மாணாக்கர் அட்சர கணிதம்

பகுதி II

(முதற்பகுதியோடு இப்பகுதி 6 ஆம் வகுப்புத் தொடக்கங் கல்விப் பொதுத் தகுதிப்பத்திர வகுப்பு வரைக்கும் உரியது.)

●

நூலாசிரியர்