விபரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S}$ இனுடைய வலுத் தொடை (Power Set - இயலுமான தொடைகளின் தொடை) மூலம் எல்லா இயல்தகு நிகழ்ச்சிகளும் வரையறுக்கப் படுகின்றன. இவை யாவும் தனி நிகழ்ச்சிகளாகும் (Single Events). அத்தனி நிகழ்ச்சிகளுக்கு எவ்வாறு நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடலாம் என்பதும் மேலே தெளிவாக்கப்பட்டுள்ளது.

நடைமுறையில் நிகழ்தகவுப் பிரச்சனைகளில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒரே நேரத்தில் நிகழும் நிகழ்ச்சிகள் கூட்டாக நடைபெறும் சூழ்நிலைகள் பற்றி ஆராயப்பட வேண்டியது அவசியம் ஆகின்றது. எனவே கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் பற்றி இப்பகுதியில் விவரிக்கப்படுகிறது.

இரு நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டு

(Combination of two events)

A, B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரு விடயத்தில் ஒரு மாதிரி விவரணவெளியல் வரையறுக்கப்படுவதாக கொள்வோம். பின்வருவன தொடர்புடைய கூட்டு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(i) D : "B நடைபெறாமல் A நடைபெறல்" $\equiv (A-B) \equiv A \cap B^c$

(ii) E : "A நடைபெறாமல் B நடைபெறல்" $\equiv (B-A) \equiv B \cap A^c$

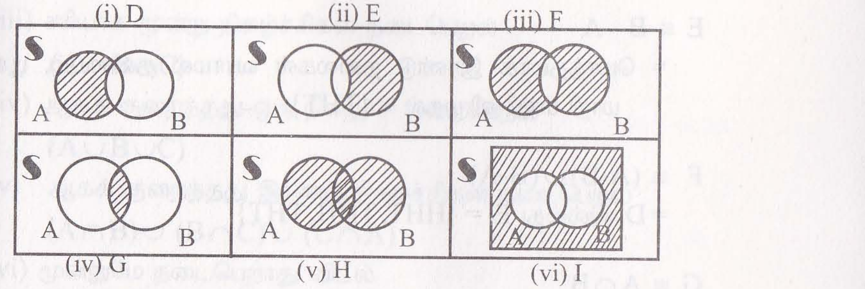
(iii) F : "சரியாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறல்" $\equiv (A-B) \cup (B-A)$

(iv) G : "A உம் B உம் நடைபெறல்" $\equiv (A \cap B)$

(v) H : "A அல்லது B நடைபெறல்" $\equiv (A \cup B)$

(vi) I : "A, B இரண்டும் நடைபெறாது விடல்" $\equiv (A \cup B)^c$

மேற்படி ஆறு நிகழ்ச்சிகளுக்குமான தொடைக் குறியீடுகள் கூடவே காட்டப்பட்டுள்ளன. வென்வரிப் படங்கள் மூலம் மேற்படி நிகழ்ச்சிகளை பின்வருமாறு காட்ட முடியும்.



மேற்படி நிகழ்ச்சிகளில் G "A உம் B உம் நடைபெறல்" என்பதனை "சரியாக இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறல்" எனவும் கூறலாம். மேலும் H : "A அல்லது B நடைபெறல்" என்பதனை "ஒன்று அல்லது இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறல்" என அல்லது "ஆகக் குறைந்தது (at least) ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறல்" எனவும் கூறலாம். H, I என்பன ஒன்றையொன்று நிரப்பும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

உதாரணம் 3.2.1 :பகுதி 2.2 இலுள்ள உதாரணம் 2.2.4 இல் தரப்பட்டுள்ள பரிசோதனையின் மரவரிப் படத்தை பயன்படுத்தி மாதிரி விவரண வெளியினை எழுதுக. அதில் வரையறுக்கப்பட்ட இரண்டு நிகழ்ச்சிகளையும் கருதுக. நிகழ்ச்சிகள் D, E, F, G, H, I என்பனவற்றை விளக்குக.

தீர்வு :

$\mathbb{S} = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

$A \equiv$ மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் விழுதல்
$= \{HHT, HTH, THH\}$

$B \equiv$ தலையும், பூவும் மாறி மாறி விழுதல் $= \{HTH, THT\}$

$D \equiv A - B$
$=$ தலையும் பூவும் மாறி மாறி விழாமல் மொத்தமாக இரண்டு தலை விழுதல் $= \{HHT, THH\}$

$E \equiv B - A$

= மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் வராமல் தலையும், பூவும் மாறி மாறி விழுதல் = {THT}

$F \equiv (A-B) \cup (B-A)$

= D அல்லது E = {HHT, THH, THT}

$G \equiv A \cap B$

= தலையும் பூவும் மாறி மாறி மொத்தமாக இரண்டு தலைகளாக விழுதல் = {HTH}

$H \equiv A \cup B$

= மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் அல்லது தலையும் பூவும் மாறி மாறி விழுதல். = {HHT, HTH, THH, THT}

$I \equiv (A \cup B)^c$

$= A^c \cap B^c$ (தமோகனின் விதிப்படி)

= மொத்தமாக இரண்டு தலை விழாமல் அத்துடன் தலையும் பூவும் மாறி மாறி விழாமலும் வரல்

= {HHH, HTT, TTH, TTT}

மூன்று நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டு

(Combination of three event)

மேலே விபரிக்கப்பட்டவற்றை மூன்று நிகழ்ச்சிகள் A, B, C இற்கு விரித்துக் கூறலாம்.

(i) சரியாக ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறல்,

$A-(B \cup C)$, $B-(C \cup A)$, $C-(A \cup B)$

(ii) சரியாக இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறல்

$(A \cap B)-C$, $(B \cap C)-A$, $(C \cap A)-B$

(iii) சரியாக மூன்று நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறல்

$(A \cap B \cap C)$

(iv) ஆகக் குறைந்தது ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறல்

$(A \cup B \cup C)$

(v) ஆகக் குறைந்தது இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் நடைபெறல்

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$

(vi) மூன்றுமே நடைபெறாது விடல்

$(A \cup B \cup C)^c$

இவ்வாறே கூட்டு நிகழ்ச்சிகளை நான்கு, ஐந்து என விரிவுபடுத்தி வரையறுக்கலாம்.

தம்முள் புறநீக்கலான நிகழ்ச்சிகள்

(Mutually Exclusive Event)

நிகழ்ச்சிகள் கூட்டாக நடைபெறுவது அவற்றின் தொடைகளின் இடைவெட்டு மூலம் தீர்மானிக்கப்படும். A, B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $A \cap B = \phi$ ஆயின் A உம் B உம் தம்முள் புறநீக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என வரையறுக்கப்படும். A, B முட்டற்ற தொடைகளாக இருப்பதனால் பொதுவான இயல்தகு வெளியீடுகள் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கும் இருக்காது. அதாவது அவையிரண்டும் ஒரே நேரத்தில் நடைபெறாது.

நிகழ்தகவு கூட்டல் விதிகள்

(Additive laws of Probability)

(i) A, B தம்முள் புற நீக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக S இல் வரையறுக்கப்பட்டால் பொதுமைப் பண்பில் மாற்றமின்றி

$A = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ எனவும்

$B = \{w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_s\}$ எனவும் கூறலாம்.

$A \cap B = \phi$ ஆக உள்ளது.

மேலும் $A \cup B = \{w_1, w_2, \ldots, w_s\}$ ஆகும்.

$S = \{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_n\}$ ஆயின்

$\Pr(A \cap B) = \Pr(\phi) = 0$ ஆகும்.

அத்துடன் $\Pr(A) = \dfrac{r}{n}$, $\Pr(B) = \dfrac{s-r}{n}$ ஆகும்.

$\Pr(A \cup B) = \dfrac{s}{n}$ ஆதலால்

$$\Pr(A) + \Pr(B) = \frac{r}{n} + \frac{s-r}{n}$$

$$= \frac{s}{n}$$

$$= \Pr(A \cup B) \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7)$$

(ii) A உம் B உம் தம்முள் புறநீக்கலற்ற (Non-mutually exclusive) நிகழ்ச்சிகளாயின் $A \cap B \neq \phi$ ஆகும். பொதுமைப் பண்பில் மாற்றமின்றி

$A = \{w_1, w_2, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots\ldots, w_s\}$

$B = \{w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots\ldots\ldots, w_s, w_{s+1}, \ldots\ldots, w_t\}$

எனக் கொண்டால்

$A \cap B = \{w_{r+1}, w_{r+2}, \ldots, w_s\}$

$A \cup B = \{w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, w_t\}$ என எழுதலாம்.

ஆயின் $\Pr(A) = \dfrac{s}{n}$, $\Pr(B) = \dfrac{t-r}{n}$ எனவும்

அத்துடன் $\Pr(A \cap B) = \dfrac{s-r}{n}$, $\Pr(A \cup B) = \dfrac{t}{n}$ எனவும் எழுதலாம்.

$$\therefore \Pr(A) + \Pr(B) = \frac{s}{n} + \frac{t-r}{n}$$

$$= \frac{s+t-r}{n}$$

$$\Pr(A \cup B) + \Pr(A \cap B) = \frac{s-r}{n} + \frac{t}{n}$$

$$= \frac{s+t-r}{n}$$

அதாவது

$$\Pr(A \cap B) + \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

$$\therefore \Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \quad \ldots\ldots\ldots(3.8)$$

தொடர்புகள் (3.7), (3.8) என்பன இரண்டும் அடிப்படை நிகழ்தகவு கூட்டல் விதிகளாகும். இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் A, B இன் பல்வேறு கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் உதாரணம் 3.2.1 இல் தரப்பட்டுள்ளன. மேலே விபரிக்கப்பட்ட கூட்டல் விதி மூலம் $\Pr(A \cup B)$ இனை கணிக்கலாம். ஏனைய நிகழ்ச்சிகளை பின்வரும் கூட்டல் விதிகள் மூலம் கணிக்கமுடியும்.

(iii) $\Pr(A-B) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.9)$

(iv) $\Pr(B-A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.10)$

(v) $\Pr[(A-B) \cup (B-A)] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B) \ldots\ldots\ldots(3.11)$

உதாரணம் 3.2.2 : பகுதி 2.2 இலுள்ள உதாரணம் 2.2.4 இனையும் அதன் தொடர்ச்சியாகிய உதாரணம் 3.2.1 இனையும் கருதுவோம். பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடுக.

(i) மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் அல்லது மொத்தமாக இரண்டு பூக்கள் விழுந்திருத்தல்

(ii) மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் அல்லது இரண்டாம் முறை பூ விழுந்திருத்தல்.

தீர்வு:

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

நிகழ்ச்சிகள்

$A \equiv$ மொத்தமாக இரண்டு தலைகள் விழுதல்

$B \equiv$ மொத்தமாக இரண்டு பூக்கள் விழுதல்

$C \equiv$ இரண்டாம் முறை பூ விழுதல்

என குறிக்கப்பட்டால்

$A = \{HHT, HTH, THH\}$

$B = \{HTT, THT, TTH\}$

$C = \{HTH, HTT, TTH, TTT\}$ ஆகும்.

(i) A, B என்பன தம்முள் புறநீக்கலானவை (mutually exclusive) ஆகும். ஏனெனில் $A \cap B = \phi$ ஆகும்.

$\therefore Pr$ (மொத்தமாக இரண்டு தலை அல்லது இரண்டு பூ)

$= Pr(A \cup B)$

$= Pr(A) + Pr(B)$ (தொடர்பு 3.7 இன்படி)

$= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$ ஆகும்.

(ii) A, C என்பன தம்முள் புறநீக்கலானவை அல்ல (Not mutually exclusive) அதாவது பகுதியாக ஒன்றன் மேலொன்று படிந்தவை (Partially overlapping) ஆகும்.

$A \cap C = \{HTH\}$

$\therefore Pr$(மொத்தமாக இரண்டு தலை அல்லது இரண்டாவது பூ)

$= Pr(A \cup C)$

$= Pr(A) + Pr(C) - Pr(A \cap C)$ (தொடர்பு 3.8 இன்படி)

$= \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$ ஆகும்.

(iii) இவ்வுதாரணத்தில் மேலே காட்டப்பட்ட மூன்று நிகழ்ச்சி களையும் கருதுவோம்.

$A \cap B = \phi$ ஆதலால் A, உம் B உம் ஒன்றாக தொடர்புபடும் பொது நிகழ்ச்சிகள் பொருத்தமில்லை. $\therefore A - B = A$

$Pr(A\text{மட்டும்}) = Pr(A-C) = Pr(A) - Pr(A \cap C)$ (தொடர்பு 3.9)

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$Pr(C\text{மட்டும்}) = Pr(C-A) = Pr(C) - Pr(A \cap C)$ (தொடர்பு 3.10)

$= \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

Pr(சரியாக ஒரு நிகழ்ச்சி) $= Pr[(A-C) - (C-A)]$

$= Pr(A) + Pr(C) - 2\ Pr(A \cap C)$ (தொடர்பு 3.11)

$= \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

உதாரணம் 3.2.3 : ஒரு ஒப்பந்தக்காரனுக்கு ஒப்பந்தம் A கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $^2/_3$ உம், ஒப்பந்தம் B கிடைக்காமல் போவதற்கான நிகழ்தகவு $^5/_9$ உம் ஆகும். இவற்றில் ஆகக் குறைந்தது ஒரு ஒப்பந்தமாவது அவருக்கு கிடைப்பதற்கு 80% சந்தர்ப்பம் உண்டாயின் அவருக்கு இரண்டுமே கிடைப்பதற்கான சந்தர்ப்பம் என்னவாகும். மேலும் சரியாக ஒரு ஒப்பந்தம் மட்டும் கிடைப்பதற்கான சந்தர்ப்பத்தையும் தருக.

தீர்வு :

$A \equiv$ ஒப்பந்தம் A கிடைத்தல்

$B \equiv$ ஒப்பந்தம் B கிடைத்தல்

எனும் நிகழ்ச்சிகளை கருதினால்,

$Pr(A) = \frac{2}{3}$, $Pr(B^c) = \frac{5}{9}$ என தரப்பட்டுள்ளது.

தொடர்பு (3.6) இன்படி

$Pr(B) = 1 - Pr(B^c)$

$$= 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \text{ ஆகும்.}$$

ஒப்பந்தக்காரனுக்கு இரண்டுமே கிடைக்க சந்தர்ப்பம் இருப்பதனால் A உம் B உம் தம்முள் புறநீக்கலான நிகழ்ச்சிகள் அல்ல. மேலும் ஆகக் குறைந்தது ஒரு ஒப்பந்தம் கிடைப்பதற்கான சந்தர்ப்பம் 80% ஆதலால்

$$\Pr(A \cup B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$$

(i) தொடர்பு (3.8) இன்படி

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$$

$$\therefore \Pr(\text{இரண்டும் கிடைத்தல்}) = \Pr(A \cap B)$$

$$= \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cup B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{5} = \frac{14}{45} \text{ (அல்லது 31\%) ஆகும்.}$$

(ii) தொடர்பு (3.11) இன்படி

$$\Pr[(A\text{-}B) \cup (B\text{-}A)] = \Pr(A) + \Pr(B) - 2\Pr(A \cap B)$$

$$\therefore \Pr[\text{சரியாக ஒன்று கிடைத்தால்}]$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - 2 \times \frac{14}{45}$$

$$= \frac{22}{45} \text{ (அல்லது 49 \%) ஆகும்.}$$

■ நிகழ்ச்சிகள் தனித்தனியாகக் கருதப்பட்டு அவற்றின் நிகழ்தகவுகளை கணிப்பிடுவதில் வரைவிலக்கணத்திற்கு அப்பாற்பட்ட பிரச்சினைகள் எழுவதில்லை. (தொடர்பு 3.1 இலிருந்து 3.5 வரை). ஆனால் பல நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றாக கருதப்பட்டு கூட்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் கணிக்கப் படுகையில் சமாந்தர நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளின் பிரயோகம்

சில நிகழ்தகவு விதிகளுடாக சாத்திய மாகின்றன. உதாரணமாக, ஒரு நிகழ்ச்சி, அதன் நிரப்பி நிகழ்ச்சிகளுக்கிடையிலான நிகழ்தகவுத் தொடர்பு, (தொடர்பு 3.6), தம்முள் புறநீக்கும், நீக்காத நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுக்கான (தொடர்புகள் 3.7, 3.8) நிகழ்தகவு கூட்டல் விதிகளைக் கூறலாம். தொடர்புடைய சில கூட்டல் விதிகளும் (தொடர்புகள் 3.9 இலிருந்து 3.11 வரை) விபரிக்கப்பட்டுள்ளன.

எனவே அவற்றுடன் தொடர்புடைய வேறு சில அடிப்படை நிகழ்தகவு விதிகள் கீழே விபரிக்கப்படுகின்றன.

(அ) A என்பது நிகழ்ச்சி B இனுடைய முறைமையான நிகழ்ச்சிப் பிரிவு ($A \subset B$) ஆயின்

$$\Pr(B\text{-}A) = \Pr(B) - \Pr(A) \qquad \textbf{(3.12)}$$

ஆகும் ஏனெனில்

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B\text{-}A) \text{ ஆகும்.}$$

$A \cap (B\text{-}A) = \phi$ ஆதலால் தொடர்பு (3.7) இன்படி;

$$\Pr(B) = \Pr(A) + \Pr(B\text{-}A)$$

அதாவது $\Pr(B\text{-}A) = \Pr(B) - \Pr(A)$ ஆகும்.

அத்துடன் $\Pr(B\text{-}A) \geq 0$ ஆதலால்

$\Pr(B) - \Pr(A) \geq 0$ ஆகும். எனவே

$$\Pr(A) \leq \Pr(B) \qquad \textbf{(3.13)}$$

(ஆ) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பன சோடி சோடியாக தம்முள் புறநீக்கலான நிகழ்ச்சிகளாயின் நிகழ்தகவுக் கூட்டல் விதி (3.7) இனை பின்வருமாறு பொதுமைப்படுத்தலாம்.

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) \qquad \textbf{(3.14)}$$

(இ) $A_1, A_2, \ldots A_n$ என்பன தம்முள் புறநீக்கலற்றவை ஆயின் தொடர்பு (3.8) இன் பொது வடிவத்தை எழுத முடியும். n=3 இற்கு இவ்வடிவம் பின்வருமாறு அமையும்.

$$Pr(A\cup B\cup C) = Pr(A) + Pr(B) + Pr(C) - Pr(A\cap B) - Pr(B\cap C) - Pr(C\cap A) + Pr(A\cap B\cap C) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.15)$$

(ஈ) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பன சோடி சோடியாக தம்முள் புறநீக்குமாயின் மட்டுமே தொடர்பு (3.14) சாத்தியமாகும். அல்லாவிடில் தொடர்பு (3.8) இன் பொது வடிவமானது பின்வரும் சமனிலியினைத் தோற்றுவிக்கும்.

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.16)$$

இது பூலின் முதலாவது சமனிலி (Boole's inequality) எனப்படும்.

இதேபோல் பூலின் இரண்டாம் சமனிலி பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i) - (n-1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.17)$$

(உ) தமோகனின் தொடைக் கொள்கை விதிப்படி,

$(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$ ஆகும். எனவே

$$Pr(A^c \cap B^c) = 1 - Pr(A\cup B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.18)$$

$$Pr(A^c \cup B^c) = 1 - Pr(A\cap B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.19)$$

ஆகும்.

(ஊ) A, B எனும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு பின்வரும் தொடர்புச் சமனிலி உண்மையாகும்.

$$Pr(A\cap B) \leq Pr(A) \leq Pr(A\cup B) \leq Pr(A) + Pr(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.20)$$

உதாரணம் 3.2.4 : ஒரு பட்டதாரி இரு பதவிகள் A, B என்பவற்றுக்காக விண்ணப்பித்திருந்தான். பதவி A, பதவி B அவருக்கு கிடைப்பதற்கான சாத்தியங்கள் முறையே 37.5%, 50% ஆகும். இரண்டும் ஒன்றாகக் கிடைப்பதற்கு 25% ஆன சந்தர்ப்பமும் உண்டு. பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளுக்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) அவருக்கு ஏதாவது ஒரு பதவி கிடைத்தல்.
(ii) அவருக்கு நிச்சயம் ஒரு பதவியாவது கிடைத்தல்.
(iii) A கிடைக்காது போதல் அல்லது B கிடைக்காது போதல்
(iv) இரண்டுமே கிடைக்காது போதல்.

தீர்வு :

A ≡ "அவருக்கு பதவி A கிடைத்தல்"
B ≡ "அவருக்கு பதவி B கிடைத்தல்"
என்றவாறு இரு நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம்.

$$Pr(A) = \frac{37.5}{100} = \frac{3}{8}$$

$$Pr(B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(A\cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

(i) C ≡ ஏதாவது ஒரு பதவி மட்டும் கிடைத்தல்
≡ A மட்டும் அல்லது B மட்டும் கிடைத்தல்
≡ $(A-B)\cup(B-A)$

$\therefore Pr(C) = Pr[(A-B)\cup(B-A)]$
$= Pr(A-B) + Pr(B-A)$ (தொடர்பு 3.7 இன்படி)

$Pr(A-B) = Pr(A) - Pr(A\cap B)$ (தொடர்பு 3.9 இன்படி)

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$Pr(B-A) = Pr(B) - Pr(A \cap B)$ (தொடர்பு 3.10 இன்படி)

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore Pr(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

(ii) D ≡ நிச்சயம் ஒரு பதவியாவது கிடைத்தல்

≡ A அல்லது B கிடைத்தல்

$\equiv (A \cup B)$

$\therefore Pr(D) = Pr(A \cup B)$

$= Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$ (தொடர்பு 3.8 இன்படி)

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

(iii) E ≡ A கிடைக்காது போதல் அல்லது B கிடைக்காது போதல்

A^c அல்லது B^c, $E = A^c \cup B^c$

$Pr(E) = Pr(A^c \cup B^c)$

$= 1 - Pr(A \cap B)$ (தொடர்பு 3.19 இன்படி)

$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(iv) F ≡ இரண்டுமே கிடைக்காது போதல்

≡ A உம் கிடைக்காமல் B உம் கிடைக்காமல் விடல்

$\equiv A^c \cap B^c$

$Pr(F) = Pr(A^c \cap B^c)$

$= 1 - Pr(A \cup B)$ (தொடர்பு 3.18 இன்படி)

$$= 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

உதாரணம் 3.2.5: ஐம்பத்திரண்டு சீட்டுக்களைக் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டு (Cards pack) ♦, ♥, ♣, ♠ எனும் நான்கு இனங்களைக் கொண்டது. அவற்றில் ♦, ♥ என்பன சிவப்பும், ♣, ♠ என்பன கறுப்பும் ஆகும். ஒவ்வொரு இனத்திலும் A, J, K, Q எனும் எழுத்துச் சீட்டுக்களும் 2, 3, ..., 10 எனும் எண் சீட்டுக்களும் உள்ளன. எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்ட சீட்டொன்று ♠ இனமாக அல்லது சிவப்பு நிறச்சீட்டாக அல்லது எண் சீட்டாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க. மேலும் ♥ இனச்சீட்டு பெறப்பட்டதாகக் கூறப்பட அது எண்ணல்லாததாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு :

நிகழ்ச்சிகள் B,C,D இனை

B ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது ♠ இன சீட்டு

C ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது சிவப்பு நிற சீட்டு

D ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது எண் சீட்டு

எனக் கொண்டால்

$Pr(B) = \frac{13}{52}$, $Pr(C) = \frac{26}{52}$, $Pr(D) = \frac{36}{52}$ ஆகும்.

Pr(தெரிவு செய்யப்பட்டது ♠ இன அல்லது சிவப்பு நிற அல்லது எண் சீட்டு) $= Pr(B \cup C \cup D)$

தொடர்பு (3.15) இன்படி

$$Pr(B \cup C \cup D) = Pr(B) + Pr(C) + Pr(D) - Pr(B \cap C) - Pr(C \cap D) - Pr(B \cap D) + Pr(B \cap C \cap D)$$

♠இனச் சீட்டு ஒரு சிவப்பு நிறச் சீட்டல்ல.

எனவே $B \cap C = \phi$. எனவே $B \cap C \cap D = \phi$ ஆகும்.

$\therefore Pr(B \cap C) = 0$, $Pr(B \cap C \cap D) = 0$ ஆகும்.

மேலும்

$$Pr(C\cap D)=\frac{18}{52},\quad Pr(B\cap D)=\frac{9}{52}$$ உம் ஆகும்.

$$\therefore Pr(B\cup C\cup D)=\frac{13}{52}+\frac{26}{52}+\frac{36}{52}-0-\frac{18}{52}-\frac{9}{52}+0$$

$$=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$ ஆகும்.

நிகழ்ச்சிகள் E,F இனை

E ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது ♥ இன சீட்டு

F ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது ♥ இன எண் சீட்டு

எனக்கொண்டால்

$$Pr(E)=\frac{13}{52},\quad Pr(F)=\frac{9}{52}$$ ஆகும்.

தொடர்பு (3.12) இங்கு சாத்தியமாகும். ஏனெனில் $F\subset E$ ஆகும்.

∴ கேட்கப்பட்ட நிகழ்தகவு;

$$Pr(E-F)=Pr(E)-Pr(F)=\frac{13}{52}-\frac{9}{52}=\frac{4}{52}$$ ஆகும்.

Chapter 4

Concepts of Conditional Probability

At the end of this Chapter you will be able to

(1) Find what is "Marginal probability"

(2) Find what is "Joint probability"

(3) Find what is "Conditional probability"

(4) Apply "Probability Multiplicative Laws"

(5) Apply "Baye's concepts" of Conditional Probability

(6) Find what is "Posterior probability"

4. நிபந்தனை நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்

Concepts of Conditional Probability

4.1 கூட்டு நிகழ்தகவும் ஓர நிகழ்தகவும்

Joint Probability and Marginal Probability

கூட்டுநிகழ்தகவு (Joint Probability) என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகளின் கூட்டாக ஒரு பொது நிகழ்ச்சி நடைபெறுதலுக்கான நிகழ்தகவு ஆகும். உதாரணமாக A, B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகளாயின் $Pr(A \cap B)$ என்பது ஒரு கூட்டு நிகழ்தகவு ஆகும். முந்திய அத்தியாயத்தில் இது விளக்கப்பட்டிருப்பினும்கூட கூட்டு நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டில் A, B என்பனவற்றின் ஏனைய வகை கூட்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளையும் கூட்டமாக விளக்குவதாக கூட்டுநிகழ்தகவு அமைகின்றது.

அதாவது நிகழ்ச்சிகள் A,B இற்கான கூட்டு நிகழ்தகவானது

$$Pr(A \cap B), Pr(A \cap B^C), Pr(A^C \cap B), Pr(A^C \cap B^C)$$

எனும் நான்கு நிகழ்தகவுகளின் சேர்க்கை ஆகும். இது பின்வரும் 2 x 2 அட்டவணை மூலமும் காட்டப்படும்.

கூட்டு நிகழ்தகவு	B	B^C	மொத்தம்
A	$Pr(A \cap B)$	$Pr(A \cap B^C)$	$Pr(A)$
A^C	$Pr(A^C \cap B)$	$Pr(A^C \cap B^C)$	$Pr(A^C)$
மொத்தம்	$Pr(B)$	$Pr(B^C)$	1

ஓர நிகழ்தகவு (Marginal Probability) என்பது ஒரு கூட்டு நிகழ்தகவில் உள்ளவற்றில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் மாற்று நிகழ்வுகளை காட்டும் நிகழ்தகவு ஆகும்.

மேற்படி அட்டவணையில் நிரை மொத்தம் $[\Pr(A), \Pr(A^C)]$, நிரல் மொத்தம் $[\Pr(B), \Pr(B^C)]$ என்பன முறையே A இனதும் B இனதும் ஓரநிகழ்தகவுகள் ஆகும்.

பொதுவாக A இன் மாற்று நிகழ்ச்சிகள் $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ ஆகவும் B இன் மாற்று நிகழ்ச்சிகள் $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ ஆகவுமிருப்பின் கூட்டு நிகழ்தகவுகள் ஒரு $m\times n$ இரு வழி அட்டவணையில் காட்டப்படும். அவை

$$\Pr(A_i \cap B_j); \quad i=1,2,\ldots\ldots\ldots, m$$
$$j=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots, n \text{ ஆகும்.}$$

எனவே இவற்றின் ஓர நிகழ்தகவுகள்

$$\Pr(A_i) = \sum_{j=1}^{n} \Pr(A_i \cap B_j) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(4.1)}$$

$$\Pr(B_j) = \sum_{i=1}^{m} \Pr(A_i \cap B_j) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(4.2)}$$

என்பனவற்றால் தரப்படும்.

உதாரணம் 4.1.1 : ஒரு நகரத்தில் ஆண்களும், பெண்களும் எண்ணிக்கையில் 60%, 40% ஆக உள்ளனர். மேலும் அவர்களில் 20% ஆன ஆண்களும் 15% ஆன பெண்களும் வேலையற்றவர்கள் ஆவர். வேலையற்றவர்கள் தொடர்பான ஆய்வு ஒன்றில் ஒரு நபர் இந்நகரத்தில் இருந்து எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்டார். இதற்கான கூட்டு நிகழ்தகவு அட்டவணையினை அமைப்பதன் மூலம் வேலைநிலைக்கான ஓர நிகழ்தகவினைக் கணிப்பிடுக.

தீர்வு :

$A \equiv$ தெரிவு செய்யப்பட்டவர் ஆண்

$\therefore A^C \equiv$ தெரிவு செய்யப்பட்டவர் பெண்

பாலுக்கான ஓரநிகழ்தகவு

$$\Pr(\text{ஆண்}) = \frac{60}{100} = 0.6$$

$$\Pr(\text{பெண்}) = \frac{40}{100} = 0.4, \text{ என்பதால்}$$

$$\Pr(A) = 0.6\,,\ \Pr(A^C) = 0.4 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் $B \equiv$ தெரிவு செய்யப்பட்டவர் வேலையற்றவர், $B^C \equiv$ தெரிவு செய்யப்பட்டவர் வேலையுள்ளவர் எனக் கொண்டால், தரவின்படி

$$\Pr(A\cap B) = \left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{20}{100}\right) = 0.12$$

$$\Pr(A^c\cap B) = \left(\frac{40}{100}\right)\left(\frac{15}{100}\right) = 0.06$$

இக்கணிப்பீடுகள் உதாரணம் 4.2.2 இல் மேலும் தெளிவாக்கப்படுகின்றன.

தொடர்பு (4.1) இன்படி

$$\Pr(A) = \Pr(A\cap B) + \Pr(A\cap B^C)$$
$$\Pr(A^C) = \Pr(A^C\cap B) + \Pr(A^C\cap B^C)$$

எனும் தொடர்புகளை எழுதலாம்.

$$\therefore\ 0.6 = 0.12 + \Pr(A\cap B^C)$$

$$0.4 = 0.06 + Pr(A^C \cap B^C)$$

$$\therefore \quad Pr(A \cap B^C) = 0.48$$

$$Pr(A^C \cap B^C) = 0.34$$

எனவே தொடர்புடைய கூட்டு நிகழ்தகவு அட்டவணையினை பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

கூட்டு நிகழ்தகவு	B	B^C	ஓர நிகழ்தகவு (பால்)
A	0.12	0.48	0.6
A^C	0.06	0.34	0.4
ஓர நிகழ்தகவு (வேலை நிலை)	0.18	0.82	1.0

மேற்படி கூட்டு நிகழ்தகவு அட்டவணையின் இறுதி நிரை பூர்த்தியாக்கப்படுகையில் வேலை நிலைக்கான ஓரநிகழ்தகவு கிடைப்பதனை காணலாம்.

அதாவது $Pr(B) = 0.18$, $Pr(B^C) = 0.82$ ஆகும்.

மேற்படி கூட்டு நிகழ்தகவினை மூன்று, நான்கு நிகழ்ச்சி களுக்கென்று விரிவுபடுத்திச் செல்லலாம். மூவழி, நான்கு வழி நிகழ்தகவு அட்டவணைகள் மூலம் அவை விபரிக்கப் படும்.

உதாரணம் 4.1.2 : உதாரணம் 2.3.2 இல் தரப்பட்டுள்ள 200 ஊழியர் தொடர்பான இருவழி மீடிறன் பரம்பலை கருதுக. பின்வருமாறு நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம்.

A – வயது, B – ஊதியம் எனக்கொள்வோம்

$A_1 : A < 30$ $\quad$ $B_1 : B < 10000$

$A_2 : 30 < A < 40$ $\quad$ $B_2 : 10000 < B < 20000$

$A_3 : 40 < A < 50$ $\quad$ $B_3 : B > 20000$

$A_4 : A > 50$

ஆயின் கூட்டுநிகழ்தகவுகளும், ஓர நிகழ்தகவுகளும் தொடர்பு மீடிறன் அணுகுமுறைப்படி கணிக்கப்படலாம். பின்வரும் அட்டவணை இவற்றை தருகின்றது.

கூட்டு நிகழ்தகவு		ஊதியம் B_1	ஊதியம் B_2	ஊதியம் B_3	வயதின் ஓர நிகழ்தகவு
வயது	A_1	0.150	0.050	0.050	0.250
வயது	A_2	0.125	0.125	0.100	0.350
வயது	A_3	0.050	0.150	0.050	0.250
வயது	A_4	0.050	0.050	0.050	0.150
ஊதியத்தின் ஓர நிகழ்தகவு		0.375	0.375	0.250	1.000

தொடர்பு (4.1) இன்படி

$$Pr(A_1) = Pr(A_1 \cap B_1) + Pr(A_1 \cap B_2) + Pr(A_1 \cap B_3)$$

$$= 0.150 + 0.050 + 0.050 = 0.250$$

என்றவாறு கூட்டு நிகழ்தகவுகளை பயன்படுத்தி ஓர நிகழ்தகவுகளைக் கணிக்கலாம். இவ்வாறே $Pr(A_2)$, $Pr(A_3)$, $Pr(A_4)$ என்பனவும் அதே போல தொடர்பு (4.2) இனைப் பயன படுத்தி $Pr(B_1), Pr(B_2), Pr(B_3)$ என்பன கணிக்கப்படலாம். உதாரணம் 2.3.2 இலுள்ள கணிப்பீடு களை கூட்டு நிகழ்தகவு, ஓர நிகழ்தகவுகள் ஊடாக பின்வரு மாறு எழுதலாம்.

(i) $Pr(A_1 \cup A_2) = Pr(A_1) + Pr(A_2)$

$$= 0.250 + 0.350 = 0.60$$

(ii) $Pr(B_2 \cup B_3) = Pr(B_2) + Pr(B_3)$

$$= 0.375 + 0.250 = 0.625$$

(iii) $Pr[(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap B_3]$

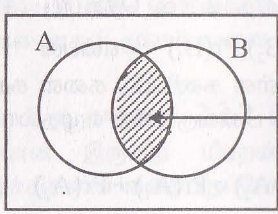
$$= Pr[(A_2 \cap B_3) \cup (A_3 \cap B_3) \cup (A_4 \cap B_3)]$$

அடைப்புக்குறிக்குள் பயன்படுத்தப்பட்டது ஒரு பரம்பல் விதியாகும் (Distributive law)

$$\therefore \Pr[(A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap B_3]$$
$$= \Pr(A_2 \cap B_3) + \Pr(A_3 \cap B_3) + \Pr(A_4 \cap B_3)$$
$$= 0.100 + 0.050 + 0.050$$
$$= 0.200$$

4.2 நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்பது ஒரு நிகழ்ச்சிக்கான வழமையான நிகழ்தகவுக் கணிப்பீட்டினுள் ஒரு நிபந்தனையை அல்லது வரையறையை பயன்படுத்தும் சூழலில் அந்நிகழ்ச்சியின் கட்டுப்ப டுத்தப்பட்ட நிகழ்தகவு ஆகும். A, B என்பன ஒரு மாதிரி விவரண வெளியில் வரையறுக்கப்படும் சமகால நிகழ்ச்சிகளாயின் B தரப்பட (நிபந்தனையாக்கப்பட) Aஇன்நிகழ்தகவு ஆனது $\Pr\left(A/B\right)$ இனால் குறிக்கப்படும் A இன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு எனப்படும். அதாவது மாதிரி விவரண வெளி $\mathbb{S}$ ஆனது நிபந்தனை நிகழ்ச்சி B ஆக ஒடுக்கப்பட, விவரண வெளியில் A இன் நிகழ்தகவு நிபந்தனை நிகழ்தகவு ஆகும்.



$A \cap B$

$\mathbb{S}$ இல் A இன் நிகழ்தகவு மொத்த நிகழ்தகவு எனவும் (Total Probability) B இல் $(A \cap B)$ இன் நிகழ்தகவு B தரப்பட A இன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probavbility) எனவும் வரையறுக்கப்படும்.

அதாவது எல்லா வெளியீடுகளும் ஒரே மாதிரியானவை ஆயின்

$$\Pr\left(A/B\right) = \frac{A \text{ உம் } B \text{ உம் நடைபெறும் வழிமுறைகள்}}{B \text{ நடைபெறும் வழிமுறைகள்}}$$

$$\therefore \Pr\left(A/B\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \text{ ஆகும்.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.3)$$

உதாரணம் 4.2.1 : உதாரணம் 1.1.2 இல் தரப்பட்டுள்ள கோணலற்ற தாயக்கட்டை உருட்டும் பரிசோதனையினை கருதுக. எல்லா வெளியீடுகளும் ஒரே மாதிரியானவை ஆதலால்

A ≡ “இரட்டை எண்விழுதல்” $= \{2, 4, 6\}$

ஆயின் $\Pr(A) = \frac{3}{6}$ ஆகும்.

B ≡ “நான்கிலும் சிறிய எண் விழுதல்” $= \{1, 2, 3\}$

ஆயின் தொடர்பு (4.1) இன்படி $P\left(A/B\right) = \frac{1}{3}$ ஆகும்.

■ நிபந்தனை நிகழ்தகவுக்கான தொடர்பு (4.3) இனை பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

$$\Pr\left(A/B\right) = \frac{n(A \cap B)\,/\,n(\mathbb{S})}{n(B)\,/\,n(\mathbb{S})}$$

அதாவது $$\Pr\left(A/B\right) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} \quad \ldots\ldots\ldots(4.4)$$

ஆகும். அத்துடன்

$$\Pr(A \cap B) = \Pr\left(A/B\right)\Pr(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.5)$$

எனவும் எழுதலாம்.

அதாவது கூட்டு நிகழ்தகவானது நிபந்தனை நிகழ்தகவினதும், ஓரநிகழ்தகவினதும் பெருக்கமாகும். A நிபந்தனையாக்கப்பட B

இன் நிகழ்தகவு பொருத்தமாயின் (4.4), இனை மாற்றி எழுதி (4.5) இனை பின்வருமாறு மாற்றிய மைக்கலாம்

$$\Pr(A\cap B) = \Pr\left(B/A\right)\Pr(A) \quad \text{.................} (4.6)$$

உதாரணம் 4.2.2 : உதாரணம் 4.1.1 இலுள்ள தரவுகளைக் கருதுக. அதில் "தெரிவு செய்யப்பட்டவர் ஆண் எனத் தரப்பட அவர் வேலையற்றவராக இருத்தல்" என்பது ஒரு நிபந்தனை நிகழ்தகவு ஆகும்.

அதாவது $\Pr\left(B/A\right) = \dfrac{20}{100}$ உம்

இதேபோல் $\Pr\left(B/A^c\right) = \dfrac{15}{100}$ உம் ஆகும்.

ஓரநிகழ்தகவுகள் $\Pr(A) = \dfrac{60}{100}, \Pr(A^c) = \dfrac{40}{100}$

ஆதலால் தொடர்பு (4.6) இன்படி

$$\Pr(A\cap B) = \Pr\left(B/A\right)\Pr(A)$$

$$= \left(\frac{20}{100}\right)\left(\frac{60}{100}\right) = 0.12$$

$$\Pr(A^c\cap B) = \Pr\left(B/A^c\right)\Pr(A^c)$$

$$= \left(\frac{15}{100}\right)\left(\frac{40}{100}\right) = 0.06$$

என அங்கு கணிக்கப்பட்டதனை மேலும் தெளிவுபடுத்தலாம்.

உதாரணம் 4.2.3 : உதாரணம் 4.1.2. இலுள்ள தரவுகளையும் கணிப்பீடுகளையும் கருதுக. பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) தெரிவு செய்யப்பட்டவர் 30 வயதுக்கு மேற்பட்டவராயின், அவர் ரூ.20000 இலும் அதிக ஊதியம் பெறுபவர்.

(ii) தெரிவு செய்யப்பட்டவர் ரூபா 10000 இலும் அதிக ஊதியம் பெறுபவராயின் அவர் 40 வயதிலும் குறைந்த வயதுடையவராயிருத்தல்.

தீர்வு :

தெரிவு செய்யப்பட்டவர்;

"30 வயதுக்கு மேற்பட்டவர்" $\equiv A_2\cup A_3\cup A_4 \equiv C_1$ என்க.

"40 வயதிலும் குறைந்தவர்" $\equiv A_1\cup A_2 \equiv C_2$ என்க.

"ரூபா 10000 இரும் அதிகம் பெறுபவர்" $\equiv B_2\cup B_3 \equiv D_1$ என்க

ஆயின் மேற்படி தேவையான நிகழ்தகவுகள்

$\Pr\left(B_3/C_1\right), \Pr\left(C_2/D_1\right)$ ஆகும்.

(i) $\Pr\left(B_3/C_1\right) = \dfrac{\Pr(C_1\cap B_3)}{\Pr(C_1)}$ (தொடர்பு 4.4 இன்படி)

ஆனால் $\Pr(C_1\cap B_3) = 0.200$ (உதாரணம் 4.1.2 இல் கணிப்பீடு (iii) இன்படி)

அத்துடன்

$$\Pr(C_1) = \Pr(A_2\cup A_3\cup A_4)$$

$= \Pr(A_2)+\Pr(A_3)+\Pr(A_4)$ (தொடர்பு 3.14 இன்படி)

$$= 0.350+0.250+0.150$$

$$= 0.750$$

$$\therefore \Pr\left(B_3/C_1\right) = \frac{0.200}{0.750} = 0.2666$$

(ii) $\Pr\left(C_2/D_1\right) = \dfrac{\Pr(C_2\cap D_1)}{\Pr(D_1)}$ (தொடர்பு 4.4 இன் படி)

$$\Pr(C_2 \cap D_1) = \Pr[(A_1 \cup A_2) \cap (B_2 \cup B_3)]$$

$$= \Pr(A_1 \cap B_2) + \Pr(A_1 \cap B_3) + \Pr(A_2 \cap B_2) + \Pr(A_2 \cap B_3)$$

(பரம்பல் விதியின் படியும் தொடர்பு 3.14 இன் படியும்)

$$= 0.050 + 0.050 + 0.125 + 0.100$$

(கூட்டு நிகழ்தகவு அட்டவணையிலிருந்து)

$$= 0.325$$

$$\Pr(D_1) = \Pr(B_2 B_3)$$

$$= \Pr(B_2) + \Pr(B_3)$$

$$= 0.375 + 0.250$$

$$= 0.625$$

$$\therefore \Pr\left(C_2 / D_1\right) = \frac{0.325}{0.625} = 0.52$$

■ மேற்படி மூன்று உதாரணங்களிலும் A, B, என்பன சமகாலத்தில் நிகழக் கூடிய அல்லது விளக்கக் கூடிய நிகழ்ச்சிகளாகும். இவற்றை ஒரே கட்ட (Same stage) நிகழ்ச்சிகள் எனவும் கூறலாம். பதிலாக A அல்லது அதன் நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள் முதல் கட்ட நிகழ்ச்சிகளாகவும் (First Stage), B அல்லது அதன் நிரப்பி நிகழ்ச்சிகள் இரண்டாம் கட்ட நிகழ்ச்சிகளாகவும் (Second stage) அமைகின்ற சூழல்களும் உள்ளன. இச்சூழலுக்கு தொடர்புடை உதாரணங்கள் கீழே தரப்படுகின்றன.

சாரா நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

ஒரு நிகழ்ச்சி நிபந்தனையாக்கப்பட அது பிறிதொரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவை பாதிக்கமாட்டாது ஆயின் அவை இரண்டும் சாரா நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். அதாவது A, B என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகளாயின்

$$\Pr\left(A / B\right) = \Pr(A) \text{ அல்லது } \Pr\left(B / A\right) = \Pr(B) \text{ ஆகும்.}$$

தொடர்புகள் (4.5) இல் அல்லது (4.6) இல் அவற்றை முறையே பிரதியிட பின்வரும் தொடர்பு பெறப்படும்.

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \qquad \text{..............(4.7)}$$

நிகழ்தகவு பெருக்கல் விதிகள்

(Probability Multiplicative Laws)

மேலே இறுதியாக தரப்பட்ட மூன்று தொடர்களும் பெருக்கல் விதிகளாகும். அதாவது A, B என்பன யாதாயினும் இரு நிகழ்ச்சிகளாயின்,

(i) A, B சார்ந்தவையாயின்

$$\Pr(A \cap B) = \Pr\left(A / B\right) \Pr(B) \qquad \text{........................ (4.5)}$$

$$\Pr(A \cap B) = \Pr\left(B / A\right) \Pr(A) \qquad \text{........................ (4.6)}$$

இவற்றில் முறையே Pr(B), Pr(A) என்பன பூச்சிய மல்லாதவையாகும்.

(ii) A, B சாராதவையாயின்

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\ \Pr(B) \qquad \text{..................................(4.7)}$$

இவ்விதிகள் மூன்று நிகழ்ச்சிகள் A, B, C இற்கு பின்வருமாறு விரிவாக்கப்படலாம்.

(iii) A, B, C என்பன சார்ந்தவையாயின்

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr\left(A / B \cap C\right) \Pr\left(B / C\right) \Pr(C) \qquad \text{..........(4.8)}$$

(iv) A, B, C என்பன சோடி சோடியாக சாராதவையாயின்

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\ \Pr(B)\ \Pr(C) \qquad \text{...............(4.9)}$$

ஆகும்.

உதாரணம் 4.2.4 : உதாரணம் 2.2.6 இனைக் கருதுக. அங்கு மரவரிப் படத்தின் இரண்டாம் கட்ட கிளைகள் நிபந்தனை நிகழ்தகவுகளைக் காட்டுகின்றன.

A தெரிவு செய்யப்படின் ; $Pr(H) = \frac{1}{2}$

B தெரிவு செய்யப்படின் ; $Pr(H) = 1$

C தெரிவு செய்யப்படின் ; $Pr(H) = \frac{2}{3}$

எனும் நிகழ்தகவுகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$Pr\left(H/_A\right) = \frac{1}{2}, \quad Pr\left(H/_B\right) = 1, \quad Pr\left(H/_C\right) = \frac{2}{3}$$

கூட்டு நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிட பெருக்கல் விதிகளைப் பயன்படுத்துவோம். நாணயத்தில் H அல்லது T விழுவது நாணயத்தின் வகையில் சார்ந்து இருப்பதனால் முதல்கட்ட, இரண்டாம் கட்ட நிகழ்ச்சிகள் சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும். தொடர்புகள் (4.5), (4.6) இனைப் பயன்படுத்தினால்

$$Pr(A \cap H) = Pr\left(H/_A\right) Pr(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$Pr(A \cap T) = Pr\left(T/_A\right) Pr(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$Pr(B \cap H) = Pr\left(H/_B\right) Pr(B) = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$Pr(B \cap T) = Pr\left(T/_B\right) Pr(B) = 0 \times \frac{1}{3} = 0$$

$$Pr(C \cap H) = Pr\left(H/_C\right) Pr(C) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$Pr(C \cap T) = Pr\left(T/_C\right) Pr(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

உதாரணம் 4.2.5 : உதாரணம் 2.2.7 இலுள்ள தரவுகளையும் கணிப்பீடுகளையும் கருதுக. சந்தைப்படுத்தல் விளைவுக்கும் பதில் நடவடிக்கைக்குமான கூட்டு நிகழ்தகவு, ஓர நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

அங்கு $Pr(A) = 0.4, Pr(B) = 0.5, Pr(C) = 0.1$ ஆகும்.
நிபந்தனை நிகழ்தகவுகளை பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$Pr\left(P/_A\right) = 0.5, \quad Pr\left(Q/_A\right) = 0.5, \quad Pr\left(R/_A\right) = 0$$

$$Pr\left(P/_B\right) = 0, \quad Pr\left(Q/_B\right) = 0.6, \quad Pr\left(R/_B\right) = 0.4$$

$$Pr\left(P/_C\right) = 0, \quad Pr\left(Q/_C\right) = 0, \quad Pr\left(R/_C\right) = 1$$

சந்தைப்படுத்தல் விளைவு நிகழ்ச்சிகளும், பதில் நடவடிக்கை நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றிலொன்று சார்ந்தவை யாகும். எனவே கூட்டு நிகழ்தகவுகளைக் காண்பதற்கு பெருக்கல் விதிகளைப் (தொடர்புகள் 4.5, 4.6) பின்வருமாறு பயன்படுத்தலாம்.

$$Pr(A \cap P) = Pr\left(P/_A\right) Pr(A) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

$$Pr(A \cap Q) = Pr\left(Q/_A\right) Pr(A) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

$$Pr(A \cap R) = Pr\left(R/_A\right) Pr(A) = 0 \times 0.4 = 0$$

$$Pr(B \cap P) = Pr\left(P/_B\right) Pr(B) = 0 \times 0.5 = 0$$

$$Pr(B \cap Q) = Pr\left(Q/_B\right) Pr(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$$

$$Pr(B \cap R) = Pr\left(R/_B\right) Pr(B) = 0.4 \times 0.5 = 0.2$$

$$\Pr(C \cap P) = \Pr\left(P/_C\right) \Pr(C) = 0 \times 0.1 = 0$$

$$\Pr(C \cap Q) = \Pr\left(Q/_C\right) \Pr(C) = 0 \times 0.1 = 0$$

$$\Pr(C \cap R) = \Pr\left(R/_C\right) \Pr(C) = 1.0 \times 0.1 = 0.1$$

எனவே கூட்டு நிகழ்தகவு அட்டவணையை பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

	P	Q	R	மொத்தம்
A	0.2	0.2	0	0.4
B	0	0.3	0.2	0.5
C	0	0	0.1	0.1
மொத்தம்	0.2	0.5	0.3	1.0

நிரைகளின் கூட்டுத்தொகைகளாகிய சந்தைப்படுத்தல் விளைவுகளின் ஓர நிகழ்தகவுகள் ஏற்கனவே தெளிவாக உள்ளன.

நிரல்களின் கூட்டுத்தொகைகளாகிய பதில் நடவடிக்கை களுக்கான ஒரு நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு

$$\Pr(P) = \Pr(\text{உற்பத்தி அதிகரிப்பு}) = 0.2$$
$$\Pr(Q) = \Pr(\text{உற்பத்தி மாறாது}) = 0.5$$
$$\Pr(R) = \Pr(\text{உற்பத்தி குறைப்பு}) = 0.3$$

உதாரணம் 4.2.6 : ஒரு பெட்டியில் உள்ள 10 பொருட்களில் 3 பழுதடைந்தவையாகும். பிரதிவைப்பின்றி 3 பொருட்கள் ஒன்றன்பின்ஒன்றாக அப்பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப் படுகின்றன. எடுக்கப்பட்ட 3 உம் பழுதடைந்தவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தக வுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

நிகழ்ச்சிகள்

A ≡ முதலில் எடுக்கப்பட்டது பழுதானது

B ≡ இரண்டாவதாக எடுக்கப்பட்டது பழுதானது

C ≡ மூன்றாவதாக எடுக்கப்பட்டது பழுதானது

என வரையறுப்போம்.

தொடர்பு (4.8) இனைப் பயன்படுத்த

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\ \Pr\left(B/_A\right)\ \Pr\left(C/_{A \cap B}\right)$$

$$\Pr(A) = \frac{3}{10},$$

$$\Pr\left(B/_A\right) = \frac{2}{9},$$

$$\Pr\left(C/_{A \cap B}\right) = \frac{1}{8} \text{ ஆகும்}$$

$$\therefore \Pr(\text{மூன்றும் பழுது}) = \Pr(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120} \text{ ஆகும்}$$

■ சாராத நிகழ்ச்சிகள் தொடர்பான கூட்டு நிகழ்தகவுகளையும் பின்வரும் இரு உதாரணங்களிலும் பெருக்கல் விதியினையும் கருத்தில் கொள்வோம்.

உதாரணம் 4.2.7 : ஒரு தொழிற்சாலையில் இரண்டு இயந்திரங்கள் உள்ளன. ஒரு வருடத்தில் அவை பழுதடை யாமல் முறையாக இயங்குவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ ஆகும். ஒரு வருடத்துக்கான பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) அவையிரண்டும் பழுதில்லாது இயங்குதல்.
(ii) சரியாக ஒரு இயந்திரம் பழுதின்றி இயங்குதல்.
(iii) இரண்டுமே இயங்காது பழுதடைதல்

தீர்வு :

$A \equiv$ முதலாவது இயந்திரம் வருடம் முழுவதும் இயங்குதல்
$B \equiv$ இரண்டாவது இயந்திரம் வருடம் முழுவதும் இயங்குதல்

எனும் நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம்.

$Pr(A) = \frac{3}{4}$, $Pr(B) = \frac{2}{3}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

ஆயின் $Pr(A^c) = 1 - Pr(A)$

$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$Pr(B^c) = 1 - Pr(B)$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ஆகும்.

இயந்திரங்கள் இரண்டும் எதேச்சையாக இயங்குபவை அல்லது இயங்காமல் விடுபவை ஆதலால் பின்வரும் சோடி நிகழ்ச்சிகள் சாராதவை ஆகும்.
A உம் B உம், A உம் B^c உம்,
A^c உம் B உம், A^c உம் B^c உம்.

(i) Pr (இரண்டும் பழுதில்லாது இயங்குதல்)
$= Pr(A \cap B)$
$= Pr(A)\,Pr(B)$ (தொடர்பு 4.7 இன்படி)

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(ii) Pr(சரியாக ஒரு இயந்திரம் இயங்குதல்)
$=$ Pr(A மட்டும் அல்லது B மட்டும் இயங்குதல்)
$= Pr[\,(A\text{-}B) \cup (B\text{-}A)\,]$
$= Pr(A\text{-}B) + Pr(B\text{-}A)$ (தொடர்பு 3.7 இன்படி)
$= Pr(A \cap B^c) + Pr(A^c \cap B)$
$= Pr(A)\,Pr(B^c) + Pr(A^c)\,Pr(B)$ (தொடர்பு 4.7 இன்படி)

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$

(iii) Pr (இரண்டுமே இயங்காது விடல்)
$= Pr(A^c \cap B^c)$
$= Pr(A^c)\,Pr(B^c)$ (தொடர்பு 4.7 இன்படி)

$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

உதாரணம் 4.2.8 : ஒரு பெட்டியில் 8 சிவப்பு, 5 வெள்ளை நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மும்மூன்று பந்துகளாக இருமுறை பந்துகள் தெரிவுசெய்யப்பட்டன. முதல்முறை வெள்ளைப் பந்துகளும் இரண்டாம் முறை சிவப்பு பந்துகளும் தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளை பின்வரும் சந்தர்ப்பங்களில் காண்க.

(i) பிரதிவைப்பு இன்றி
(ii) பிரதி வைப்புடன்.

தீர்வு :

$A \equiv$ முதல்முறை தெரிவு செய்யப்பட்ட மூன்றும் வெள்ளை
$B \equiv$ இரண்டாம் முறை தெரிவு செய்யப்பட்ட மூன்றும் சிவப்பு
எனும் நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம். ஆயின் கேட்கப்பட்ட நிகழ்தகவு $Pr(A \cap B)$ ஆகும்.

(i) பிரதிவைப்பின்றிய முறையில் நிகழ்ச்சி B ஆனது A இல் சார்ந்த நிகழ்ச்சியாகும். எனவே தொடர்பு (4.6) இன்படி

$$Pr(A\cap B) = Pr\left(B/A\right) Pr(A)$$ ஆகும்.

இங்கு $Pr(A) = \dfrac{^{5}C_3}{^{13}C_3}$

$Pr\left(B/A\right) = \dfrac{^{8}C_3}{^{10}C_3}$ ஆகும்.

$$\therefore Pr(A\cap B) = \frac{^{5}C_3}{^{13}C_3} \times \frac{^{8}C_3}{^{10}C_3}.$$

$$= \left(\frac{5!}{3!\,2!}\right)\left(\frac{3!\,10!}{13!}\right)\left(\frac{8!}{3!\,5!}\right)\left(\frac{3!\,7!}{10!}\right)$$

$$= \frac{7}{429}$$

(ii) பிரதிவைப்புடனான முறையில் நிகழ்ச்சி B ஆனது A இல் சாராததாகும். எனவே தொடர்பு (4.7) இன்படி

$Pr(A\cap B) = Pr(A)\,Pr(B)$ ஆகும்.

இங்கு $Pr(A) = \dfrac{^{5}C_3}{^{13}C_3}$ இல் மாற்றமில்லை

$Pr(B) = \dfrac{^{8}C_3}{^{13}C_3}$ ஆகும்.

$$\therefore Pr(A\cap B) = \frac{^{5}C_3}{^{13}C_3} \times \frac{^{8}C_3}{^{13}C_3}$$

$$= \left(\frac{5!}{3!\,2!}\right)\left(\frac{3!\,10!}{13!}\right)\left(\frac{8!}{3!\,5!}\right)\left(\frac{3!\,10!}{13!}\right)$$

$$= \frac{140}{20449}$$

■ நிபந்தனை நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டுடன் தொடர்புடையதாக பின்வரும் தொடர்புகள் உள்ளன.

(அ) A_1, A_2 என்பன இருசமகால நிகழ்ச்சிகளாகவும், B என்பது தொடர்புடைய ஒரு நிகழ்ச்சியுமாயின்;

(i) A_1, A_2 தம்முள் புறநீக்கலானவையாக இருக்கையில்

$$Pr\left[(A_1\cup A_2)/B\right] = Pr\left(A_1/B\right) + Pr\left(A_2/B\right) \text{ -------(4.10)}$$

(ii) A_1, A_2 தம்முள் புறநீக்கலற்றவையாக இருக்கையில்

$$Pr\left[(A_1\cup A_2)/B\right] = Pr\left(A_1/B\right) + Pr\left(A_2/B\right) - Pr\left[(A_1\cap A_2)/B\right]$$

..........(4.11)

(ஆ) $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ என்பன யாவும் சோடி சோடியாக சாராத நிகழ்ச்சிகளாயின் பெருக்கல்விதி (4.7), (4.9) என்பன பின்வருமாறு அமையும்.

$$Pr(A_1\cap A_2\cap \ldots \cap A_n) = Pr(A_1)\ Pr(A_2)\ \ldots\ldots\ Pr(A_n)$$

அல்லது $Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} Pr(A_i)$ .... (4.12)

ஆகும். மேற்படி சாராமை திருப்தியாக்கப்படாவிடில் பெருக்கல் விதி (4.12) என்பது பின்வருமாறு அமையும்.

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots \cap A_n)$$

$$= \Pr(A_1)\ \Pr\left(A_2 \big/ A_1\right)\ \Pr\left(A_3 \big/ A_1 \cap A_2\right) \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots \Pr\left(A_n \big/ A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_{n-1}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.13)$$

(இ) A, B எனும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு

$$\Pr\left(A \big/ B\right) + \Pr\left(A^C \big/ B\right) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.14)$$

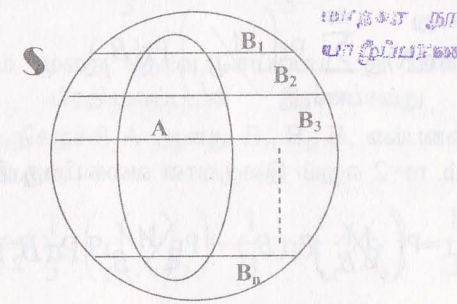
4.3 பேயிசுவின் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகள்
Baye's Concepts of Probability

இவ்வத்தியாயத்தின் முதலிரு பகுதிகளிலும் கூட்டு நிகழ்தகவு, ஓரநிகழ்தகவு, நிபந்தனை நிகழ்தகவு என்பன விளக்கப்பட்டுள்ளன. பேயிசுவின் கோட்பாடானது இவ்வகை நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்தி ஒரு நிகழ்ச்சியின் தனி நிகழ்தகவை அல்லது பிறிதொரு நிபந்தனை நிகழ்தகவை எவ்வாறு புதிய தகவல்களின் அடிப்படையில் விளக்கலாம் என்பது பற்றியதாகும். அதாவது நிபந்தனை நிகழ்தகவு கோட்பாட்டின் ஒரு வகை பிரயோகம் பேயிசுவின் நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடு ஆகும்.

பிரித்தானிய கணிதவியலாளன் தோமஸ் பேயிசு (Thomas Bayes, 1793) என்பவரின் நிகழ்தகவு ஆய்வு மூலம் இக்கோட்பாடு பிரசுரிக்கப்பட்டது. இக்கோட்பாட்டின் பிரதான பயன்பாடு என்னவெனில் ஒரு தொகுதி முன்னிலை நிகழ்தகவுகளாகிய (Prior probabilities) பழைய சூழலுக்கான நிகழ்தகவுகளை மேலதிக தகவல்களுடன் புதிய சூழலுக்கான பின்னிலை நிகழ்தகவுகளாக (Posterior probabilities) மாற்றியமைத்தல் ஆகும்.

மொத்த நிகழ்தகவு விதி Total Probability Law

ஒரு தரப்பட்ட நிகழ்ச்சி A இனுடைய நிகழ்தகவானது மாதிரி வெளி $\mathbb{S}$ ஆனது தம்முள் புறநீக்கலான நிகழ்ச்சிகள் $B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, B_m$ என்பனவற்றால் முழுமையாகப் பிரிக்கப்பட்டிருக்கையில் (Partitions) ஒவ்வொரு பிரிக்கும் நிகழ்ச்சியினதும் A உடனான கூட்டு நிகழ்தகவுகளின் மொத்த நிகழ்தகவால் தரப்படும். இது பிரிகைத் தேற்றம் (Decomposition Theorem) எனவும் கூறப்படும்.



அதாவது $\mathbb{S} = B_1 \cup B_2 \cup \ldots\ldots\ldots \cup B_m$ இற்கு

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) + \ldots\ldots + \Pr(A \cap B_m) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4.15)$$

இது தொடர்பு (4.1) இனைப் போன்றதாகும். உதாரணம் 4.1.1 இல் m=2 எனும் அடிப்படை வகை பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் பொதுமைப்படுத்திய வகையே மேலே தரப்பட்டுள்ள தொடர்பு (4.15) ஆகும்.

தொடர்பு (4.4) இன்படி ;

$$\Pr\left(A \big/ B_i\right) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $Pr(A \cap B_i) = Pr\left(\frac{A}{B_i}\right) Pr(B_i)$ ஆகும்.

எனவே

$$Pr(A) = Pr\left(\frac{A}{B_1}\right) Pr(B_1) + Pr\left(\frac{A}{B_2}\right) Pr(B_2) + \ldots\ldots + Pr\left(\frac{A}{B_m}\right) Pr(B_m)$$

அதாவது

$$Pr(A) = \sum_{i=1}^{m} Pr\left(\frac{A}{B_i}\right) Pr(B_i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.16)$$

ஆகும். m=2 எனும் இலகுவான வகையிற்கு இது

$$Pr(A) = Pr\left(\frac{A}{B_1}\right) Pr(B_1) + Pr\left(\frac{A}{B_2}\right) Pr(B_2) \text{ ஆகும்.}$$

இதில் $S = B_1 \cup B_2$ என்பதனை $S = B \cup B^c$ என எடுத்துக் கொண்டால்

$$Pr(A) = Pr\left(\frac{A}{B}\right) Pr(B) + Pr\left(\frac{A}{B^c}\right) Pr(B^c) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.17)$$

எனவும் எழுதலாம். தொடர்புகள் (4.16), (4.17) என்பன பேயிசுவின் முதலாவது விதி எனவும் சொல்லப்படும்.

உதாரணம் 4.3.1 : உதாரணம் 2.2.3 இலுள்ள மரவரிப் படத்தினையும் தரவுகளையும் எடுத்துக்கொள்வோம். இறுதியாக பச்சை நிறப்பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவை மீள கணிப்பிடுவோம்.

ஆரம்பத்தில் ஒரு பந்து தெரிவு செய்யப்படுகிறது.

B_1 முதலில் தெரிவுசெய்யப்பட்டது சிவப்பு

B_2 முதலில் தெரிவுசெய்யப்பட்டது வெள்ளை

B_3 முதலில் தெரிவுசெய்யப்பட்டது பச்சை

எனக் கொண்டால் அவை தம்முள் புறநீக்கலானவையும்

$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ உம் ஆகும்

சம எண்ணிக்கையுடைய பந்துகள் பெட்டியில் இருப்பதனால்

$$Pr(B_1) = \frac{1}{3}, \quad Pr(B_2) = \frac{1}{3}, \quad Pr(B_3) = \frac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

A ≡ "இரண்டாம் முறை தெரிவு செய்யப்பட்டது பச்சை" என வரையறுப்போம். பிரதிவைப்புடன் இரண்டாவது தெரிவு இடம்பெறுவதால் நிகழ்ச்சி A ஆனது B_1, B_2, B_3 என்பனவற்றுடன் சாராத நிகழ்ச்சியாகும்.

$$\therefore Pr\left(\frac{A}{B_1}\right) = \frac{1}{3}, \quad Pr\left(\frac{A}{B_2}\right) = \frac{1}{3}, \quad Pr\left(\frac{A}{B_3}\right) = \frac{1}{3}$$

தொடர்பு (4.16) இனை m = 3 எனும் வகைக்கு எழுதினால்

$$Pr(A) = Pr\left(\frac{A}{B_1}\right) Pr(B_1) + Pr\left(\frac{A}{B_2}\right) Pr(B_2) + Pr\left(\frac{A}{B_3}\right) Pr(B_3) \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore Pr(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ ஆகும்.}$$

இக்கணிப்பீட்டினை தொடர்பு (4.15) இன் m=3 வகையூடாக சாராமையுடன் அணுகலாம். அதாவது

$$\Pr(A) = \Pr(A \cap B_1) + \Pr(A \cap B_2) + \Pr(A \cap B_3)$$

$$= \Pr(A)\Pr(B_1) + \Pr(A)\Pr(B_2) + \Pr(A)\Pr(B_3)$$

$$= \frac{1}{3} x \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$ ஆகும்.

உதாரணம் 4.3.2 : உதாரணம் 2.2.6 இல் தரப்பட்ட தரவுகளையும், மரவரிப்படத்தினையும், உதாரணம் 4.2.4 இலுள்ள கூட்டு நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளையும் கருதுக. இப்பரிசோதனையில் தலை விழுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணிப்பிடுக.

தீர்வு:

Pr(H) இனை பொதுவாக கணித்தல் வேண்டும். அடிப்படை சூழ்நிலை தெரிவு செய்யப்பட்ட நாணயம் என்பதனைக் குறிக்கும் A,B,C எனும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$\Pr(A) = \frac{1}{3}, \Pr(B) = \frac{1}{3}, \Pr(C) = \frac{1}{3}$$

அத்துடன்

$$\Pr\left(H/A\right) = \frac{1}{2}, \Pr\left(H/B\right) = 1, \Pr\left(H/C\right) = \frac{2}{3}$$

இதில் H ஆனது A, B, C என்பனவற்றில் சார்ந்த நிகழ்ச்சி ஆகும்.

தொடர்பு (4.16) இன்படி

$$\Pr(H) = \Pr\left(H/A\right)\Pr(A) + \Pr\left(H/B\right)\Pr(B) + \Pr\left(H/C\right)\Pr(C)$$ ஆகும்.

$$\therefore \Pr(H) = \frac{1}{3} x \frac{1}{3} + 1 x \frac{1}{3} + \frac{2}{3} x \frac{1}{3} = \frac{13}{18}$$

உதாரணம் 4.3.3 : உதாரணங்கள் 2.2.7, 4.2.5 என்பனவற்றிலுள்ள தரவுகள், மரவரிப்படம், கணிப்பீடுகளை கருதுவோம். பின்வரும் தீர்மானங்களுக்கான நிகழ்தகவுகளை பேயசுவின் விதியின் உதவியுடன் காண்க.

(i) உற்பத்தியை அதிகரித்தல்

(ii) உற்பத்தியை மாறாது வைத்திருத்தல்

(iii) உற்பத்தியை குறைத்தல்

தீர்வு :

உதாரணம் 4.2.5 இல் தரப்பட்ட கூட்டுநிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள், தொடர்ந்து ஓரநிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் மூலம் மேற்படி நிகழ்தகவுகள் கணிப்பிடப்பட்டுள்ளன. இருப்பினும் பேயசுவின் விதியை பின்வருமாறு பிரயோகிக்கலாம்.

$$\Pr(A) = 0.4, \quad \Pr(B) = 0.5, \quad \Pr(C) = 0.1$$

(i) $$\Pr(P) = \Pr\left(P/A\right)\Pr(A) + \Pr\left(P/B\right)\Pr(B) + \Pr\left(P/C\right)\Pr(C)$$

$$= 0.5 x 0.4 + 0 x 0.5 + 0 x 0.1 = 0.2$$

(ii) $$\Pr(Q) = \Pr\left(Q/A\right)\Pr(A) + \Pr\left(Q/B\right)\Pr(B) + \Pr\left(Q/C\right)\Pr(C)$$

$$= 0.5 x 0.4 + 0.6 x 0.5 + 0 x 0.1 = 0.5$$

(iii) $$\Pr(R) = \Pr\left(R/A\right)\Pr(A) + \Pr\left(R/B\right)\Pr(B) + \Pr\left(R/C\right)\Pr(C)$$

$$= 0 x 0.4 + 0.4 x 0.5 + 1.0 x 0.1 = 0.3$$

எனவே உற்பத்தியை மாறாது வைத்திருத்தல் சிறந்த தீர்மானமாக இருக்கும்.

முன்னிலை நிகழ்தகவும், பின்னிலை நிகழ்தகவும்

Prior Probability and Posterior Probability

எழுமாற்றுப் பரிசோதனை அல்லது எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடு ஒன்றில் வரையறுக்கப்படும் மாதிரி விவரண வெளியில் ஒரு குறிப்பிட்ட விடயம் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றீடான நிகழ்ச்சிகள் மூலம் வரையறுக்கப்பட அவற்றினை விளக்கும் நிகழ்தகவுகள் முன்னிலை நிகழ்தகவுகள் எனப்படும்.

அதாவது B_1, B_2, ……. B_m எனும் தம்முள் புறநீக்கலான நிகழ்ச்சிகள் மூலம் ஒரு குறித்த விடயம் தொடர்பாக வெளியீடுகள் யாவும் வகுப்பாக்கப்படுமாயின் $\Pr(B_1)$, $\Pr(B_2)$,………, $\Pr(B_m)$ யாவும் முன்னிலை நிகழ்தகவுகள் ஆகும். புதிய அல்லது மேலதிய தகவல் ஒன்று நிகழ்ச்சி A மூலம் தரப்பட்டதாகக் கொள்வோம். இதன் மூலம் மேற்படி குறித்த விடயம் தொடர்பான நிகழ்ச்சிகள் பாதிக்கப்பட்டதாகக் கொண்டால் தற்போது முன்னிலை நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்தி அவற்றை விளக்குதல் பொருத்தமில்லை.

A ஒரு நிபந்தனை நிகழ்வாக அமைவதனால் பொருத்தமான நிகழ்தகவுகள்

$$\Pr\left(\frac{B_1}{A}\right),\ \Pr\left(\frac{B_2}{A}\right),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ \Pr\left(\frac{B_m}{A}\right)$$

என்பனவே நிகழ்ச்சிகள் B_1, B_2, …………., B_m என்பனவற்றை விளக்குவதற்கு பயன்படும் பிந்திய நிகழ்தகவுகளாகும். இவை பின்னிலை நிகழ்தகவுகள் எனப்படும்.

$B_1, B_2, \ldots\ldots\ldots, B_n$ நடைபெற்ற சூழலில் A நடைபெறுவதனால்

$$\Pr\left(\frac{A}{B_1}\right),\ \Pr\left(\frac{A}{B_2}\right),\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \Pr\left(\frac{A}{B_m}\right)$$ என்பன

தெரிந்தவையாக இருக்கும். B_i எனும் i ஆவது நிகழ்ச்சியை கருதுக. தொடர்பு (4.4) இன்படி,

$$\Pr\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{\Pr(B_i \cap A)}{\Pr(A)}$$ ஆகும்.

அத்துடன்

$$\Pr\left(\frac{A}{B_i}\right) = \frac{\Pr(A \cap B_i)}{\Pr(B_i)}$$ ஆகும்.

இவை இரண்டையும் ஒப்பிட்டால்

$$\Pr\left(\frac{B_i}{A}\right)\Pr(A) = \Pr\left(\frac{A}{B_i}\right)\Pr(B_i)$$ ஆகும்

$$\therefore \Pr\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{\Pr\left(\frac{A}{B_i}\right)\Pr(B_i)}{\Pr(A)} \quad \ldots\ldots\ldots (4.18)$$

தொடர்பு (4.16) இனை இத்தொடர்புடன் தொடர்புபடுத்தினால்

$$\Pr\left(\frac{B_i}{A}\right) = \frac{\Pr\left(\frac{A}{B_i}\right)\Pr(B_i)}{\sum_{i=1}^{m}\Pr\left(\frac{A}{B_i}\right)\Pr(B_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4.19)$$

என எழுதலாம். தொடர்பு (4.19) ஆனது பேயிசுவின் இரண்டாவது விதி எனவும் சொல்லப்படும். இத்தொடர்பின் மூலம் பின்னிலை நிகழ்தகவுகளைக் கணிக்கலாம்.

m = 2 எனும் இலகுவான வகையிற்கு மேற்படி விதி பின்வருமாறு அமையும்.

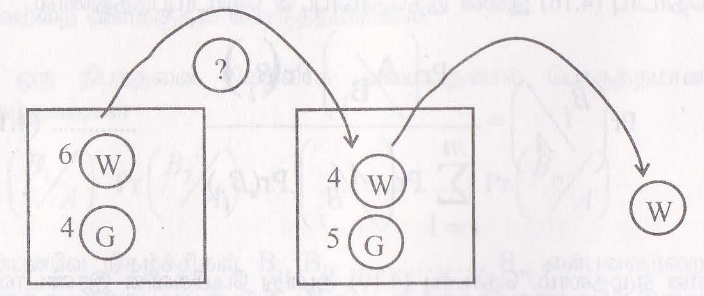
$$\Pr\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{\Pr\left(\frac{A}{B}\right)\Pr(B)}{\Pr\left(\frac{A}{B}\right)\Pr(B) + \Pr\left(\frac{A}{B^C}\right)\Pr(B^C)} \quad \ldots\ldots (4.20)$$

உதாரணம் 4.3.4 : ஒரு பெட்டியில் 6 வெள்ளைநிற பந்துகளும், 4 பச்சைநிற பந்துகளும் இரண்டாவது பெட்டியில் 4 வெள்ளைநிற பந்துகளும், 5 பச்சைநிற பந்துகளும் உள்ளன. முதலாவது பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்டு இரண்டாவது பெட்டியிலிடப்பட்டது. இரண்டாவது பெட்டியிலிருந்து எழுமாறாக மேலும் ஒரு பந்து தெரிவு செய்யப்பட்டது. பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) இரண்டாம் பெட்டியில் தெரிவு செய்யப்பட்டது வெள்ளைநிற பந்து.

(ii) இரண்டாம் பெட்டியில் வெள்ளை நிற பந்து தெரிவு செய்யப்பட்டிருந்தால் முதலாவ பெட்டியிலும் வெள்ளை நிறபந்து தெரிவுசெய்யப்பட்டிருத்தல்.

தீர்வு :
மேற்படி எழுமாற்றுப் பரிசோதனையினை பின்வரும் படம் விளக்குகிறது.



பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளை வரையறுப்போம்.

B ≡ முதல் பெட்டியில் வெள்ளைநிறப் பந்து தெரிவுசெய்யப்பட்டது.

$\Rightarrow B^c \equiv$ முதல் பெட்டியில் தெரிவானது பச்சை நிற பந்து

A≡ இரண்டாம் பெட்டியில் தெரிவானது வெள்ளை நிற பந்து

ஆயின் $\Pr(B)=\frac{6}{10}$, $\Pr(B^c)=\frac{4}{10}$

அத்துடன் இரண்டாவது பெட்டியில் இடப்பட்ட பந்தின் நிறத்துக்கு ஏற்ப

$$\Pr\left(A/B\right)=\frac{5}{10},\ \Pr\left(A/B^c\right)=\frac{4}{10}$$

(i) தொடர்பு (4.17) இன்படி

$$\Pr(A) = \Pr\left(A/B\right)\Pr(B)+\Pr\left(A/B^c\right)\Pr(B^c)$$

$$=\frac{5}{10}\ x\ \frac{6}{10}+\frac{4}{10}\ x\ \frac{4}{10}$$

$$=\frac{46}{100}=0.46$$

(ii) தொடர்பு (4.18) இன்படி

$$\Pr\left(B/A\right)=\frac{\Pr\left(A/B\right)\Pr(B)}{\Pr(A)}$$

$$=\frac{\frac{5}{10}\ x\ \frac{6}{10}}{0.46}=\frac{0.30}{0.46}=0.65$$

உதாரணம் 4.3.5 : உதாரணம் 2.2.7 இன் தொடர்ச்சியினை உதாரணங்கள் 4.2.5, 4.3.3 இலுள்ள கணிப்பீடுகளுடன் எடுத்துக் கொள்க. பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) உற்பத்தியை மாறாமல் வைத்திருப்பது முடிவாயின் சந்தைப்படுத்தல் சுமாரான வெற்றி வாய்ப்பைத் தந்திருத்தல்

(ii) உற்பத்தியை குறைப்பது முடிவாயின் சந்தைப்படுத்தல் தோல்வியில் முடிந்திருத்தல்

(iii) சந்தைப்படுத்தல் கூடுதலான வேளைகளில் வெற்றி வாய்ப்பை தரவேண்டுமாயின் சிறந்த பதில் நடவடிக்கை யாது ?

தீர்வு :

சந்தைப்படுத்தல் "வெற்றி", "சுமாரான வெற்றி", "தோல்வி" என்பனவற்றில் ஒரு பிரதிபலனை ஏற்படுத்துவது முன்னிலை நிகழ்வாகும். முன்னிலை நிகழ்தகவுகள் முறையே

$\Pr(A)=0.4, \quad \Pr(B)=0.5, \quad \Pr(C)=0.1$ ஆகும்.

இந்நிகழ்தகவுகள் ஏற்கனவே முன்னைய உதாரணத்தில் விபரிக்கப்பட்டுள்ளன.. உற்பத்தியை அதிகரித்தல்; (P), மாறாது வைத்திருத்தல் (Q), குறைத்தல் (R) என்பன பிந்திய மேலதிக தகவல்கள் ஆகும்.

எனவே பின்னிலை நிகழ்தகவுகள்

P இற்கு ; $\Pr\left(A/P\right), \Pr\left(B/P\right), \Pr\left(C/P\right)$

Q இற்கு ; $\Pr\left(A/Q\right), \Pr\left(B/Q\right), \Pr\left(C/Q\right)$

R இற்கு; $\Pr\left(A/R\right), \Pr\left(B/R\right), \Pr\left(C/R\right)$

என்பனவாகும். எனவே கேட்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகட்கு மட்டும் தொடர்பு (4.18) அல்லது (4.19) இனை m=3 இற்கு பயன்படுத்துவோம்.

(i) $\Pr(Q)=0.5$ (உதாரணம் 4.3.3 இல்)

$$\therefore \Pr\left(B/Q\right)=\frac{\Pr\left(Q/B\right)\Pr(B)}{\Pr(Q)}$$

$$=\frac{0.6 \times 0.5}{0.5} = 0.60$$

(ii) $\Pr(R)=0.3$ (உதாரணம் 4.3.3 இல்)

$$\therefore \Pr\left(C/R\right)=\frac{\Pr\left(R/C\right)\Pr(C)}{\Pr(R)}$$

$$=\frac{1.0 \times 0.1}{0.3} = 0.33$$

(iii) வெற்றி வாய்ப்பு (A) கூடுதலாக இருப்பதுடன் எந்த நடவடிக்கை (P, Q அல்லது R) தொடர்புடையது என்பதனை கண்டறிவதற்கு மூன்று பின்னிலை நிகழ்தகவுகளையும் கணித்து ஒப்பிடுதல் வேண்டும்.

$\Pr(P)=0.2$ (உதாரணம் 4.3.3 இல்)

$$\therefore \Pr\left(A/P\right)=\frac{\Pr\left(P/A\right)\Pr(A)}{\Pr(P)}$$

$$=\frac{0.5 \times 0.4}{0.2}=1$$

$$\therefore \Pr\left(A/Q\right)=\frac{\Pr\left(Q/A\right)\Pr(A)}{\Pr(Q)}$$

$$=\frac{0.5 \times 0.4}{0.5}=0.4$$

$$\therefore \Pr\left(A/R\right)=\frac{\Pr\left(R/A\right)\Pr(A)}{\Pr(R)}$$

$$=\frac{0 \times 0.4}{0.3}=0$$

∴ பின்னிலை நிகழ்தகவுகள் 1.0, 0.4, 0.0 என்பனவற்றை ஒப்பிடுகையில் உற்பத்தியை அதிகரிப்பது எப்பொழுதும் வெற்றி வாய்ப்பைத்தரும் சூழலை உருவாக்குகின்றது என முடிவெடுக்கலாம்.

உதாரணம் 4.3.6 : ஒரு தொழிற்சாலையில் பயன்பாட்டி லுள்ள U,V,W எனும் மூன்று இயந்திரங்கள் மொத்த உற்பத்தியில் முறையே 30, 30, 40 வீதங்களை உற்பத்தி யாக்குகின்றன. அவற்றின் தனித்தனி உற்பத்தியில் முறையே 1,3,2 சதவீதங்கள் பழுதடைந்தவையாகும். ஒரு குறித்த உற்பத்தி செய்கையில் முழு உற்பத்தியிலும் இருந்து ஒரு பொருள் எழுமாறாக தெரிவுசெய்யப்பட்டபோது அது பழுதடைந்ததாக இருக்கக் காணப்பட்டது. மொத்த உற்பத்தியில் பழுதடைந்த சதவீதம் என்னவாகும்? பழுதடைந்த உற்பத்தி ஒன்று இனங்காணப்படு கையில் அது ஒவ்வொரு இயந்திரத்திலும் இருந்து உற்பத்தி யாக்கப்பட்டிருப்பதற்கான தனித்தனி நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

தொடர்புடைய நிகழ்ச்சிகளை பின்வருமாறு வரையறுப்போம்

U ≡ தெரிவுசெய்யப்பட்டது இயந்திரம் U இனது உற்பத்திப் பொருள்

V ≡ தெரிவு செய்யப்பட்டது இயந்திரம் V இனது உற்பத்திப் பொருள்

W ≡ தெரிவு செய்யப்பட்டது இயந்திரம் W இனது உற்பத்திப் பொருள்

D ≡ தெரிவு செய்யப்பட்டது பழுதடைந்த பொருள்

தரவின்படி முன்னிலை நிகழ்தகவுகள்
$\Pr(U)=0.3, \quad \Pr(V)=0.3, \quad \Pr(W)=0.4$ ஆகும்.

மேலும் ஒவ்வொரு இயந்திரத்திற்கும் பழுதடைந்த உற்பத்திக்கான தரவுகளில் இருந்து,

$$\Pr\left(D/_U\right)=0.01, \quad \Pr\left(D/_V\right)=0.03, \Pr\left(D/_W\right)=0.02$$

என்பது தெளிவாகின்றது.

தொடர்பு (4.16) இன்படி;

$$\Pr(D)=\Pr\left(D/_U\right)\Pr(U)+\Pr\left(D/_V\right)\Pr(V)+\Pr\left(D/_W\right)\Pr(W)$$

$$=0.01 \times 0.3+0.03 \times 0.3+0.02 \times 0.4$$
$$=0.02$$

எனவே மொத்த உற்பத்தியில் இரண்டு சதவீதம் பழுதடைந்ததாகும். பழுதடைந்த உற்பத்தி இனங்காணப் பட்ட சூழ்நிலையில் பின்னிலை நிகழ்தகவுகளை தனித்தனி இயந்திரங்களுக்கு கணிப்பிடுவோம்.

(i) $$\Pr\left(U/_D\right)=\frac{\Pr\left(D/_U\right)\Pr(U)}{\Pr(D)}$$

$$=\frac{0.01 \times 0.3}{0.02}=0.15$$

(ii) $$\Pr\left(V/_D\right)=\frac{\Pr\left(D/_V\right)\Pr(V)}{\Pr(D)}$$

$$=\frac{0.03 \times 0.3}{0.02}=0.45$$

(iii) $$\Pr\left(W/_D\right)=\frac{\Pr\left(D/_W\right)\Pr(W)}{\Pr(D)}$$

$$=\frac{0.02 \times 0.4}{0.02}=0.40$$

இக்கணிப்பீடுகளின்படி இரண்டாவது இயந்திரம் V இலிருந்து பழுதடைந்த உற்பத்தி நடைபெறுவதற்கு அதிக வாய்ப்பு உள்ளது. இது முன்னிலை நிகழ்தகவு மூலம் தெளிவாக இருப்பினும் மொத்த உற்பத்தியில் ஒப்பீட்டின்படி பிந்திய தகவல்களின் அடிப்படையில் தெளிவாக்கப்பட்டுள்ளது.

பேயிசுவின் தீர்மானமெடுத்தல் (Baye's Decision Making)

நிகழ்தகவுக்கோட்பாடுகளின் அடிப்படையில் பொருத்தமான நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் மூலம் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றீடான நடவடிக்கைகளில் சிறந்ததொன்றை தெரிவு செய்து பிரயோகித்தல் விஞ்ஞானமுறைத் தீர்மானமெடுத்தல் (Scientific decision making) எனப்படும்.

இவ்வகையில் முன்னிலை நிகழ்தகவுகள், பின்னிலை நிகழ்தகவுகள் யாவற்றையும் கருத்தில் கொண்டு பேயிசுவின் நிகழ்தகவு விதிகளின் அடிப்படையில் சிறந்த தீர்மானமொன்று தேர்ந்தெடுக்கப்படுமாயின் அதனை பேயிசுவின் தீர்மானமெடுத்தல் என்போம்.

Chapter 5

Random Variables and Probability Distributions

At the end of this Chapter you will be able to

(1) Define and Classify "Random Variable"

(2) Construct "Probability Distributions" of random variables.

(3) Construct "Probability Functions" of random variables.

(4) Evaluate "Expectation" and "Variance" of random variables

(5) Explain the "Behavior" of a random variable.

5. எழுமாற்று மாறிகளும் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களும்

Random Variables and Probability Distributions

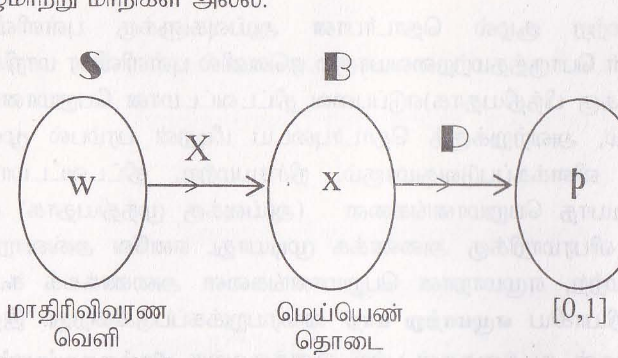
புள்ளிவிபரமுறை ஆய்வுகள் அடிப்படையில் இருவகைப் படுகின்றன. அவை நிச்சயமான சூழலின் கீழான ஆய்வு, நிச்சயமற்ற சூழலின் கீழான ஆய்வு என்பனவாகும். நிச்சயமான சூழலில் வரையறுக்கப்படும் புள்ளிவிபரமாறிகள் அவை தொடர்பான இயல்புகள், நடத்தைகள் போன்ற அறிவு புள்ளியியல் கற்றலில் பெறப்பட வேண்டிய ஆரம்ப அறிவு ஆகும். இவ்விபரங்கள் விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் மூலம் தரப்படுகின்றன. **விவரணப் புள்ளிவிபரவியல்** (இளங்குமரன், 1998) என்ற நூலில் இவை தொடர்பான விபரங்களை கற்குமாறு வாசிப்பவர்கள் கேட்கப்படுகின்றனர்.

நிச்சயமற்ற சூழல் தொடர்பான ஆய்வுகளுக்கு புள்ளிவிபர மாறிகள் பொருத்தமற்றவையாகும் ஏனெனில் புள்ளிவிபர மாறிகள் (ஆய்வுக்கு பிந்தியதாக)எடுப்பவை திட்டவட்டமான பெறுமானங்க ளாகவும், அவற்றுக்குத் தொடர்புடைய மீடிறன் பரம்பல் மூலம் அவை விளக்கப்படுவதுமாகும். நிச்சயமற்ற, திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியாத பெறுமானங்களை (ஆய்வுக்கு முந்தியதாக) ஒரு புள்ளி விபரமாறிக்கு அணைக்க முடியாது. எனவே அவ்வாறான நிச்சயமற்ற, எழுமாறான பெறுமானங்களை அணைக்கக் கூடிய ஒருமாறியாகிய **எழுமாற்று மாறி** வரையறுக்கப்படுகின்றது. இதன் இயல்புகள், நடத்தைகள் பற்றி விளக்குவதற்கு **நிகழ்தகவுப்பரம்பல்** பற்றிய அறிவு அவசியமாகின்றது. எழுமாற்று மாறிகளையும், நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களையும் விளங்கிக் கொள்வதற்கான முன் அறிவு இந்நூலின் முதல் நான்கு அலகுகளிலும் விரிவாக விளக்கப்பட்டுள்ளது.

5.1 எழுமாற்று மாறிகள் (Randori Variables)

எழுமாற்றுப்பரிசோதனைகளில் பெறப்படும் வெளியீடுகள் அல்லது எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடுகளில் தோன்றும் அவதானிப்புகளில் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒவ்வொன்றாக மெய்யெண் பெறுமானங்கள் தொடர்புபடுமாறு எழுமாற்று மாறிகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. அதாவது எழுமாற்று மாறியின் ஒவ்வொரு இயல்தகு பெறுமானத்துக்கும் ஒவ்வொரு எழுமாற்று வெளியீடு இருக்கும்.

புள்ளி விபரமாறியொன்றை நாம் வரையறுக்கையில் அது எடுக்கின்ற அல்லது எடுக்கப்போகின்ற இயல்தகு பெறுமானங் களை முன்கூட்டியே கூறமுடியாது. ஆனால் ஒரு எழுமாற்று மாறியினை வரையறுக்கும் போது கூடவே அதன் இயல்தகு பெறுமானங்களையும் வரையறுக்கின்றோம். இதுவே புள்ளி விபரமாறிக்கும், எழுமாற்று மாறிக்கு மிடையிலான அடிப்படை வேறுபாடு ஆகும். எழுமாற்று மாறிகளை புள்ளிவிபரமாறிகள் எனவும் கூறலாம் ஆனால் எல்லாப் புள்ளி விபரமாறிகளும் எழுமாற்று மாறிகள் அல்ல.



பகுதி 3.1 இல் நிகழ்தகவு வெளிவரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. அங்கு ஒவ்வொரு வெளியீட்டுக்கும் நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்பட்டது. இங்கு ஒவ்வொரு வெளியீட்டுக்கும் ஒவ்வொரு மெய்யெண் பெறுமானம் வரையறுக்கப்படும். அவ்வாறான மெய்ப்பெறுமானங் களின் மேல் நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்படும். இதில் X என்பது

மாதிரிவிவரண வெளியில் வரையறுக்கப்படும் சார்பு அல்லது படமாக்கல் ஆகும். விம்பங்கள் மெய்யெண்களாக இருக்குமாறு வரையறுக்கப்படுவதனால் X என்பது மெய்ப் பெறுமானச் சார்பு (Real Valued Function) ஆகும் அதாவது எழுமாற்று மாறி X என்பது எழுமாற்றுப் பரிசோதனை ஒன்றின் மாதிரி விவரண வெளியில் (Domain) வரையறுக்கப்படும் மெய்ப் பெறுமானச் சார்பு ஆகும். மேலே காட்டப்பட்ட $\mathbb{B}$ எனும் இணை ஆட்சி (Co-Domain) ஆனது எழுமாற்று மாறியின் இயல்தகு பெறுமானங்களைக் (Possible Values) கொண்ட ஒரு தொடை ஆகும். இத் தொடை $\mathbb{B}$ ஆனது ஒரு மெய்யெண் கோட்டின் தொடைப்பிரிவு ஆகும்.

எழுமாற்று மாறிகளின் இயல்தகு பெறுமானங்களின் அடிப்படையில் அவற்றை இருவகைப்படுத்தலாம் அவையாவன:

(1) பின்னக மாறிகள் (Discrete Variables)

(2) தொடர்ச்சியான மாறிகள் (Continuous Variables)

இணையாட்சித்தொடை $\mathbb{B}$ ஆனது பின்கைப் பெறுமானங்களைக் கொண்ட ஒரு தொடையாயின் தொடர்புடையது ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறியாரும். ஒரு தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிக்கு தொடை $\mathbb{B}$ ஆனது மெய்யெண் கோட்டின் ஒரு தொடர்ச்சியான பகுதியாக அல்லது முழுமையான மெய்யெண் கோடாக இருக்கும்.

உதாரணம் 5.1.1: ஒரு நாணயத்தை சுண்டுதல் ஒரு தாயக் கட்டையை உருட்டுதல் எனும் இரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனை களையும் கருதுக. இவையிரண்டினதும் மாதிரி விவரண வெளிகள்

$$\mathbb{S} = \{H, T\}$$
$$\mathbb{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

என்பனவற்றை உதாரணம் 3.1.1 (1), (2) இல் காணலாம். எழுமாற்று வெளியீடுகள் எண்பெறுமானங்களாகவோ, அல்லது பண்புருக்களாகவோ அமைவதனை மேற்படி விவரண வெளிகள் காட்டுகின்றன. எவ்வாறிருப்பினும் எழுமாற்றுமாறிக்கு வரையறுக்கப்படுவது வேறு மெய் எண் பெறுமானங்கள் ஆகும்.

நாணயம் சுண்டும் பரிசோதனையில் போட்டியாளருக்கு தலை விழுதல் வெற்றி எனவும் பூவிழுதல் தோல்வி எனவும் கொள்ளப்பட்டு தலை விழுதல் மூலம் அவருக்கு 1 ரூபா கிடைக்கும் எனவும் அல்லாவிடில் 1ரூபா அவர் கொடுக்க வேண்டும் எனவும் சொல்லப்பட்டால் அதனை பின்வருமாறு எழுமாற்று மாறி மூலம் வரையறுக்கலாம்.

$$X = \begin{cases} 1\,; & H \text{ விழுதல்} \\ -1\,; & T \text{ விழுதல்} \end{cases}$$

இங்கு இயல்தகு வெளியீடுகள் இரண்டுக்குமே மெய்யெண்கள் அணைக்கப்பட்டுள்ளதனை அவதானிக்கவும் எனவே இவ் வெழுமாற்று மாறியை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

$X \equiv$ "போட்டியாளரின் வெற்றி தொகை"

இதில் $\mathbb{B} = \{-1, 1\}$ ஆகும்.

தாயக்கட்டைப் பரிசோதனையில் போட்டியாளருக்குக் கிடைக்கும் வெற்றி தொகை தொடர்பாக பின்வரும் நிபந்தனைகளைக் கருதுக.

P $\equiv$ விழுந்த எண்ணுக்கு ஏற்ப போட்டியாளர் பணம் பெறுவார்

Q $\equiv$ ஒற்றை எண்விழுந்தால் வெற்றியுடன் அதேயளவு தொகை பணத்தைப் பெறுவார் அல்லாவிடில் தோல்வியாகும், அத்துடன் பணம் கிடைக்காது.

இவையிரண்டிலும் X, $\mathbb{B}$ என்பன பின்வருமாறு அமையலாம்.

$$X = \begin{cases} 1\,; & 1 \text{ விழுதல்} \\ 2\,; & 2 \text{ விழுதல்} \\ 3\,; & 3 \text{ விழுதல்} \\ 4\,; & 4 \text{ விழுதல்} \\ 5\,; & 5 \text{ விழுதல்} \\ 6\,; & 6 \text{ விழுதல்} \end{cases} \qquad \mathbb{B} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X = \begin{cases} 1\,; & 1 \text{ விழுதல்} \\ 0\,; & 2 \text{ விழுதல்} \\ 3\,; & 3 \text{ விழுதல்} \\ 0\,; & 4 \text{ விழுதல்} \\ 5\,; & 5 \text{ விழுதல்} \\ 0\,; & 6 \text{ விழுதல்} \end{cases} \qquad \mathbb{B} = \{0, 1, 3, 5\}$$

பல எழுமாற்று மாறிகளை ஒரு மாதிரிவிவரண வெளியில் வரையறுக்கலாம் என்பது இவ்வுதாரணத்தில் தெளிவாகின்றது. மேலே விபரிக்கப்பட்ட X ஆனது மூன்று சந்தர்ப்பத்திலும் பின்னக எழுமாற்று மாறியாக உள்ளது என்பதனை $\mathbb{B}$ இனைக்கொண்டு கூறலாம்.

உதாரணம் 5.1.2 : பெட்டியொன்றில் உள்ள வெள்ளைநிற, கறுப்புநிற பந்துகளிலிருந்து இருபந்துகள் எடுக்கப்படும் எழுமாற்று பரிசோதனையினை கருதுக. இதன் மாதிரிவிவரண வெளி

$$\mathbb{S} = \{WW, WB, BW, BB\}$$

என்பது உதாரணம் 3.1.3 இல் தரப்பட்டுள்ளது. எழுமாற்று மாறி Y ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$Y \equiv$ "தெரிவு செய்யப்பட்ட கறுப்பு நிறபந்துகளின் எண்ணிக்கை" ஆயின்

$$Y = \begin{cases} 0 ; & \text{வெளியீடு } \{WW\} \text{ இல்} \\ 1 ; & \text{வெளியீடு } \{WB, BW\} \text{ இல்} \\ 2 ; & \text{வெளியீடு } \{BB\} \text{ இல்} \end{cases}$$

இதில் $\mathbb{B} = \{0, 1, 2\}$ பின்னகப் பெறுமானங்களை கொண்டிருப்பதால் மாறி Y பின்னக எழுமாற்று மாறியாகும்.

உதாரணம் 5.1.3 : நாணயம் ஒன்று மூன்று முறை சுண்டப்படும் எழுமாற்றுப்பரிசோதனையினைக் கருதுக. இதன் மாதிரி விவரண வெளி

$$\mathbb{S} = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

என்பது உதாரணம் 2.2.4, 3.1.4(5) என்பவற்றில் தரப்பட்டுள்ளது. எழுமாற்று மாறி Z ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகின்றது.

$Z \equiv$ விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை" ஆயின் ;

$$Z = \begin{cases} 0 : & \{TTT\} \\ 1 : & \{HTT, THT, TTH\} \\ 2 : & \{HHT, HTH, THH\} \\ 3 : & \{HHH\} \end{cases}$$

அத்துடன் $\mathbb{B} = \{0, 1, 2, 3\}$ ஆகும் எனவே Z ஆனது ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறியாகும்.

உதாரணம் 5.1.4: ஒரு பொருளின் நிறையானது ஆரம்பத்தில் 50 கிராமாகவிருந்து சீராக அதிகரித்து அதியுயர் நிறை 100 கிராமாக மாற்றமடைகின்ற நிகழ்வு ஒரு எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடு ஆகும். எந்த ஒரு சந்தர்ப்பத்திலும் அதன் நிறை சமவாய்ப்புடன் இருக்கின்றது. இதனை விளக்குக.

தீர்வு

$X =$ "பொருளின் நிறை" என்போம்

$\Rightarrow 50 \leq X \leq 100$ ஆகும்

இதில் $\mathbb{B} = [50,100]$ என்பது மெய் எண் கோட்டின் ஒரு தொடைப்பிரிவு ஆகவும் தொடர்ச்சியானதாகவும் உள்ளது. எனவே மாறி X ஒரு தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி ஆகும்.

■ எழுமாற்று மாறிகளின் நேர்கோட்டு உருமாற்றங்களும் எழுமாற்று மாறிகளாகும். அதாவது X என்பது ஒரு எழுமாற்று மாறியாகவும் a, b என்பன மாறிலிகாளகவும் இருந்தால்

$Y = aX$, அல்லது

$Y = aX+b$ .... (5.1)

என்பனவும் எழுமாற்று மாறிகள் ஆகும். அத்துடன் X, Y என்பன ஒரேகருத்துடன் ஒரேமாதிரியான வரைவிலக் கணத்துடன் வரையறுக்கப்பட்ட எழுமாற்று மாறிகளாயின்

$U = aX + bY$ .... (5.2)

$V = aX - bY$ .... (5.3)

என்பனவும் எழுமற்று மாறிகளாகும். இக் கோட்பாடுகளை இவ்வாறே பலமாறிகளுக்கும் விரிவு படுத்தலாம். மேலும்

$W = XY$ எனும் பெருக்கமும் .... (5.4)

$= X/Y$ எனும் பிரித்தலும் .... (5.5)

கூட எழுமாற்று மாறிகளாகும் இப் பிரித்தலில் Y எனும் எழுமாற்றுமாறி பூச்சிய பெறுமானத்தை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமாக இருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 5.1.5 : ஒரு கோடலற்ற நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்பட்ட எழுமாற்றுப் பரிசோதனையினை கருதுக. தலை

விழுவது வெற்றி ஆகும். முதல் முறை வெற்றி கிடைத்தால் போட்டியாளர் 3 ரூபா பெறுவார், அத்துடன் இரண்டாம்முறை வெற்றிகிடைத்தால், 2 ரூபாவும் மூன்றாம் முறை வெற்றி கிடைத்தால் 1 ரூபாவும் பெறுவார் எனவும் கூறப்பட்டது. வெற்றித் தொகையினை விபரிக்குக.

தீர்வு :
இப்பரிசோதனைக்கான மாதிரி விவரண வெளி உதாரணம் 5.1.3 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

தலைகளை எண்ணுவது நோக்கமாதலால் ஒரு தனியான சுண்டுதலுக்கு X தலைகளின் எண்ணிக்கையை குறிக்குமாறின்

$$X = \begin{cases} 1\ ; & H \text{ விழுதல்} \equiv \text{வெற்றி} \\ 0\ ; & T \text{ விழுதல்} \equiv \text{தோல்வி} \end{cases}$$

என்பது ஒரு எழுமாற்று மாறியாகும் விழுந்த மொத்த தலைகளின் எண்ணிக்கை உதாரணம் 5.1.3 இல் விபரிக்கப்பட்டுள்ளது அதாவது

$Z \equiv$ "மொத்தமாக விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை" ஆகும்.

இதனைப் பின்வருமாறு பெறலாம். X என்பது மூன்று மீள வரும் சுண்டுதல்களிலும் முறையே U,V,W என வரையறுக்கப்பட்டால்.

$$U = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad V = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases} \quad W = \begin{cases} 1, \\ 0 \end{cases}$$

என X இனைப்போல் வரையறுக்கலாம். ஆயின்

$Z = U + V + W$ ஆகும்.

தொடர்பு (5.2) இன்படி இது ஒரு எழுமாற்று மாறியாகும் இதன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் மேற்படி உதாரணம் 5.1.3 இல் தரப்பட்டுள்ளது.

போட்டியின் முடிவில், மூன்று சுண்டுதல்களின் முடிவில், வெற்றித் தொகை Y இனை போட்டியாளன் பெறுவானாயின்

$$\begin{aligned} Y &= 3 \times U + 2 \times V + 1 \times W \\ &= 3U + 2V + W \text{ ஆகும்.} \end{aligned}$$

தொடர்பு (5.2) இன்படி இதுவும் ஒரு எழுமாற்று மாறியாகும்.

U, V, W என்பன 0, 1 இல் யாதாயினுமொன்றை எடுக்குமாதலால், 3U என்பது 0, 3 இனையும் 2V என்பது 0, 2 இனையும் W ஆனது 0, 1 இனையும் இயல்தகு பெறுமானங்களாக கொண்டிருக்கும் எனவே Y இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு அமையலாம்.

$$Y = \begin{cases} 0\ ; & U = 0, V = 0, W = 0 \\ 1\ ; & U = 0, V = 0, W = 1 \\ 2\ ; & U = 0, V = 1, W = 0 \\ 3\ ; & U = 0, V = 1, W = 1 \ \& \ U = 1, V = 0, W = 0 \\ 4\ ; & U = 1, V = 0, W = 1 \\ 5\ ; & U = 1, V = 1, W = 0 \\ 6\ ; & U = 1, V = 1, W = 1 \end{cases}$$

5.2 நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்
(Probability Distributions)

புள்ளிவிபர மாறி யொன்றின் நடத்தையினை அதன் மீடிறன் பரம்பல் விளக்குகின்றது. அதாவது புள்ளிவிபரமாறியின் பெறுமானங்கள் ஒரு புள்ளி விபரப்பரம்பலை அமைப்பதில் ஒவ்வொரு புள்ளிவிபரப் பெறுமானமும் எத்தனை முறை மீளமீள வருகின்றன என்பதனை அம்மீடிறன் பரம்பல் மூலம் விளக்கலாம். இதேபோல் ஒரு எழுமாற்று மாறியின் நடத்தையினை அதன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் விளக்குகின்றது. அதாவது எழுமாற்றுமாறி யொன்றின் இயல்தகு பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றும்

ஏற்படுவதற்கான சாத்தியக் கூறுகளை நிகழ்தகவுகள் மூலம் விளக்குவது நிகழ்தகவுப் பரம்பலாகும். எனவே நிகழ்த்கவுப் பரம்பலை (x,ƥ) எனும் சோடிப் பெறுமானங்களாக உணர்த்தலாம்.

உதாரணம் 5.2.1 : மேலே உதாரணம் 5.1.1 இல் X இனால் குறிக்கப்பட்ட தரப்பட்ட மூன்று வகையான மாறிகளினதும் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை எழுதுக.

தீர்வு :

மாறி X இன் ஒவ்வொரு இயல்தகு பெறுமானத்துக்கும் உரிய நிகழ்தகவினை தருவது நிகழ்தகவுப் பரம்பலாகும். X இன் மூன்று வகையையும் தனித்தனியாக கருதுவோம்.

(i) $Pr(X=1) = Pr(H) = \frac{1}{2}$

$Pr(X=-1) = Pr(T) = \frac{1}{2}$

X	1	-1	மொத்தம்
ƥ	0.5	0.5	1

(ii) $Pr(X=1) = Pr$(இல 1 விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

$Pr(X=2) = Pr$(இல 2 விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

....

....

$Pr(x=6) = Pr$(இல 6 விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

X	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
ƥ	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(iii) $Pr(X=0) = Pr$(2,4,6 விழுதல்)

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ (தொடர்பு 3.7 இன்படி)

$= \frac{1}{2}$

$Pr(X=1) = Pr$(இல 1விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

$Pr(X=3) = Pr$(இல 3 விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

$Pr(X=5) = Pr$(இல 5 விழுதல்) $= \frac{1}{6}$

X	0	1	3	5	மொத்தம்
ƥ	½	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

உதாரணம் 5.2.2 : மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 5.1.2 இல் வரையறுக்கப்பட்ட மாறி Y இன் நிகழ்தகவுப்பரம்பலை எழுதுக.

தீர்வு :

வரையறுக்கப்பட்ட எழுமாற்று மாறி

$$Y = \begin{cases} 0\,; & \{WW\} \\ 1\,; & \{WS, BW\} \\ 2\,; & \{BB\} \end{cases}$$ ஆகும்.

மேற்படி எழுமாற்று பரிசோதனை WR,WOR முறைகளிரண்டி லும் நடத்தப்படலாம் என்பது உதாரணம் 3.1.3 இல் விளக்கப்பட் டுள்ளது. எனவே நிகழ்தகவுப் பரம்பலை இரு வழிகளுக்கும் அமைப்போம்.

WR முறையில் :

$Pr(Y=0) = Pr(WW) = \frac{16}{49}$

$Pr(Y=1) = Pr(WB, BW) = \frac{12}{49} + \frac{12}{49} = \frac{24}{49}$

$$Pr(Y=2) = Pr(BB) = \frac{9}{49}$$

Y	0	1	2	மொத்தம்
þ	$\frac{16}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{9}{49}$	1

WOR முறையில் ;

$$Pr(Y=0) = Pr(WW) = \frac{12}{42}$$

$$Pr(Y=1) = Pr(WB, BW) \quad \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$$

$$Pr(Y=2 = Pr(BB) = \frac{6}{42}$$

Y	0	1	2	மொத்தம்
þ	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{6}{42}$	1

உதாரணம் 5.2.3 : மேலே உதாரணம் 5.1.3, மற்றும் 5.1.5 என்பனவற்றில் விபரிக்கப்பட்ட மாறிகள் Z, Y என்பனவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களைக் காண்க.

தீர்வு:

முதலில் மாதிரி விவரண வெளியிலுள்ள எட்டு வெளியீடுகளின் நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடுவோம். இதற்கான நிகழ்தகவு கணிப்பீடுகள் மரவரிப்பட முறையில் உதாரணம் 2.2.4 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளன. சுண்டப்பட்டது ஒரு கோணலற்ற நாணயமாதலால் ஒரு தனியான சுண்டுதலில்

$$Pr(H) = ½, \qquad Pr(T) = ½ \text{ ஆகும்}$$

எனவே Pr (வெற்றி) = ½, Pr (தோல்வி) = ½ எனவும் கூறலாம். மூன்று சுண்டுதல்களும் ஒன்றிலொன்று சாராதவையாதலால் தொடர்பு (4.9) இன்படி

$$Pr(HHH) = Pr(H)\,Pr(H)\,Pr(H)$$

$$= ½ \times ½ \times ½ = \frac{1}{8} \text{ ஆகும்.}$$

இதேபோல் ஏனைய 7 வெளியீடுகளும் $\frac{1}{8}$ எனும் சமநிகழ்தகவு களை கொண்டிருக்கும் எனக் காட்டலாம்

$$\therefore\ Pr(Z=0) = Pr(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$Pr(Z=1) = Pr(HTT, THT, TTH) = \frac{3}{8}$$

$$Pr(Z=2) = Pr(HHT, HTH, THH) = \frac{3}{8}$$

$$Pr(Z=3) = Pr(HHH) = \frac{1}{8}$$

Z	0	1	2	3	மொத்தம்
þ	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

வெற்றித் தொகை Y இற்கான மாதிரி வெளியீடுகள் பின்வருமாறு அட்டவணைமூலம் தரப்படுகின்றன.

Y	U,V,W	வெளியீடுகள்
0	0,0,0	TTT
1	0,0,1	TTH
2	0,1,0	THT
3	0,1,1 / 1,0,0	THH, HTT
4	1,0,1	HTH
5	1,1,0	HHT
6	1,1,1	HHH

$$\therefore\ Pr(Y=0) = Pr(TTT) = \frac{1}{8}$$

இதேபோல் $Pr(Y=1), Pr(Y=2), Pr(Y=4),$
$Pr(Y=5), Pr(Y=6)$ என்பனவும் $= \frac{1}{8}$
இற்கு சமமாகும்

ஆனால் $Pr(Y=3) = \frac{2}{8}$ ஆகும்

$\therefore$

Y	0	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

மேற்படி மூன்று உதாரணங்களிலும் விளக்கப்பட்டவை பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் ஆகும்.

நிகழ்தகவுப்பரம்பல்களின் வகைகள்

(Types of Probability Distributions)

எழுமாற்று மாறிகள் இருவகைப்படும் என மேலே விபரிக்கப்பட்டுள்ளது. அதேபோன்று அவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களும் அமைவதனால் அவற்றை இருவகைப்படுத்தலாம் அவையாவன

(1) பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்
(Discrete Probability Distributions)

(2) தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்
(Continuous Probability Distributions)

பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பலானது பின்னக எழுமாற்று மாறிகளின் இயல்தகு பொறுமானங்கள் யாவற்றினதும் நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத் தொகை ஒன்று ஆக வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றது.

அதாவது $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ என்பன பின்னக எழு மாற்று மாறியொன்றின் இயல்தகுபெறுமானங்களாகவும் $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$ என்பன முறையே அப்பெறுமானங் களுக்கான நிகழ்தகவுகளும்

ஆயின் இந் நிகழ்தகவுகள் ஒரு பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பலை அமைப்பதற்கு;

(1) $p_i \geq 0 \; ; i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ ....(5.6)

(2) $\sum p_i = 1$ ....(5,7)

என்பன தேவையான நிபந்தனைகளாகும். இந்நிபந்தனைகள் மேற்படி உதாரணங்கள் 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 என்பனவற்றில் திருப்தியாக்கப்படுகின்றன என்பதனை தொடர்புடைய அட்டவணைகளில் அவதானிக்கலாம்

தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி உதாரணம் 5.1.4 இன் மூலம் தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கு மேலே கூறப்பட்டவாறு நிகழ்தகவுப்பரம்பலை வரையறுக்க முடியாது அதாவது நிபந்தனைகள் (5.6), (5.7) என்பனவற்றை நேரடியாக வரையறுக்கமுடியாது. நிபந்தனை (5.6) இனை கருதுவோமாயின் p_i என்பதனை

$$p_i = Pr(X = x_i) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.8)$$

என எழுதலாம். அதாவது பின்னக மாறியின் ஒரு இயல்தகுபெறுமானத்திற்கு நிகழ்தகவு பூச்சியமாக அல்லது நேரானதாக இருக்கும் இது தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிக்கு பொருத்தமற்றதாகும் அதாவது.

$$p_i = Pr(X = x_i) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.9)$$

என எழுதப்படும். வீச்சுக்களுக்கு நிகழ்தகவுகளை வரையறுக்கலாமேயொழிய தனிப்பெறுமானங்களுக்கு வரையறுக்கமுடியாது இதற்கு நிகழ்தகவுச் சார்புகள் அமைக்கப்படல் வேண்டும் அதாவது X இன் ஒவ்வொரு x பெறுமானத்துக்கும் தொடர்புடையதாக **"நிகழ்தகவு அளவீட்டு சார்புகள்"** வரையறுக்கப்படும்.

5.3 நிகழ்தகவு அளவீட்டுச் சார்புகள்

Probability Measurable Functions

மேலே கூறப்பட்ட நிகழ்தகவு அளவீட்டுச் சார்புகளை தெளிவாக வரையறுப்பதன் மூலம் பின்னகப்பரம்பல்களுக்கு மேலே விபரிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை மேலும் தெளிவாக்குவதுடன் தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப்பரம்பல் களையும் தெளிவாக வரையறுக்க முடியும்.

நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு

(Probability Distribution Function)

தனித்தனி மாறிப் பெறுமானங்களுக்கான நிகழ்தகவுகளை பின்னகப் பரம்பலுக்கு வரையறுக்கக் கூடிய அதே வேளை தொடர்ச்சியான பரம்பலுக்கு வரையறுக்க முடியாமலிருப்பதனால் மாறிப்பெறுமானம் எண்கோட்டில் $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ வரை நகரும் போது திரட்டிய நிகழ்தகவு எவ்வாறு அதிகரித்துச் செல்கின்றது என்பதனை விளக்குவது சாத்தியமாகின்றது. இது இரு வகைப்பரம்பலுக்கும் பொருத்தமாக இருக்கின்றது. இப்பரம்பல் சார்பு ஆனது

$$F_x(x) = Pr(X \le x) \quad \text{.................................} \quad \textbf{(5.10)}$$

என வரையறுக்கப்படும். இதில் X மாறியினை குறிப்பதா கவும் x அதன் சாத்தியமான பெறுமானங்களைக் குறிப்ப தாகவும் உள்ளது. ஒரு நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு பின்வரும் உடமை களைக் கொண்டிருக்கும்.

(1) $F_x(-\infty) = 0$ .... **(5.11)**

ஏனெனில் $X \le -\infty$ எனும் வீச்சில் X இற்கு பெறுமானங்கள் இல்லை என்பதாலாகும்.

(2) $F_x(+\infty) = 1$ .... **(5.12)**

ஏனெனில் $X \le +\infty$ என்பது X இன் எல்லாச் சாத்தியமான பெறுமானங்களையும் உள்ளடக்கும் முழு மெய்யெண்கோடு ஆகும்.

(3) மேற்படி இரு நிபந்தனைகளையும் இணைத்தால்

$0 \le F_x(x) \le 1, \forall x$ .... **(5.13)**

என எழுதமுடியும்.

(4) நிகழ்தகவுப் பரம்பல்சார்பு $F_x(x)$ ஆனது ஒரு அதிகரிக்கும் சார்பு ஆகும் ஏனெனில் $x_1 < x_2$ ஆயின்

$F_x(x_1) \le F_x(x_2)$ .... **(5.14)**

ஆகும்.

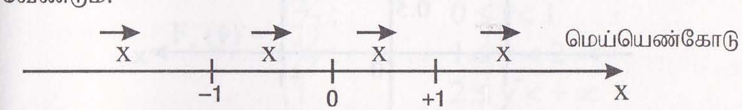
உதாரணம் 5.3.1 : மேற்படி உதாரணம் 5.1.1 இலுள்ள நாணயம் சுண்டுதல் பரிசோதனையையும், உதாரணம் 5.2.1 இல் தரப்பட்டுள்ள தொடர்புடைய நிகழ்தகவுப்பரம்பலையும் கருதுக. இதற்கான நிகழ்தகவுப்பரம்பல் சார்பை வரையறுத்து அச்சார்பினையும் வரைக.

தீர்வு :

எழுமாற்றுமாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பின்வருமாறு இருந்தது.

X	-1	1
p	0.5	0.5

X இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் -1, 1 என்பனவற்றை x குறிப்பதனால் மெய்யெண் கோட்டில் x இன் வெவ்வேறு நிலைகளுக்கு வீச்சுக்களின் நிகழ்தகவுகளைக் கணித்தல் வேண்டும்.



பரம்பல் சார்பின் வரைவிலக்கணம் (5.10) இன்படி ;

$F_x(x) = Pr(X \le x)$ எனும் தொடர்பினை பயன்படுத்துவோம்

(i) $-\infty < x < -1$ ஆயின் $Pr(X \le x) = 0$

(ii) $x = -1$ ஆயின் $Pr(X \le x) = Pr(X < -1) + Pr(X = -1)$

$$= 0 + 0.5 = 0.5$$

(iii) $-1 < x < +1$ ஆயின் $Pr(X \le x)$

$$= Pr(x \le -1) + Pr(-1 < x < +1)$$

$$= 0.5 + 0 = 0.5$$

(iv) $x = +1$ ஆயின் $Pr(X \le x)$

$$= Pr(X < +1) + Pr(X = +1)$$

$$= 0.5 + 0.5 = 1$$

(v) $+1 < x < +\infty$ ஆயின் $P(X \le x)$

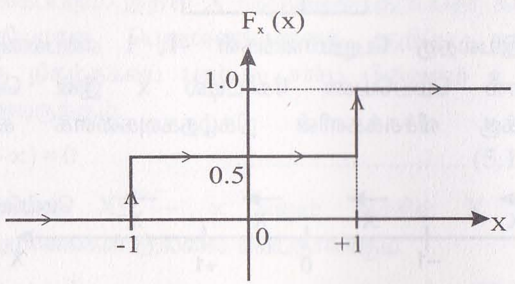
$$= Pr(X \le 1) + Pr(x > 1)$$

$$= 1 + 0 = 1$$

மேற்படி கணிப்பீடுகளைத் தொகுப்போமாயின் பரம்பல் சார்பினை பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ ; & -\infty < x < -1 \\ 0.5 \ ; & -1 \le x < +1 \\ 1 \ ; & +1 \le x < +\infty \end{cases}$$

எனவே இப்பரம்பல் சார்பின் வரைபை பின்வருமாறு வரையலாம்.



மேலே அமைக்கப்பட்ட சார்பும் வரையப்பட்ட வரைபும் (5.11) - (5.14) எனும் பரம்பல் சார்பின் உடமைகளை திருப்தி யாக்குவதைக் காணலாம்

உதாரணம் 5.3.2 : உதாரணம் 5.1.2 இல் உள்ள எழுமாற்று மாறி Y இனதும், உதாரணம் 5.1.3 இலுள்ள மாறி Z இனதும், உதாரணம் 5.1.1 இலுள்ள (பக்கம் 117) இரண்டாவது எழுமாற்று மாறி X இனையும் கருதுக. இவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்புகளை வரைக.

தீர்வு :

மேற்படி எழுமாற்று மாறிகள் Y, Z, X என்பனவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் முறையே உதாரணங்கள் 5.2.2, 5.2.3, 5.2.1 என்பனவற்றில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றுக் கான பரம்பல் சார்புகளை வரையறுத்து வரைபுகளையும் வரைவோம்

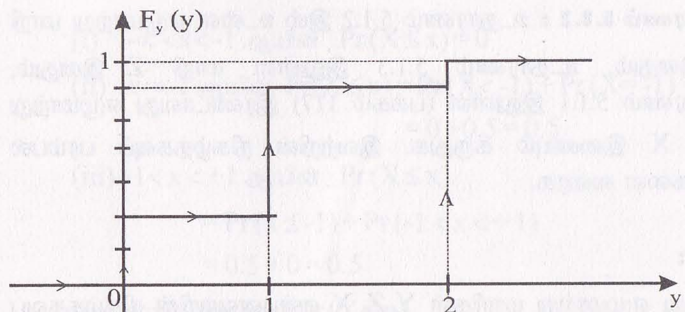
(i) WOR முறையில் அமைக்கப்பட்ட Y இனை மட்டும் கருதுவோம். $F_y(y) = Pr(Y \le y)$ என்பதனை திரட்டு நிகழ்தகவாக பின்வரும் அட்டவணையில் தரலாம்.

Y	0	1	2
p	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
F(y)	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{7}$	1

உதாரணம் 5.3.1 இல் உள்ள கணிப்பீடுகளைப்போல பரம்பல் சார்பை நேரடியாக வரையறுத்து எழுதுவதாயின் அது பின்வருமாறு அமையும்

$$F_y(y) = \begin{cases} 0 \ ; & -\infty < y < 0 \\ 2/7 \ ; & 0 \le y < 1 \\ 6/7 \ ; & 1 \le y < 2 \\ 1 \ ; & 2 \le y < +\infty \end{cases}$$

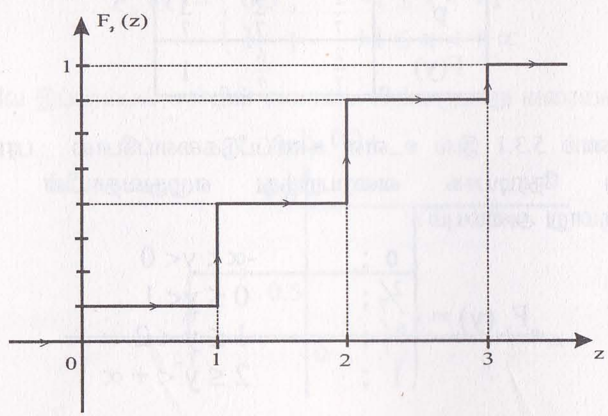
எனவே Y இன் பரம்பல்சார்பின் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



(2) $F_z(z) = Pr(Z \le z)$ இனைப்பயன்படுத்தி Z இன் பரம்பல் சார்பினை பின்வருமாறு அமைக்கலாம்

$$F_z(z) = \begin{cases} 0; & -\infty < z < 0 \\ 1/8; & 0 \le z < 1 \\ 4/8; & 1 \le z < 2 \\ 7/8; & 2 \le z < 3 \\ 1; & 3 \le z < +\infty \end{cases}$$

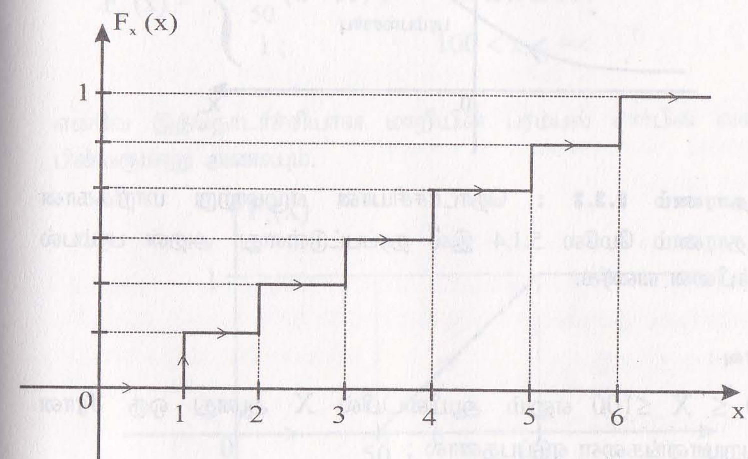
இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்



(3) $F_x(x) = P(X \le x)$ இனைப்பயன்படுத்த பரம்பல் சார்பு பின்வருமாறு அமையும்.

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
F(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

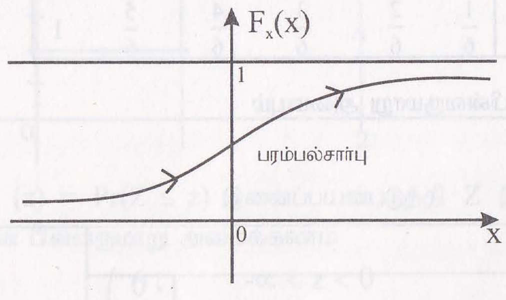
இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்



இவ்வுதாரணத்தில் அமைக்கப்பட்ட மூன்று பரம்பல் சார்புகளின் வரைபுகளும் நிபந்தனைகள் (5.11)-(5.14) இனை திருப்தி யாக்கின்றன.

■ மேற்படி இரு உதாரணங்களிலும் வரையப்பட்ட பரம்பல் சார்புகள் நான்கினதும் வரைபுகளின் அமைப்பினைப் பார்ப்போமா யின் எழுமாற்று மாறியின் இயல்தகு பெறுமானங்களின் எண் ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க முறிவடைந்த சார்பின் முறிவு களின் எண்ணிக்கை அதிகரித்து ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பினை நோக்கி மாறிக்கொண்டு செல்வதனைக் காணலாம். இவை பின்னக எழுமாற்று மாறிகளாக இருப்பதனால் அவற்றின்

வரைபுகளில் முறிவுகள் காணப்படுகின்றன. இம்மாறி தொடர்ச்சியான மாறியாக இருக்குமாயின் இம்முறிவுகள் நெருங்கி மறைந்து தொடர்ச்சியான மெருதுவான வரைபாக மாறுவதனைக் காணலாம். பின்வருவது அவ்வாறான ஒரு வரைபாகும்.



உதாரணம் 5.3.3 : தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிக்கான உதாரணம் மேலே 5.1.4 இல் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் பரம்பல் சார்பினை வரைக.

தீர்வு :

$50 \le X \le 100$ எனும் ஆயிடையில் X ஆனது ஒரு சீரான பெறுமானங்களை எடுப்பதனால் ;

$$\Pr(X < 50) = 0$$

$$\Pr(X > 100) = 0$$

$$\Pr(50 \le X \le 100) = 1$$

ஆக இருக்கும் அத்துடன் [50,100] எனும் ஆயிடையில் X இன் பெறுமானங்கள் சீராக இருப்பதனால் இவ்வாயிடையின் இடைவெளியில் பெறுமானம் x இன் அமைவுத்தூரத்தின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவினை வரையறுக்கலாம்.

அதாவது $x \in [50,100]$ ஆக இருக்கையில்

$$P[X \le x] = \frac{x-50}{100-50}$$ என வரையறுக்கப்படலாம்

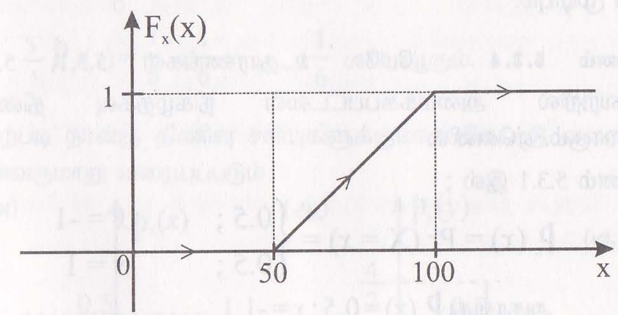
அதாவது

$$F_x(x) = \frac{1}{50}(x-50)$$ ஆகும்.

எனவே இப்பரம்பல் சார்பு பின்வருமாறு அமைக்கப்படலாம்.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0\ ; & -\infty < x < 50 \\ \frac{1}{50}(x-50)\ ; & 50 \le x \le 100 \\ 1\ ; & 100 < x < +\infty \end{cases}$$

எனவே இத்தொடர்ச்சியான மாறியின் பரம்பல் சார்பின் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



நிகழ்தகவு திணிவு சார்பு

(Probability Mass Function)

பின்னக எழுமாற்று மாறிகளுக்கு நிகழ்தகவுத் திணிவு சார்புகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. பின்னக இயல்தகு பெறுமானங்களுக்கு நிகழ்தகவுகள் பூச்சியமாக அல்லது நேராகவும் ஏனைய பெறுமானங்களுக்கு நிகழ்தகவுகள் பூச்சியங்களாகவும் இருக்கும் நிகழ்தகவு திணிவு சார்பினை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்

$$\mathfrak{p}_x(x) = \Pr(X = x) \qquad \text{..................(5.15)}$$

X இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ என்பன வாயின்

$$p_x(x) \geq 0 \; ; \; \forall x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.16)$$

$$\sum_x p_x(x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5.17)$$

என்பன ஒரு திணிவு சார்பு $p_x(x)$ திருப்தி செய்யும் நிபந்தனை களாகும். இரண்டாவது நிபந்தனை (5.17) இனை பின்வருமாறு எழுத முடியும்.

$$p_x(x_1) + p_x(x_2) + \ldots\ldots + p_x(x_n) = 1$$

இந்நிபந்தனைகளுக்கு அமைவாக மேற்படி திணிவு சார்பினை நிகழ்தகவு கோட்டுவரைபு (Probability line graphs) மூலமும் விளக்க முடியும்.

உதாரணம் 5.3.4 : மேலே உதாரணங்கள் 5.3.1, 5.3.2 என்பனவற்றில் அமைக்கப்பட்டவை நிகழ்தகவு திணிவு சார்புகளாகும். ஏனெனில்

உதாரணம் 5.3.1 இல் ;

(அ) $$p_x(x) = \Pr(X = x) = \begin{cases} 0.5 \; ; & x = -1 \\ 0.5 \; ; & x = 1 \end{cases}$$

அதாவது $p_x(x) = 0.5 \; ; x = -1, 1$

$p_x(-1) + p_x(1) = 0.5 + 0.5 = 1$ ஆகும்.

உதாரணம் 5.3.2 இல்;

(ஆ) $p_y(0) + p_y(1) + p_y(2) = 1$ ஆகும்.

$$p_y(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} \; ; & y = 0 \\ \frac{4}{7} \; ; & y = 1 \\ \frac{1}{7} \; ; & y = 2 \end{cases}$$

(இ) $$p_z(z) = \begin{cases} 1/8 \; ; & z = 0 \\ 3/8 \; ; & z = 1 \\ 3/8 \; ; & z = 2 \\ 1/8 \; ; & z = 3 \end{cases}$$

அதாவது

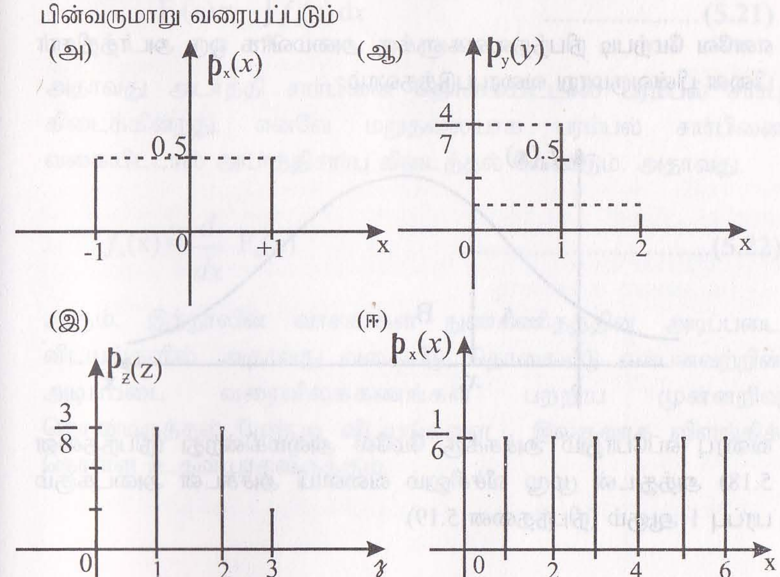
$$p_z(z) = \begin{cases} 1/8 \; ; & z = 0,3 \\ 3/8 \; ; & z = 1,2 \end{cases}$$

$\sum_z p_z(z) = 1$ என்பதும் இதில் தெளிவாகின்றது.

(ஈ) $p_x(x) = \frac{1}{6} \; ; \forall x$

$\sum_x p_x(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \ldots\ldots + \frac{1}{6} = 1$ ஆகும்.

மேற்படி நான்கு திணிவு சார்புகளுக்குமான கோட்டு வரைபுகளும் பின்வருமாறு வரையப்படும்



நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு

(Probability Density Function)

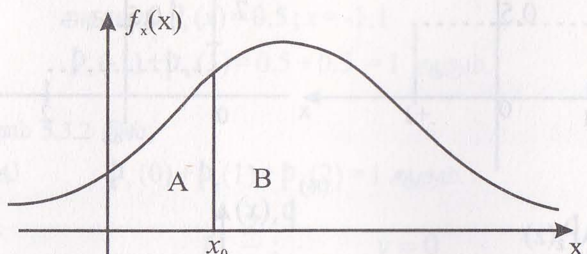
தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிகளுக்கு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்புகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன. தனிப்பெறு மானங்களுக்கு நிகழ்தகவுகள் பூச்சியமாக இருப்பினும் வீச்சுக்களுக்கு நிகழ்தகவுகள் இருக்கின்றன. எனவே நிபந்தனைகள் (5.16), (5.17) என்பனவற்றை தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிகளுக்கு பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

$$f_x(x) \ge 0 \;;\forall x \qquad \text{....................(5.18)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\,dx = 1 \qquad \text{....................(5.19)}$$

மேற்படி நிபந்தனை (5.19) இல் உள்ள தொகையீட்டு குறியீடானது நுண்கணித வரைவிலக்கணப்படி அடர்த்தி சார்பு $f_x(x)$ ஆனது மாறி X இன் முழுவீச்சிலும் வரைபில் அச்சின் மேல் அடைக்கப்படும் முழுப்பரப்பு 1 என்பதனைக் காட்டுகிகன்றது.

எனவே மேற்படி நிபந்தனைகளுக்கு அமைவாக ஒரு அடர்த்திசார்பினை பின்வருமாறு வரைபுபடுத்தலாம்.



வரைபு எப்போதும் அச்சுக்கு மேலே அமைகின்றது (நிபந்தனை 5.18) அத்துடன் முழு வீச்சிலும் வளையி அச்சுடன் அடைக்கும் பரப்பு 1 ஆகும் (நிபந்தனை 5.19)

இதில் $\Pr[-\infty < X \le x_o] = A$, $\Pr[x_o \le X < +\infty] = B$ என்பன பிரிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகள் ஆகும். அத்துடன்

$$A+B=1 \qquad \text{................................(5.20)}$$

உம் ஆகும்.

X அச்சில் x ஆனது $-\infty$ இலிருந்து $+\infty$ இனை நோக்கி நகரும் போது வீச்சு நிகழ்தகவு வரையறுக்கப்படலாமாதலால் நுண்கணிதப் படி

$$F_x(x_0) = \Pr[X \le x_0] = A$$

$$= \int_{-\infty}^{x_0} f_x(x)\,dx \text{ ஆகும்}$$

x_0 இனை பொதுமைப்படுத்தினால்

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\,dx \qquad \text{....................(5.21)}$$

அதாவது அடர்த்தி சார்பினை தொகையிட்டால் பரம்பல் சார்பு கிடைக்கின்றது. எனவே மறுதலையாக பரம்பல் சார்பினை வகையிட்டால் அடர்த்திசார்பு கிடைத்தல் வேண்டும். அதாவது.

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \qquad \text{..............................(5.22)}$$

ஆகும். இந்நூலின் வாசகர்கள் நுண்கணிதத்தின் அடிப்படை விடயங்களில், அதாவது வகையீடு, தொகையீடு என்பனவற்றின் அடிப்படை வரைவிலக்கணங்கள் பற்றிய முன்னறிவு கொண்டிருத்தல் மேற்படி விடயங்களை இலகுவாக விளங்கிக் கொள்ள உதவியாகவிருக்கும்.

உதாரணம் 5.3.5 : மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 5.3.3 இல் அமைக்கப்பட்டது தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிக்கான நிகழ்தகவுப்பரம்பல்சார்பு ஆகும். இதன் அடர்த்தி சார்பினை வரைக.

தீர்வு :

$50 \le X \le 100$ என்பது தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறி X இன் தரப்பட்ட வீச்சாகும். இதன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பினை பின்வருமாறு எற்கனவே அமைத்துள்ளோம்.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0\,; & -\infty < x < 50, \\ \frac{1}{50}\,(x-50)\,; & 50 \le x \le 100, \\ 1\,; & 100 < x < +\infty, \end{cases}$$

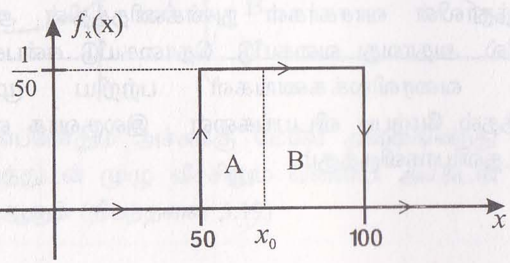
தொடர்பு (5.22) இனைப்பயன்படுத்தி மேற்படி சார்பினை வகையிடுவோம்.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0\,; & -\infty < x < 50 \\ \frac{1}{50}\,; & 50 \le x \le 100 \\ 0\,; & 100 < x < +\infty \end{cases}$$

அதாவது

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}\,; & 50 \le x \le 100 \\ 0\,; & \text{ஏனைய வீச்சில்} \end{cases}$$

எனவே இதன் அடர்த்திசார்பினை பின்வருமாறு வரையலாம் இவ்வரைபு நிபந்தனைகள் (5.18),(5.19) என்பனவற்றை திருப்தி செய்வதனைக் காணலாம்.



வரைபினால் அச்சுடன் அடைக்கப்படும் பரப்பு ஆனது மேலே காட்டப்பட்ட செவ்வகத்தின் பரப்பு ஆகும்.

அதாவது செவ்வக பரப்பு $= \frac{1}{50} \times (100 - 50) = 1$

மொத்த நிகழ்தகவு $= A+B$

$= 1$ ஆகும்.

தொடர்பு (5.21) இனைப்பயன்படுத்தி மாறி X இன் நடத்தையுடன் தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகளைக் கணிக்க லாம்

$x_0 = 60$ ஆயின்

$\Pr(x \le 60) = F_x(60)$ ......(தொடர்பு 5.10 இன் படி)

அதாவது

$A = \frac{1}{50}\,(60 - 50) = \frac{10}{50}$

$= 0.2$ ஆகும்

$\therefore\ B = 1 - 0.2 = 0.8$ ஆகும் (5.20 இன்படி)

அதாவது $\Pr(x > 60) = 0.8$ ஆகும்

5.4 எழுமாற்று மாறிகளின் நடத்தைகள்

Behaviours of Random Variables

எழுமாற்று மாறிகளின் வகைகளும், இவற்றின் இயல்தகு பெறுமானங்களும் பகுதி 5.1 இல் விபரிக்கப்பட்டன. மாறிகளின் இயல்தகு பெறுமானங்கள் எவ்வாறு பரம்பியுள்ளன என்பது பகுதி 5.2 இல் அவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை ஆராய்வதன் மூலம் விளக்கப்பட்டது. ஒரு எழுமாற்று மாறியின் நடத்தையினை அடிப்படையில் விளக்குவதற்கு அவை போதுமானவை ஆகும். மாறி பின்னகமானது அல்லது தொடர்ச்சியானது என்பதற்கேற்ப திணிவு சார்பு அல்லது அடர்த்தி சார்பு மூலம் பரம்பல்களை மேலும் தெளிவாக விளக்கலாமென பகுதி 5.3 இல் ஆராய்ந்தோம்.

இருப்பினும் எல்லாவற்றுக்கும் பொதுவாக நிகழ்தவுப் பரம்பல் சார்புகளைப் பயன்படுத்தி மாறியின் பெறுமான அசைவுக்கு ஏற்ப பரம்பல் எவ்வாறு மாற்றமடைந்து அவ்வசைவினை விளக்குகின்ற தென்பதனையும் பார்த்தோம். மேற்படி நடத்தையினை மேலும் விளங்கிக் கொள்வதற்கு மாறிகளின் வீச்சுக்களிலான நடத்தைகளை வீச்சு நிகழ்தகவுகள் மூலம் விளக்கலாம். இதற்கு நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பினை இலகுவாகப் பயன்படுத்த முடியும். அத்துடன் பின்னகவகைக்கு திணிவு சார்பினையும், தொடர்ச்சிவகைக்கு அடர்த்தி சார்பினையும் பயன்படுத்தலாம்.

(1) **பின்னக மாறிகளை கருதிதுவோம்**

Ɓ $=\{X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n\}$ எனக் கொள்வோம்.

Ɓ இல் உள்ளவை ஏறுவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தப் பட்டுள்ள நிகழ்ச்சி $A=\{X_r, X_{r+1}, \ldots\ldots, X_s\}$ என்போம் இதில் $1< r< s< n$ ஆகும். இவ்வாறு இருந்தால்

$$\Pr(A)=\sum_{x=x_r}^{x_s} p_x(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.23)$$

ஆகும் அதாவது நிகழ்ச்சியொன்றின் நிகழ்தகவினை திணிவு சார்பு மூலம் மேற்காட்டியவாறு கணிக்கலாம் இக் கணிப்பீட்டினை பரம்பல் சார்பு மூலம் பின்வருமாறு கணிக்க முடியும்.

$\Pr(A) = \Pr\{X_r, X_{r+1}, \ldots\ldots, X_S\}$ என்பதனால்

$\Pr(A)=\Pr(X\le X_S) - \Pr(X\le x_{r-1})$

அதாவது

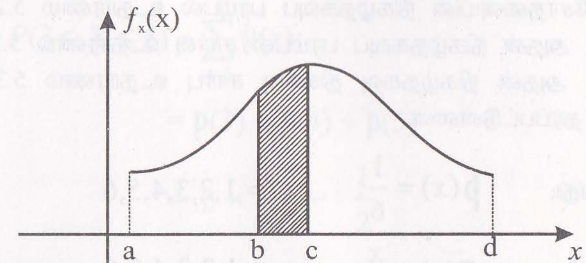
$$\Pr(A)=F_X(X_S)-F_X(X_{r-1}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.24)$$

ஆகும். மேற்படி கணிப்பீடு பரம்பல் சார்பினை பயன்படுத்தும் முறையாகும்.

(2) **தொடர்ச்சியான மாறிகளைக் கருதுவோம்**

Ɓ = [a,d] என்பது எழுமாற்றுமாறி வரையறுக்கப்படும் வீச்சு என்போம். நிகழ்ச்சி A என்பது;

$A=\{x/b\le x\le c\}$ என வரையறுக்கப்படின்



$\Pr(A)=\Pr(b\le X\le c)$ என்பது நிழற்றப்பட்ட பரப்பளவாகும். எனவே

$$\Pr(A)=\int_b^c f_x(x)\,dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.25)$$

என அந்நிகழ்தகவினை வரையறுக்கலாம். நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பைப் பயன்படுத்துவதாயின்

$$\begin{aligned}\Pr(A) &= \Pr(b\le X\le c)\\ &= \Pr(X\le c) - \Pr(X\le b)\\ &= F(c) - F(b) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.26)\end{aligned}$$

என எழுதமுடியும். தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிகளுக்கு தனிப்பெறுமானங் களுக்கான நிகழ்தகவு பூச்சியமாகும்.

$$\Pr(X=x_0)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.27)$$

உதாரணம் 5.4.1: மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 5.1.1 இல் விபரித்து கூறப்பட்ட தாயக்கட்டை உருட்டுப் பரிசோதனையினை கருதுவோம். பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) 3 அல்லது அதிலும் சிறிய எண் விழுதல்

(ii) 3 அல்லது அதிலும் பெரிய எண் விழுதல்

(iii) 3 க்கும் 5 இற்கும் இடையிலான எண் விழுதல்.

தீர்வு :

இப்பரிசோதனையின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் உதாரணம் 5.2.1 (ii) இலும், அதன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்வு உதாரணம் 5.3.2 (3) இலும், அதன் நிகழ்தகவு திணிவு சார்பு உதாரணம் 5.3.4 (ஈ) இலும் தரப்பட்டுள்ளன.

அதாவது; $\text{þ}(x) = \frac{1}{6}; \quad x = 1,2,3,4,5,6$

ஆகவும், $F(x) = \frac{x}{6}; \quad x = 1,2,3,4,5,6$

ஆகவும் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

i) $\Pr(X \leq 3)$

$= F(3)$ (தொடர்பு 5.10 இன்படி)

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ii) $\Pr(X \geq 3)$ இனை இரண்டு வழிகளில் கணிப்பிடலாம்.

அ) $\Pr(X \geq 3) = 1 - \Pr(X \leq 2)$ (தொடர்பு 3.6 இன்படி)

$= 1 - F(2)$

$= 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$

ஆ) $\Pr(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{6} \text{þ}(x)$ (தொடர்பு 5.22 இன்படி)

$= \text{þ}(3) + \text{þ}(4) + \text{þ}(5) + \text{þ}(6)$

$= 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

iii) $\Pr(3 \leq X \leq 5)$ இனையும் இரண்டு வழிகளில் கணிப்பிடலாம்.

அ) $P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{x=3}^{5} \text{þ}(x)$

$= \text{þ}(3) + \text{þ}(4) + \text{þ}(5)$

$= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

ஆ) $\Pr(3 \leq X \leq 5)$

$= \Pr(X \leq 5) - \Pr(X \leq 2)$

$= F(5) - F(2)$

$= \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

உதாரணம் 5.4.2 : மேலே விபரிக்கப்பட்ட உதாரணம் 5.1.4 இனைக்கருதுவோம். பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

i) பொருளின் நிறை 60 கிராமிலும் குறைவாக இருத்தல்

ii) பொருளின் நிறை 75 கிராமிலும் கூடவாக இருத்தல்

iii) பொருளின் நிறை 70 கிராமுக்கும் 90 கிராமுக்குமிடையிலிருத்தல்.

தீர்வு:

பொருளின் நிறை X இனது நிகழ்தகவுப் பரம்பல் சார்பு உதாரணம் 5.3.3 இலும் அடர்த்தி சார்பு உதாரணம் 5.3.5 இலும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

அதாவது;

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 50 \\ \frac{1}{50}(x-50) & ; 50 \leq x \leq 100 \\ 1 & ; x > 100 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{50} & ; 50 \le x \le 100 \\ 0 & ; \text{ஏனைய வீச்சில்} \end{cases}$$

என அப்பரம்பல்கள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

(i) $P(X<60) = Pr(X \le 60)$ (தொடர்பு 5.27 இன்படி)

$= F(60)$ (தொடர்பு 5.10 இன்படி)

$= \dfrac{60-50}{50} = 0.2$

ii) $Pr(X>75) = 1 - Pr(X \le 75)$

$= 1 - F(75) = 1 - \left(\dfrac{75-50}{50}\right) = 1 - 0.5 = 0.5$

iii) $Pr(70 \le X \le 90)$

$= Pr(X \le 90) - Pr(X < 70)$

$= Pr(X \le 90) - Pr(X \le 70)$ (5.27 இன்படி)

$= F(90) - F(70)$

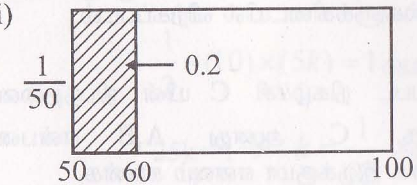
$= \left(\dfrac{90-50}{50}\right) - \left(\dfrac{70-50}{50}\right)$

$= \dfrac{40-20}{50} = 0.4$

மேற்படி மூவகை நிகழ்தகவுகளையும், பரம்பல் சார்பின் வரைபிலிருந்து (வரைபு - உதாரணம் 5.3.3 இல்) வரைபு முறையில் x பெறுமானத்துக்கு தொடர்புடைய y பெறுமான மாக $F(x)$ இனைப் பெற்று கணிப்பீடுகளை மேற்கொள்ளவும் முடியும்.

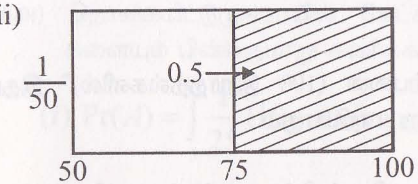
அத்துடன் அடர்த்தி சார்பில் பொருத்தமான பரப்பினைக் கணிப்பதன் மூலமும் (வரைபு - உதாரணம் 5.3.5 இல்) மேற்படி மூவகை நிகழ்தகவுகளையும் கணிக்கலாம்.

(i)



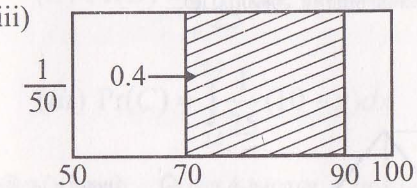
$\int_{50}^{60} f(x)\,dx$

(ii)



$\int_{75}^{100} f(x)\,dx$

(iii)



$\int_{70}^{90} f(x)\,dx$

உதாரணம் 5.4.3: ஒரு பேக்கரியினால் நாளாந்தம் விற்கப்படும் பாண்களின் எண்ணிக்கை X ஆனது (100 இறாத்தல்களில்) ஒரு எண்பெறுமான எழுமாற்ற தோற்றப்பாடாகவிருந்தது. இத்தோற்றப் பாடு

$$f(x) = \begin{cases} kx & ; 0 \le x < 5 \\ k(10-x) & ; 5 \le x < 10 \\ 0 & ; \text{மற்றைய வீச்சில்} \end{cases}$$

எனும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மூலம் தரப்படுகின்றது. இதில் k ஒரு மாறிலியாகும்.

அ) பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

$A \equiv 500$ இறாத்தலிலும் கூட விற்கப்படல்

$B \equiv 400$ இறாத்தலிலும் குறைவாக விற்கப்படல்

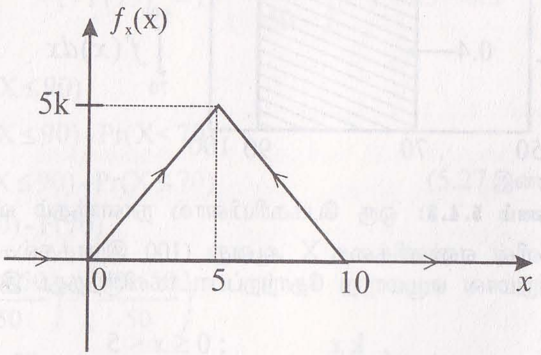
$C \equiv 250, 750$ இறாத்தல்களுக்கிடையில் விற்கப்படல்

ஆ)நிகழ்ச்சிகள் A,B தரப்பட நிகழ்ச்சி C யின் நிபந்தனை நிகழ்தகவுகளைக் காண்க. C ஆனது A,B என்பன வற்றுடன் சாராத நிகழ்வாக இருக்குமா எனவும் காண்க.

தீர்வு:

X ≡ "நாளாந்த பாண் விற்பனை (100 இறாத்தல்களில்)" இது ஒருதொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறியாகும்.

கேத்திரகணித முறைப்படி நோக்கின் தரப்பட்ட நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பின் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



சார்பு $f(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பாக இருப்பதற்கு பொருத்தமான மாறிலி k இணைக்காண்போம்.
இதற்கு தொடர்பு (5.19) இனைப்பயன்படுத்தலாம்.

அதாவது, $\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(x)dx = 1$ இனைப்பயன்படுத்தினால்

$\int_{0}^{10} f(x)dx = 1$ ஆகும்.

அதாவது முக்கோணியின் பரப்பு

$\frac{1}{2} \times (10) \times (5k) = 1$ ஆகும்

$25k = 1 \Rightarrow \quad k = \frac{1}{25}$ ஆகும்

(அ) தொகையீட்டுமுறையில் கேட்கப்பட்ட மூன்று நிகழ்தகவு களையும் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

$$(i)\ \Pr(A) = \int_{5}^{10} \frac{1}{25}(10-x)dx$$

$$(ii)\ \Pr(B) = \int_{0}^{4} \frac{1}{25}(10-x)dx$$

$$(iii)\ \Pr(C) = \int_{2.5}^{7.5} \frac{1}{25}(10-x)dx$$

இருப்பினும் பொருத்தமான முக்கொணிகளைப் பயன்படுத்தி பரப்புகளைக் கணிக்கமுடியுமாதலால் இவற்றை பின்வருமாறு கணிப்பிடுவோம்.

$(i)\ \Pr(A) = \Pr(X>5)$

$= \frac{1}{2} \times 5 \times 5k$

$= \frac{25}{2} \times \frac{1}{25} = 0.50$

$(ii)\ \Pr(B) = \Pr(X<4)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4k \quad (5:4 = 5k:4k)$

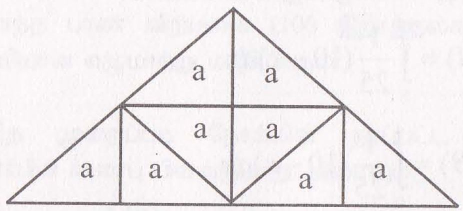
$= \frac{8}{25} = 0.32$

$(iii)\ \Pr(C) = \Pr(2.5<X<7.54) = 6a$

$= \dfrac{6}{8}$ (முக்கோணியின் பிரிவுகளின்படி)

$= 0.75$

ஏனெனில் $8a = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{8}$



(ஆ)$(i)\ \Pr(C/A) = \dfrac{\Pr(A \cap C)}{\Pr(A)}$ (தொடர்பு 4.4 இன்படி)

$\Pr(A \cap C) = \Pr X > 5\ \&\ 2.5 < X < 7.5)$

$= \Pr(5 < X < 7.5)$

$\therefore \Pr(C/A) = \dfrac{3a}{4a}$ (முக்கோணியின் பிரிவுகளின்படி)

$= 0.75$

$(ii)\ \Pr(C/B) = \dfrac{\Pr(B \cap C)}{\Pr(B)}$

$\Pr(B \cap C) = \Pr(X < 4\ \&\ 2.5 < X < 7.5$

$= \Pr(2.5 < X < 4)$

$= \Pr(2.5 < X < 5) - \Pr(4 < X < 5)$

ஆனால்

$\Pr(4 < X < 5) = \dfrac{1}{2} \times 1 \times 9k$ (சமாந்தரப்பக்கங்கள் 4k,5k)

$= \dfrac{9}{2} \times \dfrac{1}{25} = 0.18$

$\therefore \Pr(B \cap C) = \dfrac{3}{8} - 0.18$

$= 0.375\ 0.180 = 0.195$

$\therefore \Pr(C/B) = \dfrac{0.195}{0.32} = 0.609375$

(iii) சாராமைக்கானதொடர்பு (4.7) இணைப்பயன்படுத்துவோம்.

$\Pr(A)\Pr(C) = 0.50 \times 0.75 = 0.375$

$\Pr(A \cap C) = 3a = \dfrac{3}{8} = 0.375$

∴ A,C என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$\Pr(B)\Pr(C) = 0.32 \times 0.75 = 0.24$

$\Pr(B \cap C) = 0.195$

$\Pr(B \cap C) \neq \Pr(B)\Pr(C)$

∴ B,C என்பன சாரா நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

5.5 எதிர்வும் மாறற்றிறனும்

(Expectation and Variance)

புள்ளிவிபரமாறிகளின் நடத்தைகளை விளக்குவதற்கு அவற்றின் மீடிறன் பரம்பல்களையும் பின்னர் பல்வேறு அளவைகளையும் பயன்படுத்துகின்றோம். பரம்பலின் மைய நாட்ட அளவையாகிய

இடை (Mean) என்பது பரம்பலின் சராசரிப் பெறுமானத்தை விளக்குவதற்கும், பரம்பலின் விலகல் அளவையாகிய நியம விலகல் (Standard Deviation) என்பது பரம்பல் பெறுமானங்களின் சிதறலின் விஸ்தீரணத்தை விளக்குவதற்கும் பயன்படுத்தப் படுகின்றன. மாறற்றிறன் (Variance) என்பது நியம விலகலின் வர்க்கமாகும். இது பல்வேறு விளக்கங்களுக்கு நியமவிலகலுக்கு பதிலாக பயன்படுத்தப்படுகின்றது. வேறு சில அளவைகள் பயன்படுத்தப்பட்ட போதிலும் மேற்படி இரு அளவைகளும் முக்கியமான அடிப்படை விளக்கத்திற்கு தேவையான அளவைகளாகும். (விவரண புள்ளிவியர வியல், 1998 என்னும் நூலைப் பார்க்கவும்).

அதாவது மீடிறன் பரம்பலுக்கான இடையும், மறற்றிறனும் முறையே

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum fX \quad \text{.....................................(5.28)}$$

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum f(X-\overline{X})^2 \quad \text{..........................(5.29)}$$

என்பனவற்றால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. இதில் (X,f) என்பது ஒவ்வொரு புள்ளிவிபரம் X இற்கும் தொடர்புடைய மீடிறன் f இனைக் குறிக்கும் சோடிப்பெறுமானங்களாகும். இவ்வாறே n எண்ணிக்கையுடைய சோடிகளுக்கும் மொத்த மீடிறன்

$$N = \sum f$$

என எழுதப்படும். மாறற்றினை பின்வருமாறும் எழுதலாம்

$$V(X) = \frac{1}{N}\sum fX^2 - \overline{X}^2 \quad \text{..........................(5.30)}$$

எழுமாற்று மாறிகள் வித்தியாசமான நிச்சயமற்ற சூழ்நிலைகளில் வரையறுக்கப்படுகின்றன என்பது பகுதி 5.1 இல்விளக்கப்பட்டுள்ளது. அவற்றின் நடத்தைகளை நிகழ்தகவுப்

பரம்பல்கள் விளக்குகின்றன என்பது பகுதிகள் 5.2, 5.3, 5.4 இல் விரிவாகத் தரப்பட்டுள்ளது. இருப்பினும் மேலே குறிப்பிடப்பட்ட **இடை,** எனும் அளவைக்கு தொடர்புடையதாக **எதிர்வு** எனும் அளவையும் மாறற்றிறனுக்கு தொடர்புடையதாக அதே அளவையும் கீழே வரையறுக்கப்படுகின்றன.

எதிர்வு (Expectation)

எதிர்வு அல்லது எதிர்பார்க்கப்பட்ட பெறுமானம் (Expected value) என்பது ஒரு எழுமாற்று மாறியின் நடத்தையில், அதாவது பரம்பலில், அது எடுக்கும் சராசரி பெறுமானத்தை குறிப்பதாக வரையறுக்கப்படும்.

தொடர்பு (5.28) இனை பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்

$$\overline{X} = \sum\left(\frac{f}{N}\right)X$$

இதில் $\frac{f}{N}$ என்பது தொடர்பு மீடிறன் அணுகுமுறையின்படி குறித்த X பெறுமானத்துக்கான நிகழ்தகவு ஆகும். அதாவது

$$\text{þ} = \frac{f}{N}$$

ஆகும். எனவே மேற்படி தொடர்பினை பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$E(X) = \sum_x \text{þ}x \quad \text{..............................(5.31)}$$

இதில் மீடிறன் பரம்பல் நிகழ்தகவுப் பரம்பலாக மாற்றமடைய இடை, எதிர்வு என விளக்கப்படுவதால் $\overline{X}$ இற்குப் பதிலாக எதிர்வுக்கு E(X) எனும் குறியீடு பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

எழுமாற்றுமாறியின் மாற்றிறன்

(Variance of Random variable)

இது எழுமாற்றுமாறியின் நிகழ்தகவுப் பரம்பலுக்கு விளக்கப்படுகின்ற விலகல் அளவை ஆகிய நியம விலகலினது வர்க்கப்பெறுமானம் என வரையறுக்கப்படுகின்றது.

எனவே தொடர்பு (5.29) இனை பின்வருமாறு மாற்றியமைக்கலாம்.

$$V(X) = \sum \left(\frac{f}{N}\right)\left(X - \overline{X}\right)^2$$

$$\therefore\ V(X) = \sum_x \text{þ}\,(x\text{-E}(X))^2$$

$$V(\text{X}) = \text{E}(\text{X-E (X)})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(5.32)}$$

இலகுவான சூத்திரம் (5.30) இனைக் கருதுவோமாயின்;

$$V(X) = \sum_x \left(\frac{f}{N}\right) X^2 - \overline{X}^2$$

அதாவது;

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(5.33)}$$

என எழுதலாம். இதில்

$$E(X^2) = \sum_x \text{þ}\,x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(5.34)}$$

ஆகும். X இன் நியம விலகல் பின்வருமாறு எழுதப்படும்.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(5.35)}$$

உதாரணம் 5.5.1: மேற்படி வரைவிலக்கணங்கள் தொடர்பு மீடிறன் அணுகுமுறையூடாக தரப்பட்டுள்ளதனால் உதாரணம் 2.3.1 இனை எடுத்துக்கொள்வோம். விற்பனைத் தொகை என்பதன் எதிர்வு, மாற்றிறன், நியம விலகல் என்பனவற்றைக்கணிப்பிடுக.

தீர்வு:

எழுமாற்றுமாறி X ≡ "விற்பனைத் தொகை" எனக் கொள்ளப்பட்டால் உதாரணம் 2.3.1 இல் அமைக்கப்பட்ட X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல் பின்வரும் அட்டவணையின் முதல் இரு நிரல்கள் மூலம் தரப்படும்.

x	þ	þx	x^2	þx^2
1	0.04	0.04	01	0.04
2	0.06	0.12	04	0.24
3	0.25	0.75	09	2.25
4	0.35	1.40	16	5.60
5	0.19	0.95	25	4.75
6	0.11	0.66	36	3.96
மொத்தம்	1.00	3.92	-	16.84

எதிர்பார்க்கப்படும் விற்பனைத்தொகை அல்லது விற்பனைத் தொகைக்கான எதிர்வு அல்லது நிச்சயமற்ற சூழலில் எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரி விற்பனையினை E(X) மூலம் விளக்கலாம். அதாவது தொடர்பு (5.30) இன்படி இதனை மேற்படி அட்டவணையின் 3வது நிரலில் பெறலாம்.

அதாவது $E(X) = \sum \text{þ}\ x = 3.92$

விற்பனைத் தொகை ஒரு முழு எண் பெறுமானத்தை எடுக்குமாதலால் மேற்படி கணிப்பீட்டை கிட்டிய முழு எண்ணுக்கு திருத்தினால் எதிர் பார்க்கப்படும் விற்பனைத் தொகை 4 ஆகும். விற்பனைத் தொகை மாற்றமடைவதனை விளக்குவதற்கு அதன்

நியம விலகலை கணிப்பிடல் வெண்டும். தெடர்பு (5.33) இன் மூலம் மாற்றத்தினைக் கணிப்பிடுவோம்.

$$E(X^2) = \sum \text{þ}\, x^2 = 16.84$$

(அட்டவணை 5ம் நிரல்)

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 16.84 - (3.92)^2 = 1.4736$$

எனவே நியம விலகல்

$$6_x = \sqrt{1.48} = 1.2139 \quad \text{ஆகும்.}$$

■ மேலே விபரிக்கப்பட்டது ஒரு பின்னக எழுமாற்று மாறியின் எதிர்வு பற்றிய கணிப்பீடு ஆகும். எதிர்வுக் கணிப்பீடு வரைவிலக்கண ரீதியாக சாத்தியமாக இருப்பினும் அப்பெறுமானத்தை விளக்குவது சிலவேளைகளில் பொருத்தமில்லாமல் இருக்கலாம். உதாரணமாக பின்னக புள்ளிவிபரமாறிகளை விளக்குவதற்கு சிலவேளைகளில் இடைக்குப் பதிலாக இடையத் திறனை பயன்படுத்த வேண்டி ஏற்படுகின்றது. எனவே பொருத்தமாக விளக்க முடியாத நிலை இருக்குமாயின் எதிர்வினைக் கணிப்பிடுதல் தவிர்க்கப்படல் வேண்டும்.

உதாரணம் 5.5.2: மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 5.3.2. இல் தரப்பட்டுள்ள மூன்று பின்னக எழுமாற்று மாறிகள் X,Y,Z இணையும் அவற்றின் நிகழ்தகவு பரம்பல்களையும் கருத்தில் கொள்வோம். அம்மாறிகளின் எதிர்வுகளை விளக்குக.

(i) $X \equiv$ தாயக் கட்டையில் விழுந்த எண்

இதன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை பயன்படுத்தினால்;

$$E(X) = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + \dots\dots\dots + 6\times\frac{1}{6} = 3.5 \quad \text{ஆகும்}$$

தாயக் கட்டையில் எதிர்பார்க்கப்படும் எண் 3.5 என்பது பொருத்தமற்ற விளக்கம் ஆகும்.

(ii) $Y \equiv$ கறுப்பு நிற பந்துகளின் எண்ணிக்கை

இதன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை பயன்படுத்தலாம்;

$$E(Y) = 0\times\frac{2}{7} + 1\times\frac{4}{7} + 2\times\frac{1}{7} = \frac{7}{6} \quad \text{ஆகும்.}$$

எதிர் பார்க்கப்பட்ட கறுப்பு நிறப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை $\frac{7}{6}$ என்பதும் பொருத்தமற்ற விளக்கமாகும்.

(iii) $Z \equiv$ விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை

$$E(Z) = 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$$

எதிர்பார்க்கப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை 1.5 என்பதனையும் முறையாக விளக்கமுடியாது.

■ மேலே விளக்கப்பட்ட எதிர்வு, மாறற்றிறன் என்பவற்றை பொதுமைப்படுத்தினால் நிகழ்தகவு திணிவு சார்பினைப் பயன்படுத்தி

$$E(X) = \sum_x x\, \text{þ}(x) \qquad \textbf{...............(5.36)}$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 \text{þ}(x) \qquad \textbf{.............(5.37)}$$

என எழுத முடியும். இதேபோல் இக்கோட்பாடுகளை தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிக்குவரையறுப்போமாயின்;

$$E(X) = \int x\, f(x)\, dx \qquad \textbf{...........(5.38)}$$

$$E(X^2) = \int x^2\, f(x)\, dx \qquad \textbf{...........(5.39)}$$

என எழுத முடியும்.

உதாரணம் 5.5.3: மேலே உதாரணம் 5.1.4 இல் தரப்பட்ட தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறியினையும், உதாரணம் 5.3.5 இல் தரப்பட்டுள்ள அதன் அடர்த்தி சார்பினையும் எருதுவோம். அம்மாறியின் எதிர்வினையும் மாறற்றினையும் காண்க.

தீர்வு :

"X ≡ ஒரு பொருளின் நிறை", ஆனது சீராக அதிகரிப்பதும் (50, 100) எனும் ஆயிடையில் பெறுமானங்களை எடுப்பதாகவும் உள்ளது. எனவே எதிர்வுப் பெறுமானம் சராசரியினை விளக்குவதனால் இம்மாறிக்கு சராகரி நிறை அல்லது எதிர்பார்க்கப்படும் நிறை 75 என வருதல் வேண்டும்.

இதனை தொடர்பு (5.38) இனைப் பயன்படுத்தி கணிப்பிடுவோம்.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{50} & ; 50\le x\le 100\\ 0 & ;\text{ மற்றைய வீச்சுக்களில்}\end{cases}$$

$$E(x)=\int xf(x)dx=\int_{50}^{100} x\frac{1}{50}\,dx$$

$$=\frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{50}^{100}=\frac{1}{100}\left\{100^2-50^2\right\}=75 \text{ ஆகும்}$$

தொடர்பு (5.39) இன்படி

$$E(X^2)=\int x^2 f(x)dx=\int_{50}^{100} x^2\left(\frac{1}{50}\right)dx$$

$$=\frac{1}{50}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{50}^{100}=\frac{1}{150}\left\{100^3-50^3\right\}=5833.33 \text{ ஆகும்}$$

எனவே தொடர்பு (5.33) இன்படி மாறற்றிறன் ஆனது

$$V(X)=5833.33-75^2=208.33$$

நியம விலகல் : $6_X=\sqrt{208.33}=14.43$ ஆகும்

உதாரணம் 5.5.4 ; மேலே தரப்பட்ட உதாரணம் 5.4.3 இனைக் கருதுவோம். நாளாந்த சராசரி பாண் விற்பனையினையும் அதன் நியம விலகலையும் கணிப்பிடுக.

தீர்வு :

இதில், "X ≡ நாளாந்த பாண் விற்பனை (100 இறாத்தலில்)". இதன் அடர்த்தி சார்பு ஏற்கனவே அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{அதாவது ; } f(x)=\begin{cases}\frac{1}{25}x & ; 0<x<5\\ \frac{1}{25}(10-x) & ; 5<x<10\\ 0 & ;\text{ மற்றைய வீச்சுக்கள்}\end{cases}$$

X இன் சராசரி பெறுமானம் இங்கு எதிர்வுப் பெறுமானமாகும். தொடர்பு (5.38) இன்படி

$$E(X)=\int x\,f(x)dx=\int_0^5 x\left(\frac{x}{25}\right)dx+\int_5^{10} x\left(\frac{10-x}{25}\right)dx$$

$$=\frac{1}{25}\left\{\int_0^5 x^2\,dx+\int_5^{10}(10x-x^2)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{25}\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5+\left[\frac{10x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_5^{10}\right\}$$

$$\frac{1}{25}\left\{\left(\frac{125}{3}\right)-(0)+\left(\frac{1000}{2}-\frac{1000}{3}\right)-\left(\frac{250}{2}-\frac{125}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{25}\left\{\frac{125}{3}+500-\frac{1000}{3}-125+\frac{125}{3}\right\}$$

$$=\frac{1}{25}\{375-250\}$$

$$=5$$

அதாவது சராசரியாக அல்லது எதிர்பார்க்கப்பட்ட நாளாந்த பாண் விற்பனை 500 இறாத்தல்கள் ஆகும். இதனை உதாரணம் 5.4.3 இல் தரப்பட்டுள்ள அடர்த்திசார்பின் வரைபிலிருந்து பெறலாம். அடர்த்திசார்பு X = 5 பற்றி சமச்சீராக இருப்பதனால் சராசரி 5 என்பது தெளிவாகும்.

தொடர்பு (5.39) இன்படி

$$E(X^2) = \int_0^5 x^2 \left(\frac{x}{25}\right) dx$$

$$+ \int_5^{10} x^2 \left(\frac{10-x}{25}\right) dx$$

$$= \frac{1}{25}\left\{\int_0^5 x^3\,dx + \int_5^{10} \left(10x^2 - x^3\right) dx\right\}$$

$$= \frac{1}{25}\left\{\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^5 + \left[\frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_5^{10}\right\}$$

$$= \frac{1}{25}\left\{\frac{625}{4} + \left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - \left(\frac{1250}{3} - \frac{625}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{25}\left\{\frac{625}{4} + \frac{10000}{3} - 2500 - \frac{1250}{3} + \frac{625}{4}\right\}$$

$$= \frac{1}{25}\left\{\frac{625}{2} + \frac{8750}{3} - 2500\right\} = 29.1666$$

தொடர்பு (5.33) இன்படி

$$V(x) = 29.1666 - (5)^2 = 4.1666$$

$\therefore$ நியம விலகல் ; $\sigma_x = 2.0412$ ஆகும்

எனவே மேற்படி பாண் விற்பனைக்கான பரம்பல் 204 பாண்கள் எனும் நியமவிலகலுடன் அமைந்துள்ளது.

■ எழுமாற்று மாறிகள் தொடர்பாகவும், அவற்றின் எதிர்வு, மாறற்றிறன்கள் தொடர்பாகவும் பின்வரும் கோட்பாடுகள் முக்கியத்துவம் பெறுகின்றன.

(1) g(X) என்பது மாறி X இனுடைய யாதாயினுமொரு மெய்யெண் சார்பு ஆயின்;

X பின்னகமாக இருக்கையில்;

$$E(g(X)) = \Sigma\, g(x)p(x) \quad \text{.............(5.40)}$$

X தொடர்ச்சியாக இருக்கையில் ;

$$E(g(X)) = \int g(x)f(x)dx \quad \text{.............(5.41)}$$

இரண்டு வகைக்கும்;

$$V(g(X)) = E(g(X)^2) - E(g(X))^2 \quad \text{(5.42)}$$

$g(X) = aX + b$; a, b மாறிலிகள் ஆயின்

$$E(g(X)) = a\,E(X) + b \quad \text{.............(5.43)}$$

$$V(g(X)) = a^2V(X) \quad \text{.............(5.44)}$$

(2) g(X), h(X) என்பன மாறி X இனுடைய யாதாயினுமிரு மெய்யெண் சார்புகளாகவும், a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருப்பின்,

$$E(a\,g(X) \pm bh(X)) = a\,E(g(X)) \pm bE(h(X)) \quad \text{.............(5.45)}$$

$$V(a\,g(X)) = a^2\,V(g(X)) \quad \text{.............(5.46)}$$

அவ்விரு சார்புகளும் ஒன்றிலொன்று சாராதவையாயின்;

$$E(g(X).h(X)) = E(g(X)).E(h(X)) \quad \text{.............(5.47)}$$

அவை X, Y ஆயின்;

$$E(X.Y) = E(X)E(Y) \quad \text{.............(5.48)}$$

உதாரணம் 5. 5. 5 : ஒரு பந்தயத்தில் A, B என்போர் தமது கோணலற்ற நான்முகிகளை உருட்டுமாறு கேட்கப்பட்டனர். அவர்களின் நான்முகிகள் காட்டிய எண்களை பயன்படுத்தி அவர்களுக்கான வெற்றித் தொகைகள் தீர்மானிக்கப்பட்டன. Aஇற்கு அவர் இரட்டை எண் பெற்றால் அதன் இருமடங்குடன் ஒரு ரூபா சேர்த்து வெற்றித் தொகையும் B இற்கு அவர் ஒற்றை எண் பெற்றால் அதன் இரு மடங்கிலிருந்து ஒரு ரூபா கழித்து வெற்றித் தொகையும் தரப்பட்டன.

அ) A,B என்போரின் வெற்றித் தொகைகளை விளக்குக.

ஆ) மேற்படி வெற்றித் தொகைகளின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களைக் காண்க.

இ) வெற்றித் தொகைகளின் எதிர்பார்க்கப்பட்ட பெறுமதி, அவற்றின் நியம விலகல் என்பவற்றைக் காண்க.

தீர்வு :

A,B என்போர் நான்முகிகளை தனித் தனியாக உருட்டியதால் அவை வெவ்வேறு எழுமாற்றுப் பரிசோதனைகளாகும். அவற்றின் மாதிரி விவரண வெளிகள் :

$$\mathbb{S}_a = \{1,2,3,4\}, \qquad \mathbb{S}_b = \{1,2,3,4\}$$

என்பனவாகும் அவை கோணலற்ற நான்முகிகள் ஆதலால் ஒவ்வொரு வெளியீட்டுக்குமான நிகழ்வுகள் $\frac{1}{4}$ ஆகும்.

அ) X,Y என்பன முறையே A,B என்போரின் நான்முகிகள் காட்டிய எண்கள் என்போம் ஆயின் X,Y எனும் எழுமாற்று மாறிகளின் இயல்தகு பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு.

$$X = \begin{cases} 1; & A \text{ இனதில் } 1 \text{ விழுதல்} \\ 2; & A \text{ இனதில் } 2 \text{ விழுதல்} \\ 3; & A \text{ இனதில் } 3 \text{ விழுதல்} \\ 4; & A \text{ இனதில் } 4 \text{ விழுதல்} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1; & B \text{ இனதில் } 1 \text{ விழுதல்} \\ 2; & B \text{ இனதில் } 2 \text{ விழுதல்} \\ 3; & B \text{ இனதில் } 3 \text{ விழுதல்} \\ 4; & B \text{ இனதில் } 4 \text{ விழுதல்} \end{cases}$$

U, V என்பன முறையே A, B என்போருக்கான வெற்றித் தொகைகள் ஆயின் தரவுகளின் படி ;

$$U = \begin{cases} 0\ ; & X = 1, 3 \text{ ஆயின்} \\ 2X + 1 ; & X = 2, 4 \text{ ஆயின்} \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} 0\ ; & Y = 2, 4 \text{ ஆயின்} \\ 2Y - 1 ; & Y = 1, 3 \text{ ஆயின்} \end{cases}$$

ஆகும். இதில் U = g (X), V = h (Y) என எழுதப்படுவதனால் தொடர்பு (5.1) இன்படி U,V என்பனவும் எழுமாற்று மாறிகளாகும். அவற்றின் இயல்தகு பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு:

$U = 0, 5, 9$ ரூபாக்கள்,

$V = 0, 1, 5$ ரூபாக்கள்.

ஆ) முதலில் X,Y என்பவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை பெறுவோம். அவை,

$$\mathfrak{p}(x) = \Pr(X = x) = \tfrac{1}{4}\ ; x = 1, 2, 3, 4$$

$$\mathfrak{p}(y) = \Pr(Y = y) = \tfrac{1}{4}\ ; y = 1, 2, 3, 4$$

என்றவாறு அமையும் இவற்றிலிருந்து U,V என்பவற்றின் பரம்பல்களை பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$Pr(U=0) = Pr\,(X=1,3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(U=5) = Pr\,(X = 2) = \frac{1}{4}$$

$$Pr(U=9) = Pr\,(X=4) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathfrak{p}\,(u) = \begin{cases} \frac{1}{4};\ u = 5,9 \\ \frac{1}{2};\ u = 0 \end{cases}$$

$$Pr(V=0) = Pr\,(Y= 2,\,4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(V=1) = Pr\,(Y= 1) = \frac{1}{4}$$

$$Pr(V=5) = Pr\,(Y= 3) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathfrak{p}\,(v) = \begin{cases} \frac{1}{4};\ v=1,5 \\ \frac{1}{2};\ v=0 \end{cases}$$

இ) (i) வெற்றித்தொகைகள் U,V என்பனவற்றின் எதிர்பார்க்கப் பட்ட பெறுமதிகளை பின்வருமாறு கணிப்பிடலாம்.

$$E(U) = \Sigma u\,\mathfrak{p}(u)$$
$$= 0 \times\tfrac{1}{2}+ 5\times\tfrac{1}{4}+9\times\tfrac{1}{4}$$
$$= 3.50$$

$$E(V) = \Sigma v\,\mathfrak{p}(v)$$
$$= 0 \times\tfrac{1}{2}+ 1\times\tfrac{1}{4}+ 5\times\tfrac{1}{4}$$
$$= 1.50$$

அதாவது A,B என்போர் எதிர்பார்க்க வேண்டிய வெற்றித் தொகை அல்லது எச்சூழலிலும் கிடைக்கக்கூடிய சராசரி வெற்றித் தொகைகள் முறையே 3 ரூபா 50 சதம், 1 ரூபா 50 சதம் ஆகும்.

(ii) இவ்வெற்றித் தொகைகளை நேரடியாக X,Y இன் தரவுகளி லிருந்தும் பெற முடியும்.

$$E(X) = \Sigma x\,\mathfrak{p}(x)$$
$$= 1\times\tfrac{1}{4} + 2\times\tfrac{1}{4} +3\times\tfrac{1}{4}+ 4\times\tfrac{1}{4}$$
$$= 2.50$$

இதேபோல் $E(Y) = 2.50$ எனவும் காட்டலாம். இவை நிபந்தனை அற்ற எதிர்வுகள் (Unconditional expectations) ஆகும்.

மேலும் $U=2X+1$, $V=2Y-1$ எனும் தொடர்புகளைப் பயன்படுத்துவதற்கு $U= 0, V= 0$ எனும் ஏனைய நிபந்தனைகளை கருத்தில் கொள்ளவேண்டியிருப்பதனால் நிபந்தனை எதிர்வு களைக் கணித்துப் பயன்படுத்தலாம்.

$E(X)=2.5$ (முழு எதிர்வுப் பெறுமானம்)

$Pr\,(X\ \text{ஒற்றை}) = Pr\,(X\text{இரட்டை}) = \frac{1}{2}$

ஆதலால் X இரட்டையாக இருக்கையில்

$E(X)=2.5\times\frac{1}{2} =1.25$

இதேபோல் Y ஒற்றையாக இருக்கையில்

$E(Y)= 2.5 \times\frac{1}{2} = 1.25$ எனக் காட்டலாம்.

தொடர்பு (5.43) அல்லது தொடர்பு (5.45) இன்படி

$E(U)=2E(X)+1=2\text{x}\,1.25+1=3.50$

$E(V)=2E\,(Y)-1=2\text{x}\,1.25-1=1.50$

(iii) நியம விலகல்களைக் கணிப்பிடுவோம்.

$$E(U^2) = \Sigma u^2\, p(u)$$

$$= 0\times\tfrac{1}{2} + 25\times\tfrac{1}{4} + 81\times\tfrac{1}{4}$$

$$= 26.50$$

$$V(U) = E(U^2) - E(U^2)$$

$$= 26.5 - 3.50^2 = 14.25$$

$$6_u = \sqrt{14.25} = 3.77$$

$$E(V^2) = \Sigma u^2\, p(v)$$

$$= 0\times\tfrac{1}{2} + 1\times\tfrac{1}{4} + 25\times\tfrac{1}{4}$$

$$= 6.50$$

$$V(V) = E(V^2) - E(V)^2$$

$$= 6.50 - 1.50^2 = 4.25$$

$$6_v = \sqrt{4.25} = 2.06$$

Chapter 6

Standard Probability Distributions

At the end of this chapter you will be able to

(1) Identify a Standard Probability Distribution suitable to a standard phenomena

(2) Apply such Distribution to investigate the behaviour of such phenomena

(3) Calculate probabilities to events related to such phenomena using the identified distribution.

(4) Develop a probability model suitable to a problem.

6. நியம நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்
Standard Probability Distributions

அத்தியாயம் 5 இல் எண்பெறுமான எழுமாற்றுத் தோற்றப் பாடுகளுக்கு (Numerical Random Valued Phenomena) எழுமாற்று மாறிகளை வரையறுக்கலாம் எனவும் அவ்வாறு வரையறுக் கப்படும் எழுமாற்று மாறிகளின் நடத்தைகளை விவரிப்பதற்கு நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களையும், நிகழ்தகவு அளவீட்டு சார்புகளையும், எதிர்வு, மாறற்றிறன் போன்ற பரமானங்களையும் பயன்படுத்தலாம் எனவும் தெளிவாக, விரிவாக விளங்கிக் கொண்டோம். இப்பகுப்பாய்வுகள் மூலம் அவ்வாறான எண்பெறுமான எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடுகளின் சிறப்பியல்புகள் விபரிக்கப்பட்டன.

மேற்படி எண்பெறுமான எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடுகள் பல வகைப்படுகின்றன. ஒவ்வொன்றுக்கும், ஒவ்வொரு சிறப்பான, தனித்துவமான (Peculier type) வகை தோற்றப்பாடுகள் அமை கின்றன. எனவே ஒவ்வொன்றையும் தனித்துவமாகவே ஆராய வேண்டி உள்ளது. ஆனால் மேற்படி தோற்றப்பாடுகளில் பல ஒரே மாதிரியான நியம தோற்றப்பாடுகளை (Standard Phenomenon) அனுசரிப்பதனையும் காண்கிறோம் எனவே அவற்றுக்கு பொருத்தமான நியம நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை அமைப்பது பற்றி இவ்வத்தியாயத்தில் ஆராய்வோம்.

தனித்துவமான பரம்பல்களைத்தவிர பொதுவாக சில நியம நிபந்தனைகளுடன், இயல்புகளுடன் அமைகின்ற நிகழ் தகவுப்பரம்பல்கள் பற்றி விரிவாக ஆராய்வோம். எழுமாற்று மாறிகள் பின்னகமானது, தொடர்ச்சியானது என்பதற்கேற்ப அத்தோற்றப்பாடுகளையும் அவற்றின் பரம்பல்களையும் வேறுபடுத்தலாம். பொதுவாக வழக்கத்திலுள்ள அதிக பயன்பாட்டிலுள்ள நியம நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள் பின்வருமாறு:

பின்னக நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

1. ஈருறுப்புப் பரம்பல்
2. கேத்திரகணிதப் பரம்பல்
3. புவசோன் பரம்பல்
4. மறை ஈருறுப்புப் பரம்பல்
5. அதிபர கேத்திர கணிதப்பரம்பல்
6. பல்லுறுப்பிப் பரம்பல்

தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப் பரம்பல்கள்

1. ஒருசீர்ப் பரம்பல்
2. அடுக்குக் குறிப்பரம்பல்
3. காமாப் பரம்பல்
4. செவ்வன் பரம்பல்
5. மாணவனின் t - பரம்பல்
6. கைவர்க்கப்பரம்பல்
7. பிசரின் F - பரம்பல்

இங்கு தரப்பட்டுள்ள எல்லாப் பரம்பல்களையும் இந்நூலில் விரிவாக விளக்க முடியாது. ஏனெனில் இவ்வத்தியாயத்தை முறையாக விளக்குவதற்கு ஒரு தனியான பாடநூல் அவசியமாகும். இருப்பினும் இவற்றில் மிக முக்கியமான சில பரம்பல்கள், விரிவாகவும், ஏனையவை சுருக்கமாகவும் கீழே விளக்கப்படுகின்றன.

A.பின்னக நியமப் பரம்பல்கள்

Discrete Standard Distributions

பின்னக எழுமாற்று மாறிகள் பற்றி பகுதி 5.1 இலும், அவற்றின் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்களை அமைப்பது பற்றி பகுதி 5.2 இலும் விளக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுக்கு நிகழ்தகவுத் திணிவு சார்புகளைப் பயன்படுத்துவது, அவற்றின் உடமைகள் என்பன பற்றி பகுதிகள் 5.3, 5.4 என்பனவற்றில் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

அவற்றுக்குரிய பரமானங்கள் எதிர்வு, மாறற்றிறன் என்பனவற்றைக் கணிக்கும் முறைபற்றி பகுதி 5.5 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளது. நியமத் தோற்றப்பாடுகள் தொடர்பாக பின்னகப்பரம்பல்களை அடையாளம் காண்பதற்கு அவற்றை விளக்கிக் கொள்ளுதல் அவசியமாகும். அவ்வாறான ஒரு முக்கிய தோற்றப்பாடு கீழே தரப்படுகின்றது.

பேணோலின் மீள்முயல்வு (Bernoulli's Repeated Trial)

அநேகமான இயற்கை விஞ்ஞான, சமூக விஞ்ஞானத் தோற்றப் பாடுகளில் ஒரு “விடயம்” ஆனது நடக்கலாம் அல்லது நடக்காமல் விடலாம் என்றவகையில் அது “வெற்றி” அல்லது “தோல்வி” என்ற ஏதாவது ஒரு விளைவுடன் கருத்துடன் வரையறுக்கப்படலாம். இரண்டுக்கு மேற்பட்ட விளைவுகள் இருப்பினும் கூட ஒரு தேவைப்படும் விளைவு வெற்றியாயின் மீதி விளைவுகள் யாவற்றையும் சேர்த்து தோல்விகள் என கருதப்படலாம். இது வெற்றி தோல்விப் பரிசோதனை எனப்படும்.

விளைவுகளை S, F எனக் குறித்தால், அதாவது $S \equiv$ வெற்றி, $F \equiv$ தோல்வி ஆயின் இதற்கான மாதிரி விவரண வெளி

$$\mathbb{S} = \{S,F\} \text{ ஆகும்}$$

இவற்றுக்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே p, q ஆயின்

$$Pr(S) = p, \quad Pr(F) = q, \quad p+q = 1 \text{ ஆகும்.}$$

இத்தோற்றப்பாட்டினை எழுமாற்று மாறி X இன் மூலம் பின் வருமாறு விளக்கலாம்.

$$X = \begin{cases} 1 \; ; & \text{வெற்றி } (S) \\ 0 \; ; & \text{தோல்வி } (F) \end{cases}$$

இங்கு $Pr(X=1) = Pr(S) = p$

$Pr(X=0) = Pr(F) = q$ ஆகும்.

மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை பின்வரும் நிகழ்தகவு திணிவு சார்பு மூலம் விளக்கலாம்.

$$\mathfrak{p}_x(x) = p^x q^{1-x} \; ; x = 0, 1 . \qquad \text{................... (6.1)}$$

இதனை பேணோலின் பரம்பல் (Bernoulli's Distribution) என்கின்றோம். மேற்படி வெற்றி, தோல்விப்பரிசோதனை அநேகமான விஞ்ஞான ரீதியான பரிசோதனைகளில் அல்லது பிரச்சினைகளில் மீள மீள செய்யப்படுவதாக அல்லது நிகழ்வதாக அல்லது அமைவதாக உள்ளதனைக் காண கின்றோம். எனவே மேலே விபரிக்கப்பட்ட வெற்றி, தோல்விப் பரிசோதனையின் மீளமீளச் செய்கின்ற வகையில் ஒரு நியம தோற்றப்பாடுபற்றி அறிய வேண்டியுள்ளது. அத்தோற்றப் பாட்டினை பேணோலின் மீள் முயல்வுப் பரிசோதனை என்கின்றோம்.

6.1 ஈருறுப்புப் பரம்பல் (Binomial Distribution)

சுவிற்செர்லாந்து நாட்டின கணித மேதை ஜேம்ஸ் பேணோலி (James Bernouelli, 1654-1705) என்பவரினால் இப்பரம்பல் 1700 இல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. ஒரு முடிவுள்ள எண்ணிக்கைக்கு பேணோலின் மீள் முயல்வுப் பரிசோதனை செய்யப்படுகின்ற சூழல் அல்லது தோற்றப்பாட்டினை ஈருறுப்புப் பரம்பல் விளக்குகின்றது. இதற்கு பின்வரும் நிபந்தனைகள் அவசியமாகும்.

(i) மீள்முயல்வு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை n இற்கு நடத்தப்படும்
(ii) ஒவ்வொரு முயல்விலும் பெறப்படும் வெளியீடு S, F எனும் இரு உறுப்புக்களில் ஏதாவது ஒன்று ஆகும்.
(iii) வெற்றி S இற்கான நிகழ்தகவு p ஆனது ஒவ்வொரு முயல்விலும் சமமாக இருக்கும்.
(iv) ஒவ்வொரு முயல்வும் ஒன்றிலொன்று சாராததாகும்.

இப்பரிசோதனை ஈருறுப்புப் பரிசோதனை (Binomial experiment) எனப்படும். இப்பரிசோதனையின் முடிவில் பெறப்படும் ஒரு எழுமாற்று விளைவு ஒரு n - மடி உறுப்பு (n - tuplet) ஆகும்.

அதாவது [SSFSFS........SFS] போன்றதாக அமையும். இதனை விளக்குவதற்கு ஒரு ஈருறுப்பு மாறி (Binomial variable) இனைப் பயன்படுத்தலாம்.

X = "வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை"

என்பது அவ்வீருறுப்புமாறியாயின் இதன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n$ ஆகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவில் வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை x ஆயின் தோல்விகளின் எண்ணிக்கை $(n-x)$ ஆகும். எனவே அமையக்கூடிய விளைவின் n தனித்தனி புள்ளிகளில் மொத்தமாக x எண்ணிக்கையுடைய வெற்றிகள் வருவதற்கான வழிமுறைகள் ${}^nC_x$ ஆகும். மேற்படி நான்கு நிபந்தனைகளையும் ஒருங்கே கருதினால் X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை பின்வரும் நிகழ்தகவு திணிவு சார்பு ஊடாக விளக்கலாம்

$$\mathfrak{p}_X(x) = {}^nC_x \, p^x q^{n-x} \; ; \; x = 0, 1, \ldots, n \qquad \text{................... (6.2)}$$

இது திணிவு சார்புக்கான நிபந்தனைகள் (5.16), (5.17) என்பனவற்றை திருப்திப்படுத்துகின்றது. ஏனெனில்

$$\sum \mathfrak{p}_X(x) = \sum_{x=0}^{n} {}^nC_x \, p^x q^{n-x}$$

$$= (p+q)^n = 1 \text{ ஆகும்.}$$

மேலும் n, p என்பன ஒரு ஈருறுப்புப்பரம்பலின் **பரமானங்கள்** எனப்பட்டு $\mathbf{x \approx Bi(n,p)}$ என்றவாறு இப்பரம்பல் குறிக்கப்படும்.

X இனது வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கான நிகழ்தகவுகளை திணிவுச்சார்பினை அல்லது திரட்டுத்திணிவுச் சார்பினைப் பயன்படுத்திக் கணிப்பிடலாம். r என்பது 0, n என்பனவற்றுக் கிடையிலான X இன் யாதாயினுமொரு இயல்தகு பெறுமான மாயின் பின்வரும் தொடர்புகள் சாத்தியமாகும்.

(i) $\left.\begin{array}{l} \Pr(X=r)=\Pr(X\le r)-\Pr(X\le r-1) \\ \Pr(X=r)=\Pr(X\ge r)-\Pr(X\ge r+1) \end{array}\right\}$ ....(6.3)

(ii) $\Pr(X\le r)=\sum_{x=0}^{r} p_x(x)$ ....(6.4)

(iii) $\Pr(X\ge r)=\sum_{x=r}^{n} p_x(x)$ ....(6.5)

(iv) $\Pr(X<r)=\sum_{x=0}^{r-1} p_x(x)$ ....(6.6)

(v) $\Pr(X>r)=\sum_{x=r+1}^{n} p_x(x)$ ....(6.7)

மேற்படி ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுகளை நேரடியாக தொடர்பு (6.2) மூலம் கணிப்பது ஒரு நீண்ட கணிப்பீட்டுச் செய்முறையாகும்.

ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு அட்டவணை

(Binomial Probability Table)

மேற்படி ஐந்து வகையான ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுகளையும் நிகழ்தகவு அட்டவணை மூலமும் பெறலாம். அதாவது வெவ்வேறு r, p இன் பெறுமானங்களுக்கு தொடர்பு (6.2) இனைப் பயன்படுத்தி கணிக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அட்டவணையிலிருந்து தொடர்பு (6.5) மூலம் தேவையான நிகழ்தகவுகளைப் பெறலாம். இது இலகுவான கணிப்பீட்டு செய்முறையாகும். அடுத்த பக்கத்திலுள்ளது ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு அட்டவணையின் ஒரு பகுதி ஆகும்.

அத்துடன் ஈருறுப்பு மாறி X இன் நடத்தையியை விளக்குவதற்கு அதன் எதிர்வு, மாறற்றிறன், நியம விலகல் போன்றனவற்றைப் பயன்படுத்தலாம். தொடர்புகள் (5.31), (5.33), (5.34), (5.35) மூலம் பின்வரும் தொடர்புகளைப் பெறலாம்.

$E(X) = np$ ....(6.8)

$V(X) = npq$ ....(6.9)

$6_x = \sqrt{npq}$ ....(6.10)

அட்டவணை-1: திரட்டு ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுகள்

	p	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
n = 2	r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1	0.19000	0.27750	0.36000	0.43750	0.51000	0.57750	0.64000	0.69750	0.75000
	2	0.01000	0.02250	0.04000	0.06250	0.09000	0.12250	0.16000	0.20250	0.25000
n = 3	r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1	0.27100	0.38588	0.48800	0.57813	0.65700	0.72538	0.78400	0.83363	0.87500
	2	0.02800	0.06075	0.10400	0.15625	0.21600	0.28175	0.35200	0.42525	0.50000
	3	0.00100	0.00338	0.00800	0.01562	0.02700	0.04287	0.06400	0.09112	0.12500
n = 4	r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1	0.34390	0.47799	0.59040	0.68359	0.75990	0.82149	0.87040	0.90849	0.93750
	2	0.05230	0.10952	0.18080	0.26172	0.34830	0.43702	0.52480	0.60902	0.68750
	3	0.00370	0.01198	0.02720	0.05078	0.08370	0.12648	0.17920	0.24148	0.31250
	4	0.00010	0.00051	0.00160	0.00391	0.00810	0.01501	0.02560	0.04101	0.06250
n = 5	r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1	0.40951	0.55629	0.67232	0.76270	0.83193	0.88397	0.92224	0.94967	0.96875
	2	0.08146	0.16479	0.26272	0.36719	0.47178	0.57159	0.66304	0.74378	0.81250
	3	0.00856	0.02661	0.05792	0.10352	0.16308	0.23517	0.31744	0.40687	0.50000
	4	0.00046	0.00223	0.00672	0.01562	0.03078	0.05402	0.08704	0.13122	0.18750
	5	0.00001	0.00008	0.00032	0.00098	0.00243	0.00525	0.01024	0.01845	0.03125
n = 6	r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	1	0.46856	0.62285	0.73786	0.82202	0.88235	0.92458	0.95334	0.97232	0.98438
	2	0.11427	0.22352	0.34464	0.46606	0.57983	0.68092	0.76672	0.83643	0.89063
	3	0.01585	0.04734	0.09888	0.16943	0.25569	0.35291	0.45568	0.55848	0.65625
	4	0.00127	0.00589	0.01696	0.03760	0.07047	0.11742	0.17920	0.25526	0.34375
	5	0.00006	0.00040	0.00160	0.00464	0.01094	0.02232	0.04096	0.06920	0.10937
	6		0.00001	0.00006	0.00024	0.00073	0.00184	0.00410	0.00830	0.01562

உதாரணம் 6.1.1: ஒரு தொகுதி உற்பத்திப் பொருட்களில் 10 சதவீதமானவை பழுதடைந்தவை எனக் கூறப்பட்டது. அத்தொகுதியிலிருந்து 6 உறுப்புக்களைக் கொண்ட மாதிரியொன்று தெரிவு செய்யப்பட்டது. மாதிரியில் பழுதடைந்த உறுப்புக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளை விளக்குக.

தீர்வு:

ஒரு பழுதடைந்த உறுப்பு காணப்படுதல் "வெற்றி" எனக் கொள்ளப்படல் வேண்டும். 10 சதவீதம் தொகுதியில் பழுதடைந் துள்ளதனால்;

$p = \frac{10}{100} = 0.1$ ஆகும்.

எனவே $q = 1 - p = 0.9$ ஆகும்.

மாதிரிப் பருமன் 6 ஆதலால் $n = 6$ ஆகும். எழுமாற்று மாறி;

$X \equiv$ "மாதிரியில் உள்ள பழுதுகளின் எண்ணிக்கை" என வரையறுக்கப்படின் $X \approx Bi(6, 0.1)$ என்பது இங்கு பொருத்தமான ஈருறுப்பு பரம்பலாகும்.

எனவே $\mathrm{p}(x) = {}^6C_x (0.1)^x (0.9)^{6-x}; x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 6$
என்பது தொடர்புடைய திணிவு சார்பு ஆகும்.

$x = 0$ ஆயின் $Pr(X=0) = \mathrm{p}(0) = {}^6C_0 (0.1)^0 (0.9)^6 = 0.531441$

இதேபோல் $Pr(X=1) = \mathrm{p}(1) = 0.354294$, மேலும்

$\mathrm{p}(2) = 0.098415, \quad \mathrm{p}(3) = 0.014580,$

$\mathrm{p}(4) = 0.001215, \quad \mathrm{p}(5) = 0.000054,$

$\mathrm{p}(6) = 0.000001$

எனக் காட்டலாம். இவற்றின் மொத்தம் 1 ஆக வருவதனைக் காணலாம். (தொடர்பு 5.17 இங்கு திருப்தியாகின்றது)

மேலே தரப்பட்டுள்ள ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு அட்டவணையில் (அட்டவணை - 1) தொகுக்கப்பட்டுள்ளவை. $Pr(X \geq r)$ வகை நிகழ்தகவுகள் ஆகும். மேற்படி ஏழு கணிப்பீடுகளையும் அட்டவணையில் நேரடியாக பெறலாம். உதாரணமாக $Pr(X=2)$ இனைப் பெறுவதற்கு

$Pr(X=2) = Pr(X \geq 2) - Pr(X \geq 3)$ ((6.3) இன்படி)

எனும் தொடர்பினைப் பயன்படுத்தினால்

$Pr(X=2) = 0.11427 - 0.01585 = 0.09842$

என்பதனை பெறலாம். இக்கணிப்பீடு நேரடியாக தொடர்பு (6.2) இன்மூலமான மேற்படி கணிப்பீட்டுக்கு சமமாக இருப்பதனைக் காணலாம்.

உதாரணம் 6.1.2: ஒரு நாணயம் ஐந்து முறை சுண்டப்பட்டது. இந்நாணயம் தலை விழுவதற்கான சந்தர்ப்பம் 40% ஆகுமாறு கோணலுற்றுள்ளது. தலைகள் விழுவதற்கான பின்வரும் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) மூன்று தலைகள் விழுதல்
(ii) ஆகக்குறைந்தது இரண்டு தலைகள் விழுதல்
(iii) ஆகக்கூடியது மூன்று தலைகள் விழுதல்

அத்துடன் தலைகளின் எதிர்பார்க்கப்பட்ட எண்ணிக்கையினையும் நியம விலகலையும் காண்க.

தீர்வு: தரவுகளின்படி $n = 5$,

$Pr(H) = \frac{40}{100} = 0.4$

$\therefore \; p = 0.4, \quad q = 1 - 0.4 = 0.6$

$X \equiv$ "விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை" ஆக இருப்பின் $X \approx Bi(5, 0.4)$ ஆகும்.

$\mathrm{p}(x) = {}^5C_x (0.4)^x (0.6)^{5-x}; x = 0, 1, .., 5$
என்பது தொடர்புடைய நிகழ்தகவு திணிவுச்சார்பு ஆகும்.

இரு வழிகளிலும் கணிப்பீடுகளைப் பெறுவோம்

(அ) தொடர்புகள் (6.2), (6.5), (6.4) என்பனவற்றை நேரடியாக பயன்படுத்தினால்;

(i) $Pr(X=3) = {}^5C_3(0.4)^3(0.6)^2 = 0.2304$

(ii) $Pr(X \geq 2) = 1 - Pr(X<2)$

$= 1 - Pr(X=0) - Pr(X=1)$

$= 1 - {}^5C_0(0.4)^0(0.6)^5 - {}^5C_1(0.4)^1(0.6)^4$

$= 1 - 0.07776 - 0.2592 = 0.66304$

(iii) $Pr(X \leq 3) = 1 - Pr(X \geq 4)$

$= 1 - Pr(X=4) - Pr(X=5)$

$= 1 - {}^5C_4(0.4)^4(0.6)^1 - {}^5C_5(0.4)^5(0.6)^0$

$= 1 - 0.0768 - 0.01024 = 0.91296.$

(ஆ) ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு அட்டவணையினைப் பயன்படுத்தினால்; அட்டவணையில் $n = 5, p = 0.4$ க்கு தொடர்புடைய நிரலை தெரிவு செய்தல் வேண்டும்.

(i) $Pr(X=3) = Pr(X \geq 3) - Pr(X \geq 4)$

$= 0.31744 - 0.08704 = 0.2304$

(ii) $Pr(X \geq 2) = 0.66304$

(iii) $Pr(X \leq 3) = 1 - Pr(X \geq 4) = 1 - 0.08704 = 0.91296$

தொடர்புகள் (6.8), (6.9), (6.10) இனை பயன்படுத்துவோம்.

$E(X) = 5 \times 0.4 = 2$

$V(X) = 5 \times 0.4 \times 0.6 = 1.2$

$6_x = \sqrt{1.2} = 1.09$

எனவே எதிர்பார்க்கப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை 2 ஆகவும் அதன் நியமவிலகல் அண்ணளவாக 1 ஆகவும் இருக்கும்.

ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு உருக்கள்

(Binomial Probability Models)

ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கு அல்லது ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு மாதிரியுருவிற்கு பொருத்தமான சில உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

(அ) உற்பத்தி செய்யப்பட்ட மீனின்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் பழுதடைந்த மீனின்களின் எண்ணிக்கை.

(ஆ) ஒரு இலக்கினைத் தாக்குவதற்கு வழங்கப்பட்ட மட்டுப்படுத் தப்பட்ட முயற்சிகளில் வெற்றியளித்த தாக்குதல்களின் எண்ணிக்கை.

(இ) இயங்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு தொகுதி ஒரேமாதிரியான உபகரணங்களில் முறையாக இயங்க மறுக்கும் உபகரணங்களின் எண்ணிக்கை போன்றன.

6.2. கேத்திர கணிதப் பரம்பல் (Geometric Distribution)

இப்பரம்பல் ஈருறுப்புப் பரம்பலின் ஒரு விரிவுபடுத்தப்பட்ட வகையாகும். ஈருறுப்புப்பரம்பலில் முடிவுள்ள எண்ணிக்கைக்கு மேற்கொள்ளப் பட்ட பேணோலின் மீள் முயல்வுப் பரிசோதனை இங்கு முடிவற்ற எண்ணிக்கைக்கு தொடர்வதாகக் கொள்ளப்படும். இவ்வாறான முடிவிலித் தோற்றப்பாட்டினைக் கேத்திர கணிதப் பரம்பல் விளக்குகின்றது. எனவே அங்கு கூறப்பட்ட நான்கு நிபந்தனை களில் (i) தவிர்ந்த ஏனைய மூன்று நிபந்தனைகள் (ii), (iii), (iv) உம் இப்பரம்பலின் தோற்றப்பாட்டுக்கான சிறப்பியல்புகள் ஆகும்.

ஒரு எழுமாற்று விளைவு அல்லது வெளியீடு இத்தோற்றப்பாட்டில் SFSSFFFSFSSS.. என்றவாறு எழுதப்படும். இத் தோற்றப்பாட்டில் வரையறுக்கப்படும் கேத்திர கணிதமாறி (Geormetric Variable) பின்வருமாறு அமையும்.

X≡"முதல் முறை வெற்றியை பெறும் முயல்வு இலக்கம்"

எனவே இதற்கான இயல்தகு பெறுமானங்கள் ;

$x = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \infty$

என்பனவாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட விளைவில் x ஆவது முயல்வில் முதல்முறை வெற்றி கிடைக்குமாயின் அதற்கு முன்னர் உள்ள (x-1) முயல்வுகளிலும் தோல்விகளே கிடைத்திருக்கும். எனவே மேற்படி மூன்று நிபந்தனை களையும் ஒன்றாகக் கருதினால் X இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பலை பின்வரும் திணிவு சார்பு ஊடாக விளக்கலாம்.

$$\text{þ}_x(x) = p\,q^{x-1};\ x = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots(6.11)$$

இது திணிவு சார்பின் நிபந்தனைகள். (5,16) (5,17) என்பனவற்றை திருப்திப்படுத்துகின்றது. ஏனெனில்

$$\sum_x \text{þ}_x(x) = \sum_{x=1}^{\alpha} p\,q^{x-1} = 1$$ ஆகும்

இதில் p மட்டுமே கேத்திரகணிதப் பரம்பலின் பரமானமாகும். ஆதலால் **X ≈ Geo(p)** எனக் குறிப்பிடப்படும். X இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு தேவையான நிகழ்தகவுகளைத் தொடர்பு (6.11) இனைப் பயன்படுத்திக் கணிக்கலாம்.

மேலும் X இன் நடத்தையியை விளக்குவதற்கு அதன் எதிர்வு, மாறற்றிறன், நியம விலகல் என்பன பின்வருமாறு பெறப்படலாம்.

$$E(X) = \frac{1}{p} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.12)$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.13)$$

$$6_x = \frac{\sqrt{q}}{p} \qquad \ldots\ldots\ldots(6.14)$$

உதாரணம் 6.2.1: தலை விழுவதற்கு 40 சதவீத சந்தர்ப்பத்துடன் கோணலுற்ற நாணயம் ஒன்று தலை கிடைக்கும் வரை தொடர்ச்சியாக சுண்டப்படுகிறது.

(i) பத்தாவது முறை தலை கிடைத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) ஐந்தாவது முறைக்கிடையில் தலையைப் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(iii) எத்தனையாவது முறை தலை கிடைக்கும் என பொதுவாக எதிர்பார்க்கலாம்.?

தீர்வு:

நாணயத்தின் கோணல்த் தன்மை தலையிற்கு 40% ஆகும்.

$\therefore p = 0.4, q = 0.6$

தலை முதல் விழும் இலக்கம் X ஆயின் தொடர்பு (6.11) இன்படி;

$$\Pr(X = x) = \text{þ}_X(x)$$
$$= (0.4)(0.6)^{x-1};\ x = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

என எழுதலாம்.

(i) $\Pr(X = 10)$

$= (0.4)(0.6)^9 = 0.004$

பத்தாம் முறை விழுவது மிக மிகக் குறைவான சந்தர்ப்பமாகும்.

(ii) $\Pr(X \le 5) = \text{þ}_X(1) + \text{þ}_X(2) + \ldots\ldots + \text{þ}_X(5)$

$= (0.4) + (0.4)(0.6) + (0.4)(0.6)^2 + (0.4)(0.6)^3 + (0.4)(0.6)^4$

$= 0.4\,[1 + 0.6 + 0.6^2 + 0.6^3 + 0.6^4]$

$= 0.4 \times 2.3056 = 0.9222$

அதாவது ஐந்தாம் முறைக்கிடையில் விழ மிக மிக அதிகமான சந்தர்ப்பம் உள்ளது.

(iii) தொடர்பு (6.12) இன்படி ; $E(X) = \frac{1}{0.4} = 2.5$

எதிர்வுக்கு கிட்டிய முழு எண் 2 அல்லது 3 ஆகும் ஆனால் $p_X(2) > p_X(3)$ ஆகும். எனவே பொதுவாக இரண்டாம் முறை தலை விழும் என எதிர்பார்க்கலாம். தவறின் மூன்றாம் முறையாவது எதிர்பார்க்கலாம்.

உதாரணம் 6.2.2: ஒரு துப்பாக்கி சுடும் போட்டியாளன் பயிற்சியின் போது குறிப்பிட்ட இலக்கினை சுடுவதற்கு 60% திறமையுடன் பயிற்சி பெற்றுள்ளான். இறுதிப்போட்டியின்போது ஏனைய போட்டியாளர்களுடன் அவர் கலந்து கொண்டார்.

(i) இலக்கினைச் சுடுவதற்கு அவருக்குத் தேவைப்படும் ஆகக்கூடிய எதிர்பார்க்கப்பட்ட முயல்வுகள் எத்தனை?

(ii) இலக்கினை முதல்முதல் சுடும் முயல்வு இலக்கத்திற்கு ஏற்ப அவருக்கு ரூபா 1000, 900, ..., 100 பரிசாக வழங்கப்படின் அவர் எதிர்பார்க்கும் பரிசுத்தொகை யாது?

தீர்வு:

$X \equiv$ "முதல் முதலாக இலக்கினைச் சுடும் முயல்வு இலக்கம்"

எனக்கொண்டால் $x = 1, 2, ..., \infty$ ஆகும்.

அவருக்கு 60% திறமை உண்டு ஆயின்,

$$p = \frac{60}{100} = 0.6,\ q = 0.4$$

$$\Pr(X = x) = p(x) = (0.6)(0.4)^{x-1} \quad x = 1, 2, ...$$

(i) எதிர்பார்க்கப்படும் வெற்றிக்கான முயல்வு E(X) ஆகும். அதாவது $E(X) = \frac{1}{0.6} = 1.66$

எனவே முதல்முறை அல்லது இரண்டாம் முறை அவர் இலக்கை சுட்டுவிடுவார் என்பதாகும். எனவே அவருக்கு ஆகக்கூடியது இரண்டு முயல்வுகள் தேவைப்படும்

(ii) தொடர்புடைய பரிசுத்தொகைகள் $x = 1, 2$ இற்கு $Y = 1000/=$ அல்லது 900/= ஆகும்.

$$\Pr(X = 1) = p(1) = (0.6)$$

$$\Pr(X = 2) = p(2) = (0.6)(0.4) = 0.24$$

எனவே எதிர்பார்க்கும் பரிசுத்தொகை

$$E(Y) = 1000 \times 0.6 + 900 \times 0.24 = 816/= \text{ ஆகும்.}$$

6.3. புவசோன் பரம்பல் (Poisson Distribution)

பிரான்சு நாட்டின் கணிதமேதை சைமன் புவசோன் (Simon D.Poisson, 1781-1840) என்பவரினால் இப்பரம்பல் 1837 இல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இப்பரம்பல் ஈருறுப்புப் பரம்பலின் ஒரு பொதுமைப்படுத்தப்பட்ட வகையாகும். முடிவுள்ள எண்ணிக்கை யுடன் வரையறுக்கப்பட்ட ஈருறுப்புப் பரம்பல் முடிவற்ற எண்ணிக் கைக்கு கேத்திரகணிதப் பரம்பல் மூலம் விரிவாக்கப்பட்டது. அங்கு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை எனப்பட்டது ஓரளவுக்கு சிறிய மாதிரிகளுக்கே பொருத்தமாகும். பெரிய மாதிரிகளுக்கு, அதாவது n இன் பெரிய பெறுமானங்களுக்கு ஈருறுப்புப் பரம்பல் பொதுமைப்படுத்தப்பட அல்லது அணுகு கோட்டுக்குரிய பரம்பலாக (Asymptotic Distribution) மாற்றப்பட புவசோன் பரம்பல் கிடைக்கும்..

ஒரு புவசோன் மாறியின் தோற்றப்பாட்டுக்கு ஈருறுப்பு மாறியின் அதே நிபந்தனைகளும், வரைவிலக்கணமும் பொருத்தமாகும். அதாவது X ≡ "வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை", ஆகும். ஆனால் இயல்தகு பெறுமான வீச்சு x = 0, 1, 2, ... என்பதின் இறுதியில் n இனை பயன்படுத்துவதனைத் தவிர்க்கிறோம். அங்கு E(X) = np என்பது எதிர்பார்க்கப்பட்ட வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையினைக் குறிப்பதனை அணுகுகோட்டுக்குரிய முறையில் நேரடியான தரவாகக் கொள்கின்றோம். அதாவது $\lambda \equiv$ "எதிர்பார்க்கப்பட்ட வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை" என்பதனை புவசோன் பரம்பலின் பரமானமாகக் கொள்கிறோம். $\lambda = np$ எனும்

தொடர்பினைப் பயன்படுத்தியும் அப்பரமானத்தினை மதிப்பீடு செய்யலாம். இப்பரம்பல் ; $X \approx Poi(\lambda)$ எனக் குறிப்பிடப்படும். X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவு சார்பு பின்வருமாறு அமையும்.

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \; ; x = 0,1,2, ... \qquad ....(6.15)$$

இங்கு e என்பது ஒரு நியம எண் 2.71828 ஆகும். மேலும்

$$\sum_{x} p_X(x) = \sum_{x=0}^{\alpha} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = 1 \quad \text{ஆகும்}$$

அடிப்படையில் இரு சிறப்பியல்புகளை புவசோன் பரம்பலுக்கு கூறமுடியும். அவையாவன:

(i) மாதிரிப்பருமன் n குறிப்பிடத்தக்க அளவு மிகப்பெரியது.

(ii) வெற்றிக்கான மாறா நிகழ்தகவு p குறிப்பிடத்தக்க அளவு மிகச் சிறியது.

λ இன் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு நிகழ்தகவுகளை மேற்படி சார்பு (6.15) இனைப்பயன்படுத்தி கணிப்பிடலாம். இருப்பினும் ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரம்பலைப் போலவே நிகழ்தகவு அட்டவணையினைப் பயன்படுத்தியும் இந்நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடலாம். ஈருறுப்பு மாறியின் நடத்தையை விளக்கியதைப போலவே புவசோன் மாறியின் நடத்தையை விளக்குவதற்கு அதன் இடை, மாறற்றிறன், நியம விலகல் என்பனவற்றை பயன்படுத்தலாம். அவை பின்வருமாறு

$$E(X) = \lambda \qquad ....(6 . 16)$$

$$V(X) = \lambda \qquad ....(6.17)$$

$$6_x = \sqrt{\lambda} \qquad ....(6.18)$$

புவசோன் நிகழ்தகவு அட்டவணை

(Poisson Probability Table)

ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு அட்டவணையினைப்போலவே தொடர்புகள் (6.3) இலிருந்து (6.7) வரையிலான ஐந்துவகை நிகழ்தகவு களையும் இலகுவாகப் பெறுவதற்கு இவ்வகை அட்டவணைகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன. அதாவது λ இன் வெவ்வேறு

பெறுமானங்களுக்கும் r இன் பொருத்தமான பெறுமானங்களுக்கும் இவை அமைக்கப்படுகின்றன. கீழேதரப்படுவது ஒரு புவசோன் நிகழ்தகவு அட்டவணையின் ஒரு பகுதியாகும்.

அட்டவணை - 2: திரட்டுப் புவசோன் நிகழ்தகவுகள்

λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.09516	0.18127	0.25918	0.32968	0.39347	0.45119	0.50341	0.55067	0.59343	0.63212
2	0.00468	0.01752	0.03694	0.06155	0.09020	0.12190	0.15580	0.19121	0.22752	0.26424
3	0.00015	0.00115	0.00360	0.00793	0.01439	0.02312	0.03414	0.04742	0.06286	0.08030
4		0.00006	0.00027	0.00078	0.00175	0.00336	0.00575	0.00908	0.01346	0.01899
5			0.00002	0.00006	0.00017	0.00039	0.00079	0.00141	0.00234	0.00366
6					0.00001	0.00004	0.00009	0.00018	0.00034	0.00059
7							0.00001	0.00002	0.00004	0.00083
8										0.00001
λ	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.66713	0.69881	0.72747	0.75340	0.77687	0.79810	0.81732	0.83470	0.85043	0.86466
2	0.30097	0.33737	0.37318	0.40817	0.44217	0.47507	0.50675	0.53716	0.56625	0.59399
3	0.09958	0.12051	0.14289	0.16650	0.19115	0.21664	0.24278	0.26938	0.29628	0.32332
4	0.02574	0.03377	0.04310	0.05373	0.06564	0.07881	0.09319	0.10871	0.12530	0.14288
5	0.00544	0.00775	0.01066	0.01425	0.01858	0.02368	0.02961	0.03641	0.04408	0.05265
6	0.00097	0.00150	0.00223	0.00320	0.00446	0.00604	0.00800	0.01038	0.01322	0.01656
7	0.00015	0.00025	0.00040	0.00062	0.00093	0.00134	0.00188	0.00257	0.00345	0.00453
8	0.00002	0.00004	0.00006	0.00011	0.00017	0.00026	0.00039	0.00056	0.00079	0.00110
9			0.00001	0.00002	0.00003	0.00005	0.00007	0.00011	0.00016	0.00024
10						0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00005
11									0.00001	0.00001
λ	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
r = 0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
1	0.87754	0.88920	0.89974	0.90928	0.91792	0.92573	0.93279	0.93919	0.94498	0.95021
2	0.62039	0.64543	0.66915	0.69156	0.71270	0.73262	0.75134	0.76892	0.78541	0.80085
3	0.35037	0.37729	0.40396	0.43029	0.45619	0.48157	0.50638	0.53055	0.55404	0.57681
4	0.16136	0.18065	0.20065	0.22128	0.24242	0.26400	0.28591	0.30806	0.33038	0.35277
5	0.06213	0.07250	0.08375	0.09587	0.10882	0.12258	0.13709	0.15232	0.16822	0.18474
6	0.02045	0.02491	0.02998	0.03567	0.04202	0.04904	0.05673	0.06511	0.07417	0.08392
7	0.00586	0.00746	0.00936	0.01159	0.01419	0.01717	0.02057	0.02441	0.02872	0.03351
8	0.00149	0.00198	0.00259	0.00334	0.00425	0.00533	0.00662	0.00813	0.00988	0.01190
9	0.00034	0.00047	0.00064	0.00086	0.00114	0.00149	0.00191	0.00743	0.00306	0.00380
10	0.00007	0.00010	0.00014	0.00020	0.00028	0.00038	0.00050	0.00066	0.00086	0.00110
11	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004	0.00006	0.00009	0.00012	0.00016	0.00022	0.00029
12			0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00004	0.00005	0.00007
13							0.00001	0.00001	0.00001	0.00002

புவசோன் நிகழ்தகவு உருக்கள்

(Poisson Probability Models)

புவசோன் பரம்பலுக்கு அல்லது புவசோன் நிகழ்தகவு மாதிரி யுருவிற்கு பொருத்தமான சில உதாரணங்கள் பின்வருமாறு:

(அ) குறிப்பிட்ட காலப்பகுதியில் ஒவ்வொரு நிமிடமும் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆளிப்பலகையில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை.

(ஆ) குறிப்பிட்ட விற்பனை நிலையத்தில் ஒவ்வொரு மணித்தியாலத்திலும் வந்தடைந்த வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை.

(இ) குறிப்பிட்ட பிரதேசத்தில் ஒவ்வொரு நாளும் குறிப்பிட்ட காரணத்திற்காக நடைபெற்ற இறப்புக்களின் எண் ணிக்கை.

(ஈ) குறிப்பிட்ட ஆவணத்தில் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் காணப்படும் அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை போன்றன.

உதாரணம்: 6.3.1: ஒரு கம்பனியானது தனது பழைய அனுபவங்களின்படி 3% ஆன அதன் உற்பத்திகள் பழுதடைந்தவையாக உற்பத்தியாகின்றன என அறிகின்றது. 100 உறுப்புக்களைக் கொண்ட பெட்டிகள் விற்பனைக்கு அனுப்பப்படுகின்றன.

(i) பெட்டியொன்றில் அவர் எதிர்பார்க்கும் பழுதுகளின் எண்ணிக்கை என்னவாகும். அதன் நியம விலகலையும் கூறுக.

(ii) இவ்வாறான பெட்டிகளை கொள்வனவு செய்பவர் எழுமாறாக பெட்டிகளைப் பரிசோதிக்கின்றனர். ஆகக்கூடியது 5 பழுதுகள் வரை அவர் கருத்தில் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவுகள் என்னவாகும்?

(iii) இவ்வாறான 2000 பெட்டிகளை கொள்வனவு செய்தவர் அவற்றை எவ்வாறு வகைப்படுத்துவார்?

தீர்வு:

n=100, பெட்டியில் ஒரு உற்பத்தி பழுதடைந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு p ஆயின்;

$$p = \frac{3}{100} = 0.03 \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு n மிகப் பெரிதாகவும், p மிகச் சிறிதாகவும் இருப்பது ஈருறுப்புப் பரம்பலைவிட புவசோன் பரம்பலே அதிக பொருத்தமுடையது என்பதனைக் காட்டுகின்றது. X என்பதனை ஒரு பெட்டியில் உள்ள பழுதுகளின் எண்ணிக்கை என்போம்.

(i) λ - பெட்டியில் எதிர்பார்க்கப்படும் பழுதான உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை ஆயின்;

$$E(X) = \lambda = np = 100 \times 0.03 = 3 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே ஒவ்வொரு பெட்டியிலும் சராசரியாக 3 உறுப்புக்கள் பழுதடைந்திருக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம். $X \approx Poi\ (3)$ எனக்குறிக்கலாம்.

X இன் மாறற்றிறன் $V(X) = \lambda = 3$ ஆதலால் நியமவிலகல் $\sigma = \sqrt{3} = 1.732$ ஆகும்.

(ii) Pr(X=0), Pr(X=1), ..., Pr(X=5) என்பனவற்றைக் கணித்தல் வேண்டும். X இன் திணிவு சார்பு;

$$p_X(x) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}\ ;\ x = 0,1,2, \ldots\ldots \text{ ஆதலால்;}$$

இதனைப் பயன்படுத்திக் கணிப்பதும், புவசோன் நிகழ்தகவு அட்டவணையினைப் பயன்படுத்துவதும் ஆகிய இருவழி களையும் பார்ப்போம்.

(அ) கணிப்பீட்டுமுறை பின்வருமாறு அமையும்.

$e^{-3} = 2.71828^{-3} = 0.04979$

$þ(0) = 0.04979 \times \frac{1}{1} = 0.04979$

$þ(1) = 0.04979 \times \frac{3}{1} = 0.14937$

$þ(2) = 0.04979 \times \frac{9}{2} = 0.22405$

$þ(3) = 0.04979 \times \frac{27}{6} = 0.22405$

$þ(4) = 0.04979 \times \frac{81}{24} = 0.16804$

$þ(5) = 0.04979 \times \frac{243}{120} = 0.10082$

(ஆ) புவசோன் நிகழ்தகவு அட்டவணை (அட்டவணை-2) யினைப் பயன்படுத்தினால், அட்டவணையில் $\lambda = 3$ எனும் நிரலைத் தெரிவு செய்தல் வேண்டும்.

$þ(0) = Pr(X \geq 0) - Pr(X \geq 1)$
$= 1.00000 - 0.95021 = 0.04979$

$þ(1) = Pr(X \geq 1) - Pr(X \geq 2)$
$= 095021 - 0.80085 = 0.14936$

$þ(2) = 0.80085 - 0.57681 = 0.22404$

$þ(3) = 0.57681 - 0.35277 = 0.22404$

$þ(4) = 0.35277 - 0.18474 = 0.16803$

$þ(5) = 0.18474 - 0.08392 = 0.10082$

$\sum_{x=0}^{5} þ(x) = 0.91608$ எனவே

ஐந்துக்கு மேற்பட்ட பழுதுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$Pr(X>5) = 1 - Pr(X \leq 5) = 1 - 0.91608 = 0.08392$

(iii) மொத்தப் பெட்டிகள் N = 2000; என்பதனை பழுதுகளின் எண்ணிக்கைக்கேற்ப வேறுபடுத்துவோம்.

$N(X=0) = 2000 \times Pr(X=0) = 2000 \times 0.04979 = 99.58 \cong 99$

$N(X=1) = 2000 \times 0.14936 = 298.72 \cong 299$

$N(X=2) = 2000 \times 0.22404 = 448.08 \cong 448$

$N(X=3) = 448$

$N(X=4) = 2000 \times 0.16803 = 336.06 \cong 336$

$N(X=5) = 2000 \times 0.10082 = 201.64 \cong 202$

$N(X>5) = 167.84 \cong 168$

உதாரணம்: 6.3.2: ஒரு கம்பனியின் வரவேற்பாளர் பகுதியில் பிற்பகல் 2 மணிக்கும் 4 மணிக்கும் இடையில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புகள் நிமிடத்துக்கு 2.5 என்ற வீதத்தில் இருந்தன. பிற்பகலில் எழுமாற்றாக நோக்கப்பட்ட ஒருநிமிடத்தில்

i) ஒரு அழைப்புமில்லை ii) சரியாக மூன்று அழைப்புகள்

iii) ஆகக்குறைந்தது ஏழு அழைப்புகள்

கிடைத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது பிற்பகல் 2 மணிக்கும் 4 மணிக்குமிடையிலான ஒரு குறித்த நிமிடத்தில் பெறப்பட்ட தொலைபேசி அழைப்புக்களின் எண்ணிக்கை என்க. நிமிடத்திற்கு 2.5 அழைப்புக்கள் என்ற வீதத்தில் இத்தோற்றப்பாடு இருப்பதனால் $\lambda = 2.5$ ஆகும். எனவே $X \approx Poi(2.5), X = 1, 2, 3........$

$\therefore\ þ_X(x) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^x}{x!};\ x = 0, 1, 2, ...$

(i) $\Pr(X=0) = \text{Þ}(0) = \frac{e^{-2.5}}{0!} = 0.08208$

புவசோன் நிகழ்தகவு அட்டவணையில் (அட்டவணை 2) λ இன் நிரல் 2.5 இனைத்தெரிவு செய்தால்;

$\Pr(X=0) = 1 - 0.91792 = 0.08208$

(ii) $\Pr(X=3) = \text{Þ}(3) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^3}{3!} = 0.21375$

அட்டவணையின் படி; $\Pr(X=3) = 0.45619 - 0.24242 = 0.21377$

(iii) $\Pr(X \geq 7) = 1 - \Pr(X \leq 6) = 1 - (\text{Þ}(0) + \text{Þ}(1) + ... + \text{Þ}(6))$

$$\text{Þ}(1) = \frac{e^{-2.5}(2.5)}{1!} = 0.20520, \quad \text{Þ}(2) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^2}{2!} = 0.25650$$

$$\text{Þ}(4) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^4}{4!} = 0.13359, \quad \text{Þ}(5) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^5}{5!} = 0.06679$$

$$\text{Þ}(6) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^6}{6!} = 0.02783$$

$\therefore \text{Þ}(0) + \text{Þ}(1) + ... + \text{Þ}(6) = 0.98576$

$\therefore \Pr(X \geq 7) = 1 - 0.98576 = 0.01424$ இது ஒரு நீண்ட கணிப்பீடாகும். அட்டவணையில் இதனை நேரடியாகவே

$\Pr(X \geq 7) = 0.01424$ என்றவாறு பெறலாம்.

6.4 ஏனைய பின்னகப் பரம்பல்கள்

(Other Discrete Distributions)

(அ) மறை ஈருறுப்புப்பரம்பல் (Negative Binomial Distribution)

மேலே விபரிக்கப்பட்ட ஈருறுப்புப்பரம்பல், கேத்திரகணிதப் பரம்பல் என்பனவற்றின் விரிவாக்கமே மறை ஈருறுப்புப் பரம்பலைத் தருகின்றது. இங்கும் பேனோலின் மீள்முயல்வுப் பரிசோதனை பொருத்தமாகின்றது. பிரான்சு நாட்டின் கணிதமேதை பிளய்ஸ் பஸ்கால் (Blaise Pascal, 1623 - 1662) என்பவரினால் இப்பரம்பல்

கண்டுபிடிக்கப்பட்டதனால் இது பஸ்காலின் பரம்பல் எனவும் சொல்லப்படும்.

கேத்திரகணிதப்பரம்பலில் முதலாவது வெற்றி வரும் வரை பேணோலின் பரிசோதனையினை மீளச்செய்கின்றோம். இப்பரம்பலில் மொத்தமாக k வெற்றிகள்வரும் வரை மீளச்செய்வதுடன் அதுவரையுள்ள தோல்விகளும் கணக்கிடப்படும். அதாவது k வெற்றிகளைப் பெறுவதற்கு மொத்தமாக x+k முயல்வுகளை மேற்கொள்ள வேண்டியிருப்பின் பெறப்பட்ட தோல்விகளின் எண்ணிக்கை X இங்குள்ள எழுமாற்று மாறியாகும். எனவே X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவு சார்பு பின்வருமாறு அமையும்.

$$\text{Þ}(x) = \binom{x+k-1}{k-1} p^k q^x; \quad x = 0, 1, 2, ... \qquad ....(6.19)$$

இது $x \approx \mathbf{NB(k,p)}$ எனக் குறிக்கப்படும். இதில் k = 1 ஆக இருக்கையில் இப்பரம்பல் கேத்திரகணிதப் பரம்பலாக ஒடுங்கிவிடும். மேலும் மேற்படி சார்பு ஆனது

$$\text{Þ}(x) = \binom{-k}{x} p^k (-q)^x; \quad x = 0, 1, 2, ...$$

என்ற ஈருறுப்பு பரம்பலின் சார்பு போன்று மாற்றியமைக்கப் படக்கூடியதாக இருப்பதனால் மறை ஈருறுப்புப் பரம்பல் எனப்படுகின்றது. இதன் இடையும், மாறற்றிறனும் பின்வருமாறு பெறப்படலாம்.

$$E(X) = \frac{k(1-p)}{p} \qquad .... (6.20)$$

$$V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2} \qquad .... (6.21)$$

உதாரணம் 6.4.1: தொகையாக ஒரு குறித்த பொருளினை உற்பத்தி செய்கின்ற இயந்திரமானது அவற்றில் 5% ஆனவற்றை

பழுதடைந்தவையாக உற்பத்தியாக்குகின்றது. ஒரு தரக்கட்டுப் பாட்டுப் பரிசோதகர் அவற்றை எழுமாறாக தெரிவு செய்து பரிசோதிக்கின்றார். இரண்டு பழுதுகளைப் பெறுவதற்காக ஆகக் குறைந்தது நான்கு உறுப்புக்களையாவது பரிசோதிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு:

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட எண்ணிக்கையில் மொத்த முயல்வுகள் இருத்தல் வேண்டும். பழுதானபொருள் ஒன்று கண்டுபிடிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = 0.05$ ஆகும். X என்பது இரண்டு பழுதுகளைக் கண்டறிவதற்கு முன்னரான நல்லனவற்றின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால் இது $X \approx NB(2, 0.05)$ எனும் மறை ஈருறுப்புப் பரம்பலை ஒழுகும்.

$$\therefore \text{Þ}(x) = \binom{x+2-1}{2-1}(0.05)^2(0.95)^x; \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

தேவைப்படும் நிகழ்தகவு;

$$\Pr(X \geq 4) = 1 - \Pr(X \leq 3) = 1 - (\text{Þ}(0) + \text{Þ}(1) + \text{Þ}(2) + \text{Þ}(3))$$

ஆனால் $\text{Þ}(x) = \binom{x-1}{1} 0.0025\,(0.95)^x$

$$= 0.0025(x-1)(0.95)^x; \quad x = 1, 2, \ldots\ldots.$$

எனவே Þ(0) பொருத்தமற்றது, $\text{Þ}(1) = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \Pr(X \geq 4) = 1 - [0.0025(0.95)^2 + 0.005(0.95)^3]$$

$$= 1 - 0.0065 = 0.9934$$

உதாரணம்: 6.4.2: குழந்தைகளின் கூட்டமொன்றில் ஒரு தொற்றுநோய் பற்றி பரிசோதிக்கப்படுகின்றது. ஒரு குழந்தைக்கு அத்தொற்றுநோய் பீடித்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.40 ஆகும். ஒவ்வொரு குழந்தையாக சோதனையிடும் வைத்தியர் பத்தாவதாக சோதனையிட்ட குழந்தையானது அந்நோய் பீடித்த

மூன்றாவது குழந்தையாக இருந்தது என கண்டறிந்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு: தரவுகளின்படி $k = 3, x + k = 10$ ஆகும்.

$$\therefore x = 10 - 3 = 7$$

$$\therefore \text{Þ}(x) = \binom{x+3-1}{3-1}(0.4)^3(0.6)^x; \qquad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

தேவையான நிகழ்தகவு

$$\Pr(X+k=10) = \Pr(X=7) = \text{Þ}(7)$$

$$= {}^9C_2(0.4)^3(0.6)^7 = 0.0645$$

(ஆ) அதிபரகேத்திரகணிதப் பரம்பல்

(Hyper - Geometric Distribution)

இப்பரம்பலானது பரிசோதனைக்கு உட்படுத்தப்படும் குடியானது முடிவுள்ள குடியாகவும், எடுக்கப்படும் எழுமாற்று மாதிரி பிரதிவைப்பின்றியும், அம்மாதிரியினுள் உள்ள நிகழ்ச்சிகள் சாராதவையாகவும் இருக்கையில் பொருத்தமாக அமைகின்றது. இங்கும் பேணோலின் வெற்றி - தோல்விப் பிரச்சனையே கருத்தில் கொள்ளப்படும். எடுக்கப்படும் மாதிரியில் உள்ள வெற்றிகள் எண்ணப்படும்.

குடி N உறுப்புக்களைக் கொண்டதாகவும், அவற்றில் K உறுப்புக்கள் வெற்றிக்கு தொடர்புடையவையாகவும், குடியிலிருந்து n பருமனுடைய மாதிரி எடுக்கப்படுவதாகவும், அம்மாதிரியில் X எண்ணிக்கையுடையவை வெற்றியளிப்பதாகவும் கொள்வோம். ஆயின் **X ≈ HG (n, K, N)** என்றவாறு இப்பரம்பல் குறிக்கப்படும். ஆயின் X இன் நிகழ்தகவுத் திணிவுச் சார்பும், இடையும், மாறற்றிறனும் பின்வருமாறு அமையும்.

$$Pr(X=x) = \text{þ}(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \; ; x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n \quad \ldots\ldots\ldots(6.22)$$

$$E(X) = \frac{nK}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.23)$$

$$V(X) = \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.24)$$

உதாரணம் 6.4.3: கார் வாடகைக்குவிடும் ஒரு கம்பனி 12 அம்பசடர், 8 பியற் கார்களை வைத்துள்ளது. அவற்றில் ஐந்து கார்கள் திருத்தவேலைக்காக நிறுத்தப்பட்டுள்ளன. இருவகைக் கார்களும் திருத்தவேலைக்கு உட்படுவதற்கு சமசந்தர்ப்பம் உண்டு. அவை 3 அம்பசடர் ஆகவும், 2 பியற் ஆகவும் இருப்ப தற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு:

திருத்த வேலைக்கு உட்படும் அம்பசடர் கார் பற்றி கவனம் செலுத்துவோம். ஆயின் N=20, K=12, n=5 ஆகும். திருத்தத் துக்கு உட்பட்ட அம்பசடர்களின் எண்ணிக்கை X ஆயின் Pr(X=3) கணிக்கப்படல் வேண்டும்.

இங்கு $X \approx HG(5, 12, 20)$ என்பதால்

$$\text{þ}(x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{8}{5-x}}{\binom{20}{5}} \; ; x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 5$$

$$Pr(X=3) = \text{þ}(3) = \frac{{}^{12}C_3 \times {}^{8}C_2}{{}^{20}C_5} = \left(\frac{12!}{3!\,9!}\right)\left(\frac{8!}{2!\,6!}\right)\left(\frac{5!\;15!}{20!}\right)$$

$$= \frac{(12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4)}{9\times(2\times1)\times6\times(20\times19\times18\times17\times16)} = 0.3973$$

உதாரணம் 6.4.4: சூழல் மாசடைதல் பற்றிய ஆய்வொன்றில் ஒரு கம்பனியின் 24 வாகனங்களில் 6 இனைப் பரிசோதிப்பதற்கு ஆய்வாளர் தீர்மானித்தார். ஆனால் உண்மையில் கம்பனியின் நான்கு வாகனங்கள் மட்டுமே அதிகளவான கழிவுகளை வெளியேற்றுவனவாக உள்ளன. ஆயின் ஆய்வாளரின் மாதிரியில் அவ்வாறான எந்த ஒரு வாகனமுமே அகப்படாமலிப் பதற்கான நிகழ்தகவினையும், ஆய்வாளர் எதிர்பார்க்கும் அவ்வாறான வாகனங்களின் எண்ணிக்கையினையும் அதன் மாறற்றிறனையும் காண்க.

தீர்வு:

X என்பது சோதிக்கப்பட்ட அதிகளவு கழிவுகளை வெளியேற்றும் வாகனங்களைகுறிக்குமாயின் $X \approx HG(6, 4, 24)$

தொடர்பு (6.22) இன்படி

$$\text{þ}(x) = \frac{{}^{4}C_x \times {}^{20}C_{6-x}}{{}^{24}C_6} \; ; x = 0, 1, -, \ldots\ldots, 6$$

எந்த ஒரு வாகனமும் மாதிரிக்குள் அகப்படாமல் இருந்திருந்தால் X=0 ஆகும்.

$$Pr(X=0) = \text{þ}(0) = \frac{{}^{4}C_0 \times {}^{20}C_6}{{}^{24}C_6} = \left(\frac{20!}{6!\,14!}\right)\left(\frac{6!\,18!}{24!}\right) = 0.2879$$

தொடர்புகள் (6.23), (6.24) இனைப் பயன்படுத்தினால்

$$E(X) = \frac{6\times4}{24} = 1$$

அதாவது அக்கம்பனியில் ஒருவாகனம் சூழல்மாசடைவதற்கு காரணமானது என அவர் எதிர்பார்க்கவேண்டும்.

$$V(X) = \frac{6\times4\times20\times18}{24\times24\times23} = 0.6521$$

(இ) **பல்லுறுப்பிப் பரம்பல்** (Multinomial Distribution)

இப்பரம்பல் ஈருறுப்புப் பரம்பலின் நேரடியான விரிவாக்கம் ஆகும். ஒரு எழுமாற்றுப் பரிசோதனையின் விளைவுகளை இரண்டுக்கு மேற்பட்டதாக தம்முள்புறநீக்கலானவையாக வகைப்படுத்த முடியுமாயின் பல்லுறுப்பிப் பரம்பலை வரையறுக்கலாம். அதாவது k வகையான விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் முறையே $x_1, x_2, ..., x_k$ எண்ணிக்கையில் அமைவதாகவும் அம்மொத்த விளைவுகள் n எனவும் கொள்வோம். அத்துடன் ஒவ்வொரு வகையும் வெற்றியடைவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $p_1, p_2 .... p_k$ எனவும் கொண்டால் இப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு திணிவு சார்வு பின்வருமாறு அமையும்.

$$þ(x_1, x_2, ..., x_k) = \Pr(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k)$$

$$= \frac{n!}{x_1!\, x_2! ... x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} .... p_k^{x_k} \qquad ....(6.25)$$

இங்கு $0 \le x_i \le n$ ஆகவும் $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ ஆகவும் உள்ளன. மேலும் இதில் k எண்ணிக்கையுடைய எழுமாற்று மாறிகள் $X_1, X_2, ..., X_k$ தொடர்புபடுகின்றன. அவற்றின் எதிர்வுகளும், மாறற்றிறன்களும் ஈருறுப்புப்பரம்பலைப் போலவே அமைகின்றன.

$$E(X_i) = np_i \; ; \quad i = 1, 2, ..., k \qquad ....(6.26)$$

$$V(X_i) = np_i q_i \; ; \quad i = 1, 2, ..., k \qquad ....(6.27)$$

உதாரணம்: 6.4.5: ஒரு நகரத்தில் மூன்று தொலைக்காட்சி நிலையங்கள் உள்ளன. சனிக்கிழமை இரவுகளில் அவற்றின் நிகழ்ச்சிகளைப் பார்ப்பவர்கள் முறையே 50 வீதம், 30 வீதம், 20 வீதம் ஆன நகரவாசிகள் என அறியமுடிகின்றது. சனிக்கிழமை இரவு நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய ஒரு தொலைக்காட்சி ஊடக

முன்னோடி ஆய்வில் எட்டு நகரவாசிகள் எழுமாறாக தெரிவு செய்யப்பட்டனர். அவர்களில் 5, 2, 1 ஆகியோர் முறையே இத்தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளை பார்வையிடுவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்? இறுதி ஆய்வுக்கு 100 நகரவாசிகள் தெரிவு செய்யப்படின் அவர்களில் தனித்தனியாக மூன்று நிகழ்ச்சி களையும் பார்வையிடுவோரின் எதிர்பார்க்கப்பட்ட எண்ணிக்கை கள் என்னவாகும்?

தீர்வு:

மூன்று இனங்களாக உறுப்புக்கள் அமைவதனால் k = 3, மாதிரிப்பருமன் $n = 8$ ஆகும். ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியையும் ஒருவர் பார்வை யிடுவதற்கான நிகழ்தகவுகள்;

$$P_1 = \frac{50}{100} = 0.5, \quad P_2 = \frac{30}{100} = 0.3, \quad P_3 = \frac{20}{100} = 0.2$$

எனவே இம் மூவுறுப்புப்பரம்பலை (6.25) இன்படி

$$þ(x,y,z) = \frac{8!}{x!\, y!\, z!} (0.5)^x (0.3)^y (0.2)^z \; ;$$

$$x,y,z = 0,1,......,8; \qquad x+y+z = 8$$

என எழுதமுடியும். எனவே தேவைப்படும் நிகழ்தகவு பின்வருமாறு அமையும்.

X,Y,Z என்பன முறையே நகரத்தில் இத்தொலைக்காட்சி நகழ்ச்சி களைப் பார்ப்போரின் எண்ணிக்கைகளாயின்;

$$\Pr(8; X=5, Y = 2, Z = 1) = þ(5,2,1)$$

$$= \frac{8!}{5!\, 2!\, 1!} (0.5)^5 (0.3)^2 (0.2)^1 \; ;$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{2} (0.5)^5 (0.09)(0.2) = 0.0945$$

இறுதி ஆய்வில் 100 பேர் தெரிவுசெய்யப்பட்டிருந்தால் $n = 100$ ஆகும். தொடர்பு (6.26) இன்படி;

$\therefore$ E (X) = 100×0.5 = 50

E (Y) = 100×0.3 = 30

E (Z) = 100×0.2 = 20

என்றவாறு அவர்களின் எண்ணிக்கையை எதிர்பார்க்கலாம்.

இவ்வாறே வேறு பல பின்னக வகை நியமப்பரம்பல் உள்ளன. இவையாவற்றையும் பயன்படுத்தி சிறப்பான நிகழ்தகவு உருக்களை அமைக்கலாம்.

B. தொடர்ச்சி நியமப் பரம்பல்கள்

Continuous Standard Distributions

தொடர்ச்சியான எழுமாற்று மாறிகள் பற்றி அத்தியாயம் 5 இல் பகுதிகள் 5.1, 5.2 என்பனவற்றில் விளக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுக்கு நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்புகளை பயன்படுத்துவது பற்றி பகுதி 5.3 இலும் வேறு உடமைகள், நிகழ்தகவுளைக் கணிப்பது பற்றி பகுதி 5.4 இலும் பரமானங்கள் பற்றி பகுதி 5.5 இலும் விளக்கப்பட்டுள்ளன.

6.5 ஒரு சீர்ப்பரம்பல் (Uniform Distribution)

ஒருசீர்ப்பரம்பல் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வீச்சில் ஒரு எழுமாற்று மாறி ஒரே சீரான பெறுமானங்களை எடுக்கும் எனப்பொருள்படும். அதாவது ஒரு சீர்மாறி X இன் இயல்தகு பெறுமானங்கள் யாவும் அமைவதற்கு சமவாய்ப்புக்கள் அல்லது சமநிகழ்தகவுகள் உண்டு என்பதாகும்.

(அ) பின்னக ஒருசீர்ப்பரம்பல் (Discrete Uniform Distribution)

பின்னக வகையிலும் ஒருசீர்ப்பரம்பல் வரையறுக்கப்படுவதுண்டு. எழுமாற்று மாறியின் பின்னகப் பெறுமானங்களுக்கு வரையறுக்கப்படுவதை பின்னக ஒருசீர்ப்பரம்பல் என்போம்.

அதாவது X இன் இயல்தகு பின்னகப் பெறுமானங்கள் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ ஆயின்

$$þ(x_i) = \Pr(X=x_i) = \frac{1}{n}; \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.28)$$

என்றவாறு அதன் திணிவுசார்பு அமையும். இங்கு எல்லாப் பெறுமானங்களும் சமநிகழ்தகவுகளுடன் அமைவதனைக் காணலாம். இப்பரம்பலுக்கு

$$E(X) = \bar{x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.29)$$

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.30)$$

என்ற வழமையான இடை, மாறற்றிறன் சூத்திரங்கள் அமைவதனைக் காணலாம். சமநிகழ்தகவு எனக்கூறும் பொழுது நிச்சயமற்ற சூழலை தவிர்த்து எல்லாப் பெறுமானங்களும் நிச்சயமாக இடம்பெறும் என்ற விளக்கமளித்தலுக்கு வருகின்றோம். எனவே இதில் வழமையான விவரணப் புள்ளிவிபரவியல் கணிப்பீடுகளுக்குச் செல்லவும் முடியும்.

உதாரணம் 6.5.1: அத்தியாயம் 5 இல் தரப்பட்டுள்ள உதாரணம் 5.2.1 இல் தரப்பட்டுள்ள முதலிரண்டு பரம்பல்களும் இவ்வாறான பின்னக ஒருசீர்ப்பரம்பல்களாகும். ஏனெனில் அவற்றின் திணிவு சார்புகள்

(i) $þ(x) = \frac{1}{2}; \qquad x = -1, +1$

(ii) $þ(x) = \frac{1}{6}; \qquad x = 1,2,\ldots,6$ என்பன ஆகும்.

அப்பரம்பல்களின் உடைமைகள் அவ்வத்தியாயத்தின் பிற்பகுதிகளில் விளக்கப்பட்டுள்ளதனை அவதானிக்கலாம்.

(ஆ) தொடர்ச்சி ஒருசீர்ப் பரம்பல்

(Continnous Uniform Distribution)

தொடர்ச்சியான வகையில் எழுமாற்றுமாறி X ஆனது ஒரு குறித்த ஆயிடை [a,b] என்பதில் தொடர்ச்சியான பெறுமானங்களை

எடுப்பதாகவும், அவை சமநிகழ்தகவுகளுடன் அமைவதாகவும் வரையறுக்கப்படும். இப்பரம்பலை **X≈U[a,b]** எனக்குறிப்பிடலாம். இப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; a \le x \le b \\ 0 & ; \text{மற்றவீச்சுகளில்} \end{cases} \qquad \textbf{.............(6.31)}$$

என வரையறுக்கப்படும். இப்பரம்பலின் இடையும், மாறற்றிறனும் பின்வருமாறு பெறப்படும்.

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \textbf{...................(6.32)}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \textbf{...................(6.33)}$$

உதாரணம்: 6.5.2: அத்தியாயம் 5இல் தரப்பட்டுள்ள பொருளின் நிறை 50 கிராமிலிருந்து 100 கிராமாக அதிகரிக்கும் தோற்றப்பாட்டினைக் கருதுக. பொருளின் நிறை X ஒருசீர் மாறியாகும். எனவே உதாரணம் 5.3.3 இல் விபரிக்கப்பட்டுள்ளது இம்மாறிக்கான ஒருசீர்ப்பரம்பல் ஆகும். இப்பரம்பலின் அடர்த்தி சார்புக்கான தொடர்பு (6.31) உதாரணம் 5.3.5 இல் விளக்கப்பட்டுள்ளதனையும் அவதானிக்கலாம். உதாரணம் 5.4.2 இல் மேலதிக விளக்கங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இவையாவும் ஒருசீர்ப்பரம்பலின் உடமைகள், நடத்தைகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

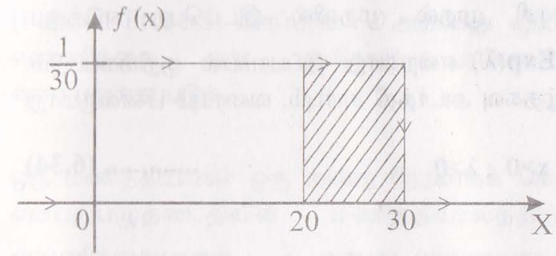
உதாரணம் 6.5.3: நகரமொன்றின் ஒரு புகையிரத வழித்தடத்தினூடாக ஒவ்வொரு அரைமணி நேரத்துக்கும் ஒன்று வீதம் புகையிரதங்கள் செல்கின்றன. இவ்வழித்தடத்தில் உள்ள புகையிரத நிலையமொன்றில் பிரவேசிக்கும் ஒருவர் 20 நிமிடங்களுக்கு குறையாமல் புகையிரமொன்றுக்காக தாமதித்து நிற்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு:

X ≡ "தாமதிக்கவேண்டிய நேரம்" (நிமிடங்களில்) எனக் கொள்வோம். ஆயின் $X \approx U\,[0, 30]$ ஆகும். இதன் அடர்த்தி சார்பு, பரம்பல் சார்பு என்பன

$$f(x) = \frac{1}{30};\ 0 \le x \le 30, \qquad F(x) = \frac{x}{30};\ 0 \le x \le 30$$

என்றவாறு அமைக்கப்படும். கேட்கப்பட்ட நிகழ்தகவு $Pr(X \ge 20)$ ஆகும். இதன் அடர்த்திச்சார்பின் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



இதனை இருவழிகளில் காணலாம்.

$$\text{i) } Pr(X \ge 20) = \int_{20}^{30} \frac{1}{30}\,dx = \frac{1}{30}\,[X]_{20}^{30} = \frac{30-20}{30} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ii) } Pr(X \ge 20) = 1 - Pr(X \le 20) = 1 - F(20) = 1 - \left(\frac{20}{30}\right) = \frac{1}{3}$$

இந்நிகழ்தகவு மேற்படி வரைபில் நிழற்றப்பட்டுள்ளது.

6.6 அடுக்குக்குறிப்பரம்பல் /காமாப்பரம்பல்

(Exponential Distribution / Gamma Distribution)

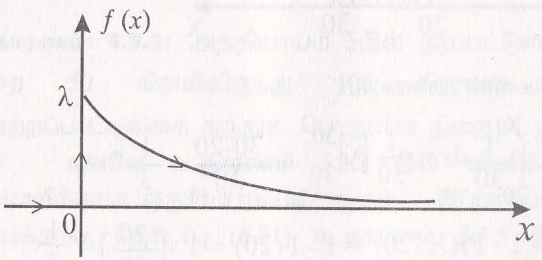
இவ்வகைப்பரம்பல்களை தாமதிக்கும் நேரங்கள் தொடர்பான பிரச்சனைகளுக்குப் பயன்படுத்தலாம். புவசோன் பரம்பலில் இரு வெளியீடுகள் அல்லது நிகழ்வுகள் நடைபெறுவதற்கிடையிலான எழுமாற்று நேரம், ஒவ்வொரு வெளியீட்டுக்குமான தாமதிக்கும் நேரம் என்பன இவ்வகைப்பரம்பல்களால் உருவமைக்கப்படலாம்.

(அ) அடுக்குக்குறிப்பரம்பல்

ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி முதல் முதலில் நடைபெறுவதற்காக எடுக்கும் நேரம் அல்லது தாமதிக்கும் நேரத்தின் பரம்பல் அடுக்குக்குறிப்பரம்பலால் விளக்கப்படும்.

குறிப்பிட்டகால இடைவெளியில் ஒரு குறித்தவகை நிகழ்ச்சி நடைபெறும் வீதம் λ என்பது தரப்படுகையில் X என்பது அவ் வகையான நிகழ்ச்சி முதல் முதலில் இடம்பெற எடுக்கும் நேரமாயின் **X≈Exp(λ)** என்றவாறு இப்பரம்பல் குறிக்கப்படும். இப்பரம்பலின் நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பும், வரையும் பின்வருமாறு அமையும்.

$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$; $x>0$; $\lambda>0$ .... (6.34)



இப்பரம்பலின் இடை, மாறற்றிறன் என்பன பின்வருமாறு கணிக்கப்படலாம்.

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$ ....(6.35)

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$ ....(6.36)

உதாரணம் 6.6.1: இயந்திரமொன்று இயங்கிக்கொண்டிருக்கையில் ஆரம்பித்ததிலிருந்து எழுமாறாக குறித்த இடைவெளியின் பின்னர் பழுதடைந்து இயங்கமறுக்கும் செய்முறை அவதானிக்கப்பட்டது. இச்செய்முறையில் மணித்தியாலத்துக்கு 3 முறை என்ற

வீதத்தில் பழுதடைதல் அவதானிக்கப்பட்டது. ஆரம்பத்திலிருந்து அரைமணித்தியாலத்தின் பின்னர் முதலாவது பழுதடைதல் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்? எதிர்பார்க்கக்கூடிய முதலாவது பழுதடைதல் நேரம் என்னவாகும்?

தீர்வு:

தொடர்ச்சியாக பழுதடைவதும், திருத்தப்படுவதும், இயங்குவதும், பழுதடைவதும் ஆகிய செய்முறை புவசோன் செய்முறை (Poisson Process) எனப்படும். அதவாது ஏற்படும் பழுதுகளின் எண்ணிக்கை ஒரு புவசோன் பரம்பலை ஒழுகுவதாக வரையறுக்கப்படும்.

ஒரு மணித்தியாலம் ஒரு அலகு நேரமாகக் கொள்ளப்படின் $\lambda=3$ என்பதுபழுதடைதலின் மணித்தியாலத்திற்கான சராசரி எண்ணிக்கையாகும். X என்பது முதலாவது பழுதடைதலுக்கு எடுக்கும் நேரம் மணித்தியாலத்தில் ஆயின் X≈Exp(3) ஆகவும் அதன் அடர்த்தி சார்பு,

$f(x)=3e^{-3x}$; $x>0$ ஆகவும் இருக்கும்.

தேவைப்படும் நிகழ்தகவு;

$$\Pr(X>0.5)=\int_{0.5}^{\alpha} 3e^{-3x}\,dx = 3\left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_{0.5}^{\alpha} = \left[e^{-3x}\right]_{\alpha}^{0.5}$$

$$= e^{-1.5} - 0 = 0.2231$$

எனவே முதலாவது பழுதடைதல் அரைமணித்தியாலத்திற்கு இடையில் நடைபெறுவதற்கே அதிக வாய்ப்பு உண்டு. எதிர்பார்க்கும் பழுதடைதல் நேரம் தொடர்பு (6.33) இன்படி

$E(X)=\frac{1}{3}$ ஆகும். அதாவது $\frac{1}{3}\times 60 = 20$ நிமிடங்கள்

எனவே முதலாவது பழுதடைதல் 20 நிமிடங்களில் நடைபெறும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

உதாரணம் 6.6.2: ஒரு நெடுஞ்சாலையில் வேகம் மட்டுப்படுத்தப்பட்ட இடம் ஒன்றில் அரை மணித்தியாலத்தில் சராசரியாக 8.4 கார்கள் 25 கி.மீ இலும் கூடிய வேகத்தில் கடக்கின்றன. இரண்டு அப்படியான கார்கள் இவ்விடத்தைக் கடக்கும் நேர இடைவெளி 5 நிமிடத்திலும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு: ஒரு புவசோன் செய்முறையின் அடுத்தடுத்த நிகழ்வுகளுக்கிடையிலான நேரம் அடுக்குக்குறிப்பரம்பலை ஒழுகுகின்றது. இங்கு அரை மணித்தியாத்தினை ஒரு அலகு நேரமாகக் கொண்டால் $\lambda = 8.4$ என்பது 30 நிமிட இடைவெளியில் 25 கி.மீ இலும் கூடிய வேகத்தில் சென்ற கார்களின் சராசரி எண்ணிக்கை ஆகும். X என்பது அடுத்தடுத்து கூடிய வேகத்தில் சென்ற கார்கள் கடந்த நேரஇடைவெளியாயின் $X \approx Exp(8.4)$ ஆகும். $\therefore f(x)=8.4e^{-8.4x}$; $x>0$. தேவைப்படும் நிகழ்தகவு

$$Pr\left(X<\frac{5}{30}\right) = \int_0^{\frac{1}{6}} 8.4e^{-8.4x}\,dx = \left[e^{-8.4x}\right]_{\frac{1}{6}}^{0} = 1-e^{-1.4} = 0.7534$$

அதாவது ஐந்து நிமிடத்தினுள் இருகார்கள் கூடிய வேகத்தில் அடுத்தடுத்துச் செல்வதற்கு கிட்டத்தட்ட 75வீத சந்தர்ப்பமுண்டு.

(ஆ) **காமாப்பரம்பல்**

அடுக்குக்குறிப்பரம்பலைப் பொதுமைப்படுத்தினால் காமாப்பரம்பல் பெறப்படும். மறுதலையாக காமாப்பரம்பலின் ஒரு சிறப்புவகை அடுக்குக்குறிப்பரம்பலாகும். குறிப்பிட்ட ஒருகாலப்பகுதியில் ஒரு குறித்தவகை நிகழ்ச்சி குறிப்பிட்ட n முறை நடைபெறும்வரை தாமதிக்கும் மொத்தநேரம் X ஒரு காமாப்பரம்பலை ஒழுகுவதாக வரையறுக்கப்படும். (ஒருமுறை நடைபெற தாமதிக்கும் நேரம் அடுக்குக்குறிப்பரம்பல் என மேலே விபரித்துள்ளோம்) ஆயின் இப்பரம்பலை $X \approx G(n,\lambda)$ எனக்குறிப்பிடலாம். இப்பரம்பலின்

நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பு;

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda x}\lambda^{n} x^{n-1}}{\Gamma(n)}\ ;\ x>0,\ \lambda>0 \qquad \text{............(6.37)}$$

என அமையும். இதில் $\Gamma(n) = (n-1)!$ ஆகும். $n=1$ ஆயின் இப் பரம்பல் அடுக்குக்குறிப்பரம்பலாக ஒடுக்குவதைக் காணலாம். இக் காமா மாறி X இன் இடையும், மாறற்றிறனும் பின்வருமாறு அமையும்.

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \qquad \text{..................(6.38)}$$

$$V(X) = \frac{n}{\lambda^2} \qquad \text{..................(6.39)}$$

மழைவீழ்ச்சித்தரவுகளின் பரம்பல் பகுப்பாய்வு, (Rainfall analysis) தப்பிப்பிழைத்தல் பகுப்பாய்வு (Survival Analysis) போன்ற பல சமூக விஞ்ஞான உயிரியல் விஞ்ஞான தோற்றப்பாடு களுக்கு காமாப்பரம்பலைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

உதாரணம் 6.6.3: ஒரு பிரதான வீதியின் சந்தியில் ஏற்படும் விபத்துக்கள் மாதமொன்றுக்கு 1.2 எனும் வீதத்தில் புவசோன் செய்முறைக்குட்பட்டவையாக உள்ளன. இவ்விபத்துக்கள் பற்றிய அவதானிப்பில்

1) முதலாவது விபத்து ஒருமாதத்திற்குள் நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?
2) T என்பது ஐந்தாவது விபத்து நடைபெறுவதற்கு எடுக்கும் காலமாயின் அதன் இடை, மாறற்றின் என்பனவற்றை கணிப்பிடுக.
3) ஐந்து மாதத்தின் பின்னரும்கூட ஐந்தாவது விபத்து நடக்காமலிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்னவாகும்?

தீர்வு:
மாதமொன்றுக்கு 1.2 எனும் வீதத்தில் விபத்துக்கள் நடைபெறுவதால் $\lambda=1.2$ என்பது மாதாந்த சராசரி விபத்துக்களின் எண்ணிக்கையாகும்.

1) T_1 என்பது முதல் விபத்து நடைபெற எடுத்த காலமாயின் $T_1 \approx Exp(1.2)$ ஆகும்.

ஆயின் $f_{T_1}(t) = 1.2\,e^{-1.2t}$; $t>0$. ஆகும். முதல் விபத்து ஒரு மாதத்தினுள் நடக்கவேண்டுமாயின்

$$Pr(T_1<1) = \int_0^1 1.2e^{-1.2t}\,dt = \left[e^{-1.2t}\right]_1^0 = 1 - e^{-1.2} = 0.6988$$

அதாவது இதற்கு கிட்டத்தட்ட 70 சதவீத வாய்ப்பு உண்டு.

2) இதேபோல் T_2, T_3, T_4, T_5 என்பன அடுத்தடுத்து ஏற்படும் விபத்துக்களுக்கான தாமதிப்பு நேரங்களாயின்;

$T = \sum_{i=1}^{5} T_i$ ஆகும். எனவே $T \approx G(5, 1.2)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad E(T) = \frac{5}{1.2} = 4.167, \qquad V(T) = \frac{5}{1.2^2} = 3.472$$

அதாவது ஐந்து விபத்துக்கள் நடைபெற நான்கு மாதங்களுக்கு சிறிது கூட எடுக்கும் என எதிர்பார்க்கலாம்.

3) $T \approx G(5, 1.2)$ ஆதலால் தொடர்பு (6.37) இன்படி T இன் அடர்த்தி சார்பு

$$f_T(t) = \frac{e^{-1.2t}\,1.2^5 t^4}{\Gamma(5)}\ ;\ t>0, \text{ ஆகும்.}$$

ஐந்து மாதத்தில் பின்னரும் கூட ஐந்து விபத்துக்கள் நடக்க வில்லையாயின் ஐந்து மாதத்தினுள் ஏற்பட்ட விபத்துக்களின் எண்ணிக்கை X ஆனது நான்கு அல்லது அதிலும் குறைவானதாக இருத்தல் வேண்டும். $X \approx Poi(5\times1.2) \approx Poi(6)$ ஆதலால்

$$Pr(T>5) = Pr(X \le 4) = \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-6}\,6^x}{x!} = 0.2851 \text{ ஆகும்.}$$

அல்லது நேரடியாக கணிப்பதாயின் $f_T(t) = 0.10368\,e^{-1.2t}\,t^4$.

$$Pr(T<5) = 1 - Pr(T\le5) = 1 - \int_0^5 0.10368\,e^{-1.2t}\,t^4\,dt = 0.2851 \text{ ஆகும்.}$$

இது ஒரு நீண்ட கணிப்பீட்டு முறை ஆகும்.

6.7 செவ்வன் பரம்பல்
(Normal Distribution)

செவ்வன் பரம்பலானது முதன்முதலாக இங்கிலாந்தின் கணித மேதை டிமோய்வர் (De-Moivre) என்பவரினால் 1733 இல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. பின்னர் பிரான்சின் கணிதமேதை லப்பிளாஸ் (Laplace, 1749-1827) என்பவரும், ஜேர்மன் கணிதமேதை கௌஸ் (Gauss, 1777-1855) என்பவரும் இப்பரம்பலினை மீளக் கண்டுபிடித்ததுடன், அதன் உடமை களையும், பிரயோகங்களையும் பிரபலப்படுத்தினர்.

இது தொடர்ச்சியான நியம நிகழ்தகவுப் பரம்பலாக இருந்தாலும் பின்னகப் பரம்பல்களின் பெரிய மாதிரிகளுக்கான தொடர்ச்சிக் கான அண்ணளவாக்கத்தில் பரிகரிப்பதற்கே ஆரம்பத்தில் பயன்படுத்தப்பட்டது. பரிசோதனைகள் மூலம் பெறப்பட்ட பல தரவுத்தொகுதிகளில் வழுக்கள் தொடர்பான ஆய்வுகளில் செவ்வன்பரம்பல் அதிகமுக்கியத்துவம் பெற்றது. ஆனால் புள்ளி விபரக்கோட்பாடுகள் விரிவாக்கம்பெற்ற தற்காலத்தில் எல்லாப் பிரிவுகளிலும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் அதி முக்கிய பரம்பலாக செவ்வன் பரம்பல் உள்ளது.

ஒரு செவ்வன் பரம்பலின் சிறப்பியல்புகள் பின்வருமாறு:

1) பரம்பலின் வளையியாகிய செவ்வன் வளையி (Normal Curve) மணியுருவான, அதாவது நடுவில் குவிவாகவும் இருபுறமும் வால்பகுதிகளை முடிவிலி தூரம் வரை கொண்டதாகவும் இருக்கும்.

2) இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பன சமமாகவும், இம்மையப் பெறுமானம் μ பற்றி பரம்பல் இருபுறமும் சமச்சீராகவும் இருக்கும்.

3) இருபுறமும் கிட்டத்தட்ட நான்கு நியமவிலகல் (4σ) தூரத்தினுள் அநேகமாக எல்லா பரம்பல் பெறுமானங் களையும் உள்ளடக்கியதாகவும் இருக்கும்.

4) இடை μ, நியமவிலகல் σ என்பன பரமானங்களாக இருக்க செவ்வன்மாறி X ஆனது $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ எனக் குறிக்கப்படும்.

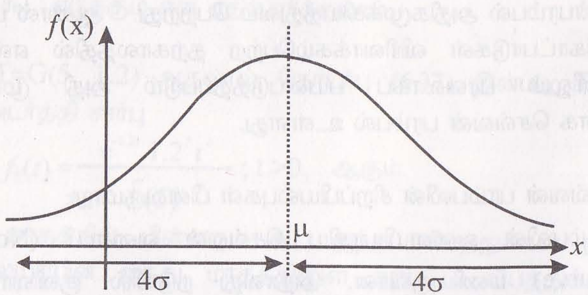
5) μ, σ என்பனவற்றின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு செவ்வன் வளையி மணியுருவில் வெவ்வேறு அமைப்பினைப் பெறும்.

6) ஈருறுப்பு, புவசோன் போன்ற பல பின்னகப்பரம்பல்கள் பெரிய அளவிலான மாதிரிகளுடன் பயன்படுத்தும்போது செவ்வன் பரம்பல் மூலம் அண்ணளவாக்கத்தக்கு உட்படுத்தப்படும்.

ஒரு செவ்வன்மாறியின் நிகழ்தகவு அடர்த்திசார்பும் அதன் வரைபும் பின்வருமாறு அமையும். $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ இற்கு;

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty < x < +\infty \qquad \text{..............(6.40)}$$

இதில் e=2.71828, π=3.14159 ஆகும்



இப்பரம்பலின் கோட்பாடு ரீதியான உடமைகளை அத்தியாயம் 5 இல் தொடர்புகள் (5.18) இலிருந்து (5.22) வரை ஒப்பிட்டு விளங்கிக் கொள்ளலாம். தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பதற்கு தொடர்புகள் (5.25), (5.26), (5.27) இனைப் பார்க்கலாம். இப்பரம்பலின் இடை, மாறற்றிறன் என்பன பின்வருமாறு அமையும்.

$$E(X) = \mu \qquad \text{.....................(6.41)}$$

$$V(X) = \sigma^2 \qquad \text{.....................(6.42)}$$

தொடர்ச்சிப் பரம்பல்களுக்கு நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் மிகவும் சிக்கலானவையாகும். ஏனெனில் பலகணிப்பீடுகளில் தொகையீட்டு நுண்கணிதத்தினைப் பயன்படுத்தவேண்டியுள்ளதாகும். உதாரணம் 6.6.3 இல் நிகழ்தகவுக் கணிப்பீட்டின் இறுதி நிரையினை அவதானித்தால் இது தெளிவாகும். செவ்வன் பரம்பலின் நிகழ்தகவுக் கணிப்பீட்டில்

$$\Pr(X \le x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

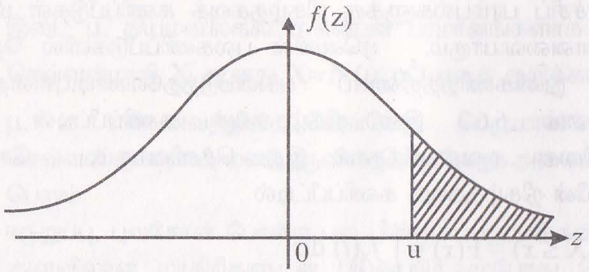
எனும் தொகையீடு சார்பு (6.40) இற்கு மிகவும் சிக்கலானதாகும். வெவ்வேறு μ, σ பெறுமானங்களுக்கும் வெவ்வேறு x பெறுமானங்களுக்கும் மேற்படி நிகழ்தகவுக்கணிப்பீடுகள் (Numerical Analysis போன்ற) உயர் கணிதமுறைகள் மூலம் மேற்கொள்ளப் படுகின்றன. இக்கணிப்பீடுகளைப் பொதுமைப்படுத்தி ஒருமுகப் படுத்துவதற்காக குறித்த ஒரு செவ்வன் பரம்பலுக்கு இக்கணிப்பீடுகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. இப்பரம்பல் நியம செவ்வன் பரம்பல் எனப்படும்.

நியம செவ்வன் பரம்பல் (Standard Normal Distribution)

இடை பூச்சியமும், நியமவிலகல் ஒன்று ஆகவும் வரையறுக்கப்படும் செவ்வன்மாறி நியம செவ்வன்மாறி எனப்படும். அம்மாறி Z ஆயின் **$Z \approx N(0,1)$** எனக்குறிக்கப்படும். எனவே பூச்சியம் பற்றிச் சமச்சீராகவும் இருபுறமும் நான்கு அலகுதூரம் அநேகமாகப் பரம்பியுள்ளதாகவும் இதன் வளையி அமையும். இதன் அடர்த்தி சார்பும், வரைபும் பின்வருமாறு அமையும்.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad ; -\infty < z < +\infty \qquad \text{..............(6.43)}$$

இப்பரம்பலில் நியமசெவ்வன் வளையி பூச்சியம் பற்றி இருபுறமும் சமச்சீராக இருப்பதனால் நேர் அச்சின் பூச்சியத்திலிருந்து நான்கு அலகுவரை (3.99 வரை) வெவ்வேறு u இன் பெறுமானங்களுக்கு நிகழ்தகவுகள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. வரைபில் நிழற்றப்பட்ட



பகுதியே அந்நிகழ்தகவு ஆகும். இதனை பின்வரும் அட்டவணையில் இருந்து பெறலாம்.

அட்டவணை 3 - திரட்டு செவ்வன் நிகழ்தகவுகள்

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43250	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23269	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15150	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00064	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00084	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00032	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017
3.6	0.00016	0.00015	0.00015	0.00014	0.00014	0.00013	0.00013	0.00012	0.00012	0.00011
3.7	0.00011	0.00010	0.00010	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008	0.00008	0.00008
3.8	0.00007	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005
3.9	0.00005	0.00005	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00004	0.00003	0.00003

மாற்றீடுகள் (Transformations)

நியமசெவ்வன் பரம்பலுக்கு மேற்படி நிகழ்தகவு அட்டவணையினைப் பயன்படுத்தி நிகழ்தகவுகளைக் கணிப்பிடலாம். எனவே எந்த ஒரு செவ்வன் பரம்பல் தரப்பட்டு நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகள் தேவைப்பட்டாலும் அதனை நியம செவ்வன் பரம்பலுக்கு மாற்றீடு செய்தல் வேண்டும். $X \approx N(\mu, \sigma^2)$ என ஒரு பொதுவான செவ்வன் பரம்பல் தரப்பட்டால்;

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \text{..............(6.44)}$$

எனும் மாற்றீட்டுச் சூத்திரத்தினைப் பயன்படுத்தினால் **$Z \approx N(0,1)$** என்றவாறு நியமமாக்கல் (Standardization) நடத்தப்படும். அதாவது பொதுவான பரம்பல் நியமப்பரம்பலாக உருமாற்றம் செய்யப்படும்.

அதாவது $X = \mu + \sigma Z$, **..............(6.45)**

அத்துடன் $E(Z) = 0,\ V(Z) = 1,\ \sigma_Z = 1$ ஆகும். **..............(6.46)**

Z புள்ளி (**Z-Scores**)

வெவ்வேறு பரம்பல்களை அவற்றுள் ஒப்பிடுவதற்கும், வெவ்வேறு பரம்பல்களை ஒருங்கிணைத்து பொதுவான ஒரு கூட்டுப்பரம்பலாக இணைப்பதற்கும் Z புள்ளிகள் தேவைப்படுகின்றன. இங்கு ஒவ்வொரு தனிப்பரம்பலும் முதலில் நியமப் பரம்பலாக உருமாற்றம் செய்யப்படும். அதன் மூலம் W, X, Y போன்ற மாறித்தரவுகள் Z தரவுகளாக ஒடுக்கப்படும். இவ்வாறான Z தரவுகளை Z புள்ளிகள் என்கின்றோம். இது செவ்வன் பரம்பலுக்கு மட்டுன்றி அதேபோன்ற (சமச்சீரான) எப்பரம்பலுக்கும் பொருத்தமாகும்.

செவ்வன்பரம்பல்கள் பொதுவாக 4 நியமவிலகல்கள் தூரம் பரவியிருப்பதனால் Z புள்ளிகள் பொதுவாக - 3.99 இலிருந்து

+3.99 வரை பெறுமானங்களை எடுப்பதனைக் காணலாம். இருப்பினும் கோட்பாடு ரீதியாக செவ்வன் பரம்பல் $[-\infty,+\infty]$ எனும் ஆயிடையில் வரையறுக்கப்படுவதனால் $[-3.99, +3.99]$ எனும் வீச்சுக்கு வெளியிலும் Z புள்ளிகளை அவதானிக்கலாம்.

உதாரணம் 6.7.1: ஒரு தொழிற்சாலையில் பணியாற்றும் ஊழியர்களின் மணித்தியாலத்துக்கான ஊதியம் அவர்கள் முடித்துவைத்த வேலையின் தன்மையில் அளவிடப்படுகின்றது. ஊதியப்பரம்பல்ஒரு செவ்வன் பரம்பலைப்போலவும், சராசரி ஊதியம் 200 ரூபாவுடனும், நியமவிலகல் 25ரூபா உடனும் பரவியிருப்பதாக அறிய முடிந்தது. எழுமாறாக தெரிவுசெய் யப்பட்ட ஊழியருக்கு பின்வரும் நிகழ்தகவுகளைக்காண்க.

i) ஊதியம் 240 ரூபாவிலும் கூட
ii) ஊதியம் 230 ரூபாவிலும் குறைவு
iii) ஊதியம் 175 ரூபாவிலும் கூட
iv) ஊதியம் 180 ரூபாவிலும் குறைவு
v) ஊதியம் 160, 190 ரூபாக்களுக்கிடையில்
vi) ஊதியம் 220, 240 ரூபாக்களுக்கிடையில்
vii) ஊதியம் 170, 210 ரூபாக்களுக்கிடையில்

தீர்வு:

X என்பது மணித்தியால ஊதியத்தினைக் குறிக்குமாயின்;

$\mu_X = 200$, $\sigma_X=25$ ஆகும். எனவே $X\approx N(200, 25^2)$ என்பது தொடர்புடைய செவ்வன் பரம்பலாகும்.

$$\therefore Z = \frac{X-200}{25} \approx N(0,1)$$

என்பது தொடர்புடைய நியமமாக்கல் ஆகும். எனவே

i) $Pr(X>240) = Pr(Z> \frac{240-200}{25}) = Pr(Z>1.6)$

ii) $Pr(X<230) = Pr(Z<1.2)$

iii) $Pr(X>175) = Pr(Z>-1.0)$

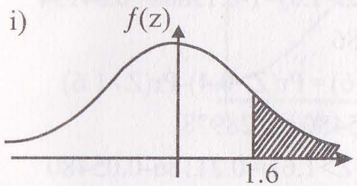
iv) $Pr(X<180) = Pr(Z<-0.8)$

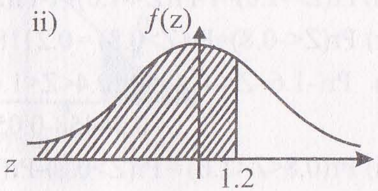
v) $Pr(160<X<190) = Pr(-1.6<Z<-0.4)$

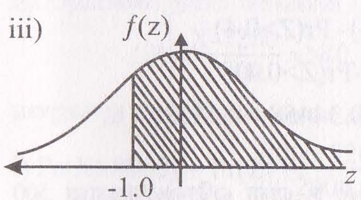
vi) $Pr(220<X<240) = Pr(0.8<Z<1.6)$

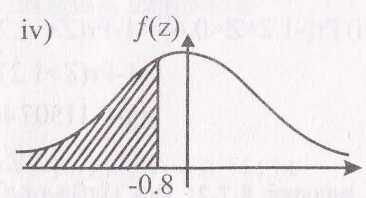
vii) $Pr(170<X<210) = Pr(-1.2<Z<0.4)$

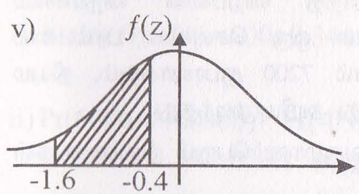
மேற்படி மாற்றீடு செய்யப்பட்ட ஏழு நியம செவ்வன் நிகழ்தகவுகளையும் பின்வருமாறு வரைபுபடுத்தலாம்.

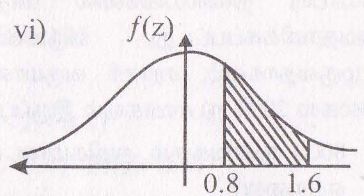
i)


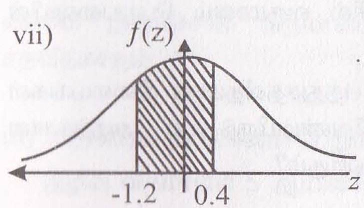
ii)


iii)


iv)


v)


vi)


vii)


எவ்வகை நிகழ்தகவு கேட்கப பட்டாலும் இந்த ஏழுவகைத் தீர்வுகளில் ஏதாவதொன்றாகவே அது அமைந்திருக்கும்.

நியம செவ்வன் நிகழ்தகவு அட்டவணை (அட்டவணை - 3) இனைப் பயன்படுத்தி இந்நிகழ்தகவுகளைப்பெறுவோம். வரைபு (i) இல் உள்ளதை நேரடியாகவும், ஏனையவற்றை சமச்சீரினைப் பயன்படுத்தியும் நிரப்பி நிகழ்தகவினைப் பயன்படுத்தியும் அட்டவணையிலிருந்து கணிப்பிடலாம்.

i) $Pr(Z>1.6) = 0.5480$

ii) $Pr(Z<1.2) = 1-Pr(Z>1.2) = 1-0.11507 = 0.88493$

iii) $Pr(Z>-1.0) = 1-Pr(Z<-1.0) = 1-Pr(Z>1.0) = 1-0.15866 = 0.84134$

iv) $Pr(Z<-0.8) = Pr(Z>0.8) = 0.21186$

v) $Pr(-1.6<Z<-0.4) = Pr(0.4<Z<1.6) = Pr(Z>0.4)-Pr(Z>1.6)$

$= 0.34458-0.05480 = 0.28978$

vi) $Pr(0.8<Z<1.6) = Pr(Z>0.8)-Pr(Z>1.6) = 0.21186-0.05480$

$= 0.15706$

vii) $Pr(-1.2<Z<0.4) = 1-Pr(Z<-1.2) - Pr(Z>0.4)$

$= 1-Pr(Z>1.2)-Pr(Z>0.4)$

$= 1-0.11507 - 0.34458 = 0.54035$

உதாரணம் 6.7.2: ஒரு பிரதேசத்தில் உள்ள ஒரேவகையான 500 வியாபார நிலையங்களில் மாதாந்த விற்பனை வருமானம் அவதானிக்கப்பட்டது. வருமானம் ஒரு செவ்வன் பரம்பலை ஒழுகுவதாகவும், சராசரி வருமானம் 7200 ரூபாவாகவும், நியம விலகல் 2000 ரூபாவாகவும் இருப்பது அறியமுடிந்தது.

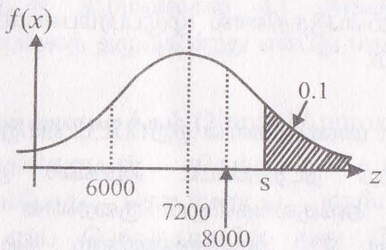
i) 8000 ரூபாவுக்கும் அதிகமான வருமானம்பெறும் நிலையங்கள் எத்தனை?

ii) 6000 ரூபா, 8000 ரூபா வீச்சில் வருமானம் பெறுபவையின் சதவீதம் என்னவாகும்?

iii) அதிகூடிய வருமானம் பெறும் பத்துசதவீதமான நிலையங்கள் பற்றி வரி மதிப்பு செய்யவேண்டியிருந்தால் அதற்கான வருமான வெட்டுப்புள்ளி என்னவாகும்?

தீர்வு:

X என்பது விற்பனை வருமானம் ஆயின் $\mu_X = 7200$ ரூபா, $\sigma_X = 2000$ ரூபா எனத்தரப்பட்டுள்ளது. N=500 நிலையங்கள தெரிவு செய்யப் பட்ட மாதிரியிலுள்ளன. எனவே $X \approx N(7200, 2000^2)$ ஆகும். தொடர்புடைய பொதுவான செவ்வன் பரம்பலும் கேள்விகளும் பின்வருமாறு அமையும்.



இப்பரம்பலை நியம செவ்வன் பரம்பலுக்கு மாற்றினால்

$$Z = \frac{X-7200}{2000} \approx N(0,1)$$

என்றவாறு மாற்றீடுகள் அமையும்.

i) $Pr(X>8000) = Pr(Z > \frac{8000-7200}{2000}) = Pr(Z>0.4) = 0.34458$

எனவே நிலையங்களின் எண்ணிக்கை;

$N(X>8000) = Np = 500 \times 0.34458 = 172$

ii) $Pr(6000<X<8000) = Pr(-0.6<Z<0.4)$

$= 1 - Pr(Z>0.4) - Pr(Z>0.6)$

$= - 0.34458 - 0.27425 = 0.38117$

எனவே இவ்வீச்சில் வருமானம் பெறும் நிலையங்கள் 38.12 சதவீதமாகும்.

iii) அதிகூடிய வருமானம் பெறும் 10 சதவீதமான நிலையங்களின் இழிவு வருமானம் S ஆயின் $Pr(X>S) = 0.1$ ஆகும்.

அதாவது $Pr(Z> \frac{S-7200}{2000}) = 0.1$ என்பதற்கு செவ்வன் நிகழ்தகவு அட்டவணையில் 0.1 இற்கு அண்ணளவான பெறுமானம் 0.10027 இனைப் பயன்படுத்தினால்

$$\frac{S-7200}{2000} = 1.28$$

$\therefore S = 7200+1.28\times2000 = 9760$ ரூபா. இவ்வருமான வெட்டுப் புள்ளியினைப் பயன்படுத்தினால் முழுப்பரம்பலையும் 90%, 10% எனக்கூறாக்கலாம்.

உதாரணம் 6.7.3: மாணவர்களின் குறிப்பிட்ட வயதுத்தொகுதியில் உயரங்கள் பற்றி நடத்தப்பட்ட ஆய்வில் ஐந்து சதவீத மாணவர்கள் 60 அங்குலங்களிலும் குறைவான உயரமும், 10 சதவீதமானவர்கள் 72 அங்குலங்களிலும் கூடிய உயரமும் உடையதாக இருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. உயரப்பரம்பல் ஆனது ஒரு செவ்வன் பரம்பல் எனக்கூறப்பட்டால் அப்பரம்பலை அடையாளம் காண்க.

தீர்வு:

செவ்வன்பரம்பலை அடையாளம் காணதல் என்பது அதன் பரமானங்களாகிய μ (இடை), σ (நியமவிலகல்) என்பனவற்றை மதிப்பிடுதல் ஆகும். X என்பது உயரத்தினைக் குறிக்குமாயின் $X \approx N(\mu,\sigma^2)$ எனக் கொள்வோம். தரவுகளின்படி தொடர்புகள் $Pr(X<60) = 0.05$, $Pr(X>72)=0.10$ என்பன நியம செவ்வனுக்கு மாற்றீடு செய்யப்பட வேண்டியவையாகும். ஆயின்,

$$Pr(Z< \frac{60-\mu}{\sigma}) = 0.05, \quad Pr(Z> \frac{72-\mu}{\sigma}) = 0.10$$

ஆகும். அட்டவணை - 3 இன் நிகழ்தகவுகளைப் பயன்படுத்தினால் பின்வரும் தொடர்புகள் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளாகப் பெறப்படும்.

$$\frac{60-\mu}{\sigma} = -1.645, \quad \frac{72-\mu}{\sigma} = +1.280$$

$$\Rightarrow 60-\mu = -1.645\,\sigma \quad ....(1)$$

$$72-\mu = 1.280\,\sigma \quad ....(2)$$

இச்சமன்பாடுகளை ஒருங்கமைவாகத் தீர்ப்போம்.

$$(2) - (1) \Rightarrow 12 = 2.925\sigma \qquad \Rightarrow \sigma = 4.1$$

$$(2) \Rightarrow \mu = 72 - 1.28 \times 4.1 = 66.75$$

எனவே இம்மாணவர் தொகுதியின் உயரப்பரம்பல் இடை 66.75 அங்குலங்களுடன் நியமவிலகல் 4.1 அங்குலங்களுடனுமான செவ்வன் பரம்பலைத் தழுவுகின்றது என்பது தெளிவாகும்.

செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் (Normal Approximation)

பெரிய மாதிரிகளுடன் நிகழ்தகவுப் பகுப்பாய்வுகளை மேற்கொள்ளும்போது தொடர்புடைய மாறியின் வரைவிலக் கணத்துக்கு ஏற்ப பொருத்தமாயின் அது பின்னக மாறியாக இருப்பினும்கூட செவ்வன் பரம்பலுக்கு அண்மித்ததாக அதன் பரம்பலை அண்ணளவாக்கி நிகழ்தகவுக் கணிப்பீடுகளை மேற்கொள்ளலாம்.

உதாரணமாக ஈருறுப்புப்பரம்பல், புவசோன் பரம்பல் என்பன வற்றுக்கான செவ்வன் அண்ணளவாக்கங்கள் பின்வருமாறு அமையும்.

$$X \approx Bi(n,p) \Rightarrow Z = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \approx N(0,1) \qquad ....(6.46)$$

$$X \approx Poi(\lambda) \Rightarrow Z = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \approx N(0,1) \qquad ....(6.47)$$

இதேபோல் வேறு உருமாற்றங்களும் உள்ளன. இதற்கு மையவெல்லைத்தேற்றம் பயன்படுத்தப்படுகின்றது.

மையவெல்லைத் தேற்றம் (Central Limit Theorem)

முப்பது உறுப்புக்களிலும் கூடிய உறுப்புக்களைக் கொண்ட (n>30) பெரிய எழுமாற்று மாதிரியொன்றினைக் கருதுகையில் அது செவ்வன் பரம்பலினை ஒழுகுகின்றதோ இல்லையோ அதன்

இடை μ உம் நியமவிலகல் σ உம் ஆக இருக்கையில் மாதிரியின் இடையின் பரம்பலானது இடை μ உடனும் நியம விலகல் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ உடனும் ஆன செவ்வன் பரம்பலலொன்றினை மிக நெருக்கமாக அண்ணளவாக ஒழுகும் என்பதுதெளிவாகும்.

6.8 ஏனைய தொடர்ச்சிப் பரம்பல்கள் (Other continuous Distributions)

அ) மாணவனின் t - பரம்பல் (Student's t-Distribution)

இப்பரம்பல் ஐரிஸ் புள்ளியியலாளன் கொசெற் (Gosset) என்பவரினால் 1908இல் முதல் முதலில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இருப்பினும் அவர் ஒரு ஆய்வு மாணவனாக இருந்ததனால் மாணவரின் t-பரம்பல் என இதற்கு பெயரிடப்பட்டது. இப் பரம்பல் பின்னா பிசர் (R.A.Fisher) என்பவரினால் சிறிது மாற்றியமைக் கப்பட்டது.

செவ்வன் பரம்பலைப்போன்று தொடர்ச்சியான பரம்பலாகவும், அல்லது பெரிய மாதிரிகளுடன் செவ்வன் பரம்பலல்லாமலும் இருக்கையில் எவ்வாறு அப்பரம்பல் செவ்வன்பரம்பல் போன்று பரிகரிக்கப்படலாம் என மேலே விபரிக்கப்பட்டுள்ளது. மைய எல்லைத் தேற்றம், செவ்வன் அண்ணளவாக்கம் போன்றன இதற்கு உதவுகின்றன.

ஆனால் சிறிய மாதிரிகளுக்கு $(n<30)$ அவ்வாறான அண்ணள வாக்கம் பொருத்தமாக இராது. எனவே சிறிய மாதிரிகளை அதிகூடிய எண்ணிக்கையில் கருத்தில் கொண்டு அவற்றின் இடைகளின் பரம்பலை நோக்கினால் அதற்கு t- பரம்பல் பொருத்த மாக இருக்கும். இப்பரம்பலின் வளையி நியம செவ்வன் வளையியினைப் போன்று ஆனால் அதைவிட தட்டையானதாக அமையும். இவ்வளையியின் அமைப்பினைக் குறித்துரைத்து அதன் மூலம் தொடர்புடைய நிகழ்தகவுகளை கணிப்பிடுவதற்காக ஒவ்வொரு t-வளையியிற்கும் சுயாதீனப் படிகள் (Degrees of Freedom) வரையறுக்கப்படுகின்றது. இது (n-1) ஆகும்.

$x_1, x_2, ..., x_n$ என்பன சிறிய மாதிரியின் எழுமாற்று பெறுமானங்களாயின்

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad ....(6.48)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2 \qquad ....(6.49)$$

என மாதிரியில் பரமானங்கள் மதிப்பிடப்படுகையில்

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \qquad ....(6.50)$$

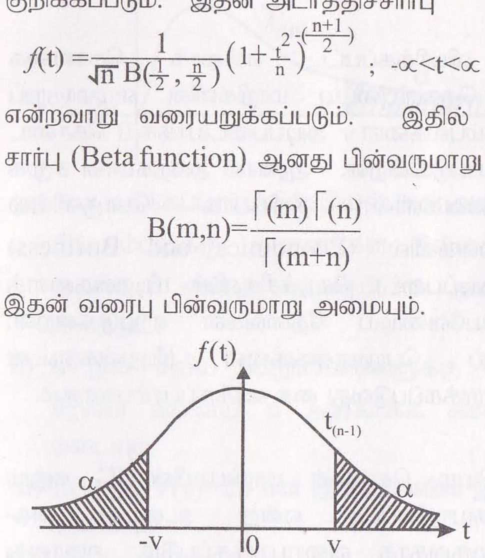
என்றவாறு மாறி t வரையறுக்கப்படும். இப்பரம்பல் $t \approx t_{(n-1)}$ என குறிக்கப்படும். இதன் அடர்த்திச்சார்பு

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n}\,B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} ; \quad -\infty<t<\infty \qquad ....(6.51)$$

என்றவாறு வரையறுக்கப்படும். இதில் B(m,n) எனும் பீற்றா சார்பு (Beta function) ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

இதன் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



ஒரு t பரம்பலின் இயல்புகள் பின்வருமாறு.

i) பூச்சியம்பற்றி சமச்சீரானது அத்துடன் $E(t)=0$ ஆகும்.

ii) மாதிரிப்பருமன் $n \to 30$ போது $t \to Z$ என நியம செவ்வன் வளையியினை நெருங்கும்

iii) தாய்க்குடி செவ்வன் பரம்பலாக இருக்கும் என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது. இருப்பிரும் தாய்க்குடியின்

பரமானங்கள் μ, σ என்பனவற்றில் இப்பரம்பல் தங்கியிராது முழுக்க முழுக்க மாதிரித் தரவுகளில் தங்கியிருப்பதனால் μ, σ பற்றிய தகவல்கள் அவசியமில்லை.

iv) சுயாதீனப்படிகள் (n-1) தரப்பட்ட வெவ்வேறு குறித்துரைக் கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பெறுமானங்கள் α இற்கு அச்சுப்பெறுமா னங்கள் v என்பன அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அவ் அட்டவணை t - அட்டவணை (t-table) எனப்படும்.

(ஆ) கை-வர்க்கப் பரம்பல் (Chi-Square Distribution)

இவ்வத்தியாயத்தில் விபரிக்கப்பட்ட எல்லாக் கொள்கை முறைப்பரம்பல்களும் தொடர்புடைய மாறிகளின் எழுமாற்றுப் பெறுமானங்களின் பரம்பல்களை அடிப்படையாகக் கொண்ட ஆய்வுகளுக்கு விளக்கப்படுகின்றன. ஆனால் அநேகமான சமூக விஞ்ஞானப் பிரச்சனைகளில், குறிப்பாக பொருளியல் வணிகவியல் பிரச்சனைகளில் (Economics and Business) குறிப்பிட்ட ஆரம்ப (அடிப்படை) நிகழ்ச்சிகளின் மீடிறன்களைத் தொடர்புபடுத்தி ஆராயவேண்டிய தேவைகள் ஏற்படுகின்றன. இவ்வாறு எழுமாற்றுப் பெறுமானங்களை மீடிறன்களுடன் தொடர்புபடுத்தி வரையறுக்கப்படுவது கை-வர்க்கப்பரம்பலாகும்.

$Z \approx N(0,1)$ என்பது நியம செவ்வன் மாறியாயின் Z^2 எனும் எழுமாற்று மாறி சுயாதீனப்படி ஒன்று உடைய கை-வர்க்கப்பரம்பலை ஒழுகுவதாக வரையறுக்கப்படும். அதாவது இப்பரம்பல்

$$Z_2 \approx \chi^2_{(1)}$$

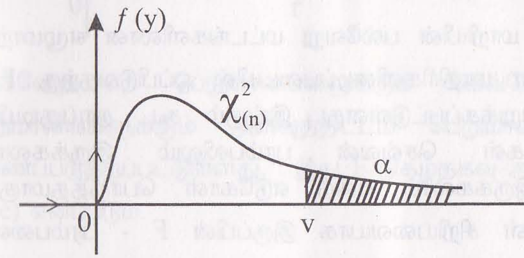
எனக்குறிக்கப்படும் பல்வேறு பெறுமானங்களுக்கு மீடிறன்களுடன் இப்பரம்பல் வரையறுக்கப்படுவதனால் $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ எனும் n எண்ணிக்கையுடைய நியம செவ்வன் மாறிகளை இணைத்து ஒரு பொதுவான கை-வர்க்கப்பரம்பல் வரையறுக்கப்படும்.

அதாவது

$$y = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \text{ என்பதற்கு } y \approx \chi^2_{(n)} \text{ என்றவாறு}$$

சுயாதீனப்படிகள் n உடைய கை-வர்க்கப்பரம்பல் வரையறுக் கப்படும். இதன் அடர்த்திச்சார்பும் வரையும் பின்வருமாறு அமையும்.

$$f(y) = \frac{e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}; y>0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(6.52)$$



ஒரு கை-வர்க்கப்பரம்பலின் இயல்புகள் வருமாறு

i) இப்பரம்பலுக்கு பரமானங்கள் இல்லை, ஆனால் சுயாதீனப் படிகள் n என்பது வளையியின் அமைப்பினைத் தீர்மானிக் கின்றது.

ii) n இன் சிறிய பெறுமானங்களுக்கு நேர் ஓராயப்பரம்பலாக உள்ள வளையி n அதிகரிக்க சமச்சீர்ப்பரம்பலாக மாற்ற மடையும்.

iii) $E(y) = n$, $V(y) = 2n$ என இப்பரம்பலின் இடையும், மாறற்றிறனும் அமையும்.

iv) ஒரு காரணிக்கு மொத்தமாக n மட்டங்களும் அவற்றிற்கு அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறனகள் $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ஆகவும் குறிப்பிட்ட கருதுகோளின் அடிப்படையில் எதிர்பார்க்கப்படும் மீடிறன்கள் $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ஆகவுமிருந்தால்

$$W = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx \chi^2_{(n-1)} \text{ எனக்குறிக்கப்படும்.}$$

v) வெவ்வேறு சுயாதீனப்படிகளுக்கும், வெவ்வேறு α இன் பெறுமானங்களுக்கும் அளவுத்திட்டப் பெறுமானம் (Scale value) அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இது கை-வர்க்க நிகழ்தகவு அட்டவணை (Chi-square probability table) எனப்படும்.

(இ) **பிசரின் F - பரம்பல்** (Fisher's -Distribution)

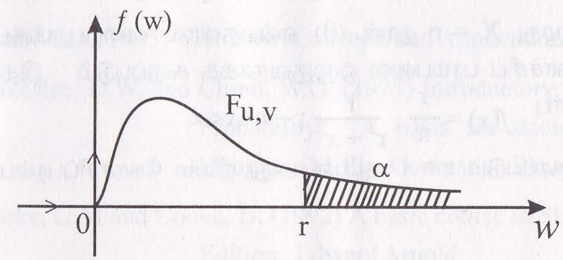
ஒரு எழுமாற்று மாறியின் பல்வேறு மட்டங்களிலான எழுமாற்று பெறுமானங்களை மாதிரிகளினடிப்படையில் ஒப்பிடுவதற்கு F - பரம்பல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கும் கூட தாய்குடியின் புள்ளி விபரங்கள் செவ்வன் பரம்பலிலும் இருக்கலாம். அல்லாமலும் இருக்கலாம் என்ற எடுகோள் பொருத்தமாகும். மாதிரிப்பருமன்கள் சிறியவையாக இருப்பின் F - பரம்பலைப் பயன்படுத்தலாம்.

பிசர் (R.A.Fisher) என்பவரினாலும், செனடெக்கர்(Snedecor) என்பவரினாலும் இப்பரம்பல் வரையறுக்கப்பட்டு, பரவலாகப் பயன்பாட்டுக்காக விரிவுபடுத்தப்பட்டுள்ளன. மாறற்றிறன் பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance - ANOVA) என்பது இப்பரம்பலின் முக்கிய பயன்பாடு ஆகும். F - பரம்பலானது பல்வேறு உயர் புள்ளியியல் முறைகளிலும் பயன்படுத் தப்படுவது முக்கியமாக கவனத்தில் கொள்ளப்படல் வேண்டும்.

X,Y என்பன முறையே u, v சுயாதீனப்படிகளுடன் கூடிய கை-வர்க்கப்பரம்பலை ஒழுகும் இரண்டு சாரா எழுமாற்று மாறிகளாயின் $W = \frac{X/u}{Y/v}$ என்பதனால்

வரையறுக்கப்படுவது சுயாதீனப்படிகள் u, v உடைய F பரம்பலை ஒழுகுவதாகச் செல்லப்படும். இப்பரம்பல் $W \approx F_{u,v}$ என

குறிக்கப்படும். இப்பரம்பலின் அடர்த்திச் சார்பின் வரைபு பின்வருமாறு அமையும்.



வெவ்வேறு u,v பெறுமானங்களுக்கும் வெவ்வேறு α இன் பெறுமானங்களுக்கும் அளவுத்திட்டம் பெறுமானம் r அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இது F நிகழ்தகவு அட்டவணை (F-table) எனப்படும்.

(ஈ) **வேறு பரம்பல்கள்** (Other Distributions)

மேலே விபரிக்கப்பட்டவையினைவிட கீழே தரப்படும் பல தொடர்ச்சிப்பரம்பல்களும் வழக்கத்திலுள்ளன. ஆனால் இவை குறிப்பிட்ட ஒருசில தோற்றப்பாடுகளுக்கு மட்டுமே பொருத்தமாகும். அவையாவன:

i) **மடக்கைச் செவ்வன் பரம்பல்**

(Log - normal Distribution)

Y எனும் மாறி ஒரு செவ்வன் பலம்பலை ஒழுகும்போது Y= மட (X) என்பதனால் ஒரு மாறி X வரையறுக்கப்படலாமாயின் X ஆனது மடக்கைச் செல்வன் பரம்பலை ஒழுகுவதாகச் சொல்லப்படும்.

ii) **றலியின் பரம்பல்** (Rayleigh Distribution)

X,Y என்பன இரு செவ்வன் மாறிகளாயின் $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ என்பதனால் வரையறுக்கப்படுவது ஒரு றலியின் பரம்பல் எனப்படும்.

iii) **கோச்சிப் பரம்பல்** (Cauchy Distribution)

θ என்பது (-π/2, π/2) எனும் ஆயிடையில் ஒருசீர்ப்பரம்பலை ஒழுகும் பொழுது X = r தான் (θ) என்பதனால் வரையறுக்கப்படுவது ஒரு கோச்சிப் பரம்பலை ஒழுகுவதாகக் கூறப்படும். இதன் அடர்த்திச் சார்பு $f(x)=\frac{r}{\pi}\;\frac{1}{r^2+x^2}\;;\; -\infty<x<\infty$
என்பதனால் தரப்படும் r = 1 ஆயின் அது நியம கோச்சிப்பரம்பல் எனப்படும்.

iv) **வெய்பல் பரம்பல்** (Weibull Distribution)

சுவீடிஸ் எந்திரி வெய்பல் (W.Weibull) என்பவரினால் 1939 இல் இப்பரம்பல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. c, α, μ எனும் முப்பரமானங்களுக்கு

$$Y=\left(\frac{X-\mu}{\alpha}\right)^c$$

என மாற்றீடு செய்யப்பட்ட மாறி Y ஒரு அடுக்குக் குறிப்பரம்பலை ஒழுகுமாறு அமையுமாயின் X ஆனது ஒருவெய்பலின்பரம்பலை ஒழுகுவதாக சொல்லப்படும்.

v) **லப்பிளாசின் பரம்பல்** (Laplace Distribution)

இது ஒரு இரட்டை அடுக்குக் குறிப்பரம்பல் (Double exponential distribution) எனப்பட்டு மாறி X ஆனது $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\;;\; -\infty<x<\infty$ எனும்அடர்த்தி சார்பினால் விளக்கப்படும்.

vi) **பீற்றாப் பரம்பல்** (Beta Distribution)

இது பொதுவாக [0,1] எனும் ஆயிடையில் வரையறுக்கப்படும் பரம்பலாகும். கால்பியர்சன் (Karl Pearson) என்பவர் 1895 இல் இப்பரம்பலை பிரேரித்தார். இரண்டுவகை பீற்றாப் பரம்பல்கள் உள்ளன.

இவ்வாறே மேலும் பல பரம்பல்கள் உள்ளன.

Further References

Aczel, A.D. (1995) Statistics : Concepts and Applications, IRWIN.

Blakeslee, D.W. and Chinn, W.G. (1975) Introductory Statistics and Probability, A basis for decision making, Houghton Mifflin Company - Boston.

Clarke, G.M and Cooke, D. (1992) A basic course in Statistics, Third Edition, Edward Arnold.

Elankumaran, C. (1998) Descriptive Statistics, Second (Revised) Edition, Math-Stat Publications, Jaffna.

Ephraim Suhir (1997) Applied Probability for Engineers and Scientists, McGraw Hill.

Gupta, S.C and Kapoor, V.K. (1982) Fundamentals of Mathematical Statistics, Eighth Edition, Sultan Chand & Sons.

Gupta, B.D and Gupta, O.P. (1971) Mathematical Statistics, First Edition, Kedar Nath Ram Nath & Co.

Henrick J.Malik and Kenneth Mullen (1975) Applied Statistics for Business and Economics, Addison-Wesley Publishing company.

John,E.Freund (1992) Mathematical Statistics, Fifth Edition, Prentice-Hall of India.

Hildebrand, D.K. (1986) Statistical Thinking for Behavioral Scientists, Duxbury Press.

Khazanie, R. (1990) Elementary Statistics in a World of Applications, Third Edition, Soft, Foresman / Little, Brown Higher Education.

Loeve, M. (1968) Probability Theory, Third Edition, Affiliated East - West Press Pvt. Ltd.

Milton, J.S and Arnold, J.C. (1995) Introduction to Probability and Statistics, Principles and Applications, Third Edition, McGraw Hill International Edition.

Rohatgi, V.K, (1988) An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics, Wiley Eastern Limited.

Rao, C.R, (1973) Linear Statistical Inference and its Applications, Second Edition, Wiley Eastern Limited.

Sancheti, D.C and Kapoor, V.K. (1985) Statistics: Theory, Methods, and Applications; Third extensively revised edition, Sultan Chand & Sons.

Snedecor, G.W. and Cochran, W.G. (1967) Statistical Methods, Sixth Edition, Oxford & IBH .

Sinha, S.K. (1986) Reliability and Life Testing, Wiley Eastern Limited.

William Feller (1968) An introduction to Probability Theory and its Applications, Volume - I, Third Edition, Wiley Eastern Limited.

William Feller (1966) An introduction to Probability Theory and its Applications, Volume - II, First Edition, Wiley Eastern Limited.

Wilks, S.S. (1962) Mathematical Statistics, John Wiley & Sons.

Weiss, N.A. and Hasslett, M.J. (1993) Introductory Statistics, 3rd Edition, Addison Wesley Publishing Company.

Glossary of Probability Theory

Additive laws	-	கூட்டல் விதிகள்
Asymptotic Distribution	-	அணுகு பரம்பல்
Analysis of Variance	-	மாற்றிறன் பகுப்பாய்வு
Boole's Inequality	-	பூலின் சமனிலி
Baye's concepts	-	பேயிசுவின் கோட்பாடுகள்
Baye's decision	-	பேயிசுவின் தீர்மானம்
Binomial Distribution	-	ஈருறுப்புப் பரம்பல்
Bernoulli's Repeated Trial	-	பேணோலின் மீள் முயல்வு
Bernoulli's Distribution	-	பேணோலின் பரம்பல்
Beta function	-	பீற்றாச் சார்பு
Beta Distribution	-	பீற்றாப் பரம்பல்
Certainty	-	நிச்சயமான சூழல்
Classical approach	-	பண்டையகால அணுகுமுறை
Counting	-	எண்ணுதல்
Combinations	-	சேர்மானங்கள்
Complementary event	-	நிரப்பி நிகழ்ச்சி
Combined Events	-	கூட்டு நிழ்ச்சி
Conditional Probability	-	நிபந்தனை நிகழ்தகவு
Complementary Law	-	நிரப்பி விதி
Continuous Variable	-	தொடர்ச்சியான மாறி
Chi - Square Distribution	-	கைவர்க்கப்பரம்பல்
Central Limit Theorem	-	மையவெல்லைத்தேற்றம்
Cauchy Distribution	-	கோச்சிப் பரம்பல்
Conditional Expectation	-	நிபந்தனை எதிர்வு
Cumulative Probability	-	திரட்டு நிழ்தகவு
Distributive law	-	பரம்பல் விதி

De-Morgan's law	-	தமோகனின் விதி
Decomposition theorem	-	பிரிகைத்தேற்றம்
Discrete variable	-	பின்னக மாறி
Dependent Events	-	சார்ந்த நிகழ்ச்சிகள்
Dependent variables	-	சார்ந்த மாறிகள்
Degres of Freedom	-	சுயாதீனப்படிகள்
Elementary Event	-	ஆரம்ப நிகழ்ச்சி
Event	-	நிகழ்ச்சி
Empirical approach	-	அனுபவ அணுகுமுறை
Equally likely events	-	ஒரேமாதிரியான நிகழ்ச்சிகள்
Equi - probable space	-	சமநிகழ்தகவு வெளி
Expected value	-	எதிர்வுப் பெறுமானம்
Expected Frequencies	-	எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன்கள்
Exponential Distribution	-	அடுக்குக்குறிப்பரம்பல்
Favorable event	-	சாதகமான நிகழ்ச்சி
Finite Probability Space	-	முடிவுள்ள நிகழ்தகவு வெளி
Fisher's F-Distribution	-	பிசரின் F- பரம்பல்
Geometric Distribution	-	கேத்திரகணித பரம்பல்
Gamma Distribution	-	காமாப்பரம்பல்
Gamma function	-	காமாச்சார்பு
Hyper - Geometric Distribution	-	அதிபரகேத்திரகணிதப்பரம்பல்
Independent Variables	-	சாரா மாறிகள்
Independent Events	-	சாரா நிகழ்ச்சிகள்
Joint Probability	-	கூட்டு நிகழ்தகவு
Law of Large Numbers	-	பேரெண் விதி
Linear transformation	-	நேர்கோட்டு உருமாற்றம்
Log-normal Distribution	-	மடக்கைச் செவ்வன் பரம்பல்
Laplace Distribution	-	லப்பிளாசின் பரம்பல்
Mathematical Probability	-	கணித நிகழ்தகவு

Mutually exclusive	-	தம்முள் புறீந்தகலான
Marginal Probability	-	ஓர நிகழ்தகவு
Multiplicative law	-	பெருக்கல் விருத்தி
Multinomial Distribution	-	பல்லுறுப்பிப்பரம்பல்
Numerical Random Valued Phenomena	-	எண்பெறுமான எழுமாற்றுத் தோற்றப்பாடு
Negative Binomial Distribution	-	மறை ஈருறுப்புப் பரம்பல்
Normal Distribution	-	செவ்வன் பரம்பல்
Normal approximation	-	செவ்வன் அண்ணளவாக்கம்
Modern approach	-	நவீன அணுகுமுறை
Objective Probability	-	புறப்போக்கு நிகழ்தகவு
Observed Frequencies	-	அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன்கள்
Possible Outcomes	-	இயல்தகு வெளியீடுகள்
Prior Probability	-	முன்னிலை நிகழ்தகவு
Posterior Probability	-	பின்னிலை நிகழ்தகவு
Permutations	-	வரிசை மாற்றங்கள்
Probability space	-	நிகழ்தகவு வெளி
Possible values	-	இயல்தகு பெறுமானங்கள்
Probability Distribution	-	நிகழ்தகவுப் பரம்பல்
Probability measurable function	-	நிகழ்தகவு அளவீட்டுச் சார்புகள்
Probability Distribution function	-	நிகழ்தகவு பரம்பல் சார்பு
Probability mass function	-	நிகழ்தகவு திணிவு சார்பு
Probability line Graph	-	நிகழ்தகவு கோட்டு வரைபு
Probability density function	-	நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு
Poisson Distribution	-	புவசோன் பரம்பல்
Parameters	-	பரமாணங்கள்
Probability Model	-	நிகழ்தகவு உரு
Random Experiment	-	எழுமாற்றுப் பரிசோதனை
Repeated Trials	-	மீள் முயல்புப் பரிசோதனை

Repetitions	-	மீளவருதல்
Relative frequency	-	தொடர்பு மீடிறன்
Random Variable	-	எழுமாற்று மாறி
Real valued function	-	மெய்யெண் சார்வு
Rayleigh Distribution	-	றலியின் பரம்பல்
Statistical tool	-	புள்ளியியல் கருவி
Subjective Probability	-	அகப்போக்கு நிகழ்தகவு
Statistical probability	-	புள்ளிவிபர நிகழ்தகவு
Selections	-	தெரிவுகள்
Sample Description Space	-	மாதிரி விவரண வெளி
Space of Events	-	நிகழ்ச்சி வெளி
Standard Probability Distribution	-	நியம நிகழ்தகவுப் பரம்பல்
Standard Normal Distribution	-	நியம செவ்வன் பரம்பல்
Standard Phenomena	-	நியமத்தோற்றப்பாடு
Student's t-Distribution	-	மாணவனின் t-பரம்பல்
Tree diagram	-	மரவரிப்படம்
Total probability	-	மொத்த நிகழ்தகவு
Transformation	-	மாற்றீடு, உருமாற்றம்
Testing of Hypothesis	-	கருதுகோள் சோதனைகள்
Uncertainty	-	நிச்சயமற்ற சூழல்
Unfavourable Event	-	பாதகமான நிகழ்ச்சி
Uniform Distribution	-	ஒருசீர்ப்பரம்பல்
Venn Diagram	-	வென்வரிப்படம்
Variance	-	மாறற்றிறன்
With replacement	-	பிரதிவைப்புடன்
Without replacement	-	பிரதிவைப்பின்றி
Weibull Distribution	-	வெய்பலின் பரம்பல்
Z- Score	-	Z - புள்ளி

Concepts of Probability

Chelliah Elankumaran had his primary eduaction at Karaitivu Ramakrishna Mission Boys' School and Vipulananda MMV, and later had his secondary education at Vantharumoolai MMV and St.Michael's College, Batticaloa before entering the University of Jaffna in 1980 as an undergraduate in the Faculty of Science. He completed his B.Sc(Hons) in Statistics in 1984.

He had been attached to the Department of Mathematics and Statistics from January 1985 to December 1989 and during this period he completed his Master's Degree in Statistics, specialized in Applied Statistics and Data Analysis, at the Indian Statistical Institute, Calcutta, India. He has been attached to the Department of Economics from Januarty 1990 and now he is a Senior Lecturer (Upper Grade) and teaches Mathematics and Statistics based courses in this Departemnt.

He completed his Ph.D in 2001, specializring in Medical and Economic Statistics, on a link program between the University of Jaffna and Massey University, New Zealand. He has a number of text books and research publications to his credit. I wish him to continue his efforts to produce Tamil text books for easy learning in his field of study.

Prof.R.Sivachandran,
Dean / Faculty of Arts,
University of Jaffna

N 955 - 99419 - 0 - 9

9559 941903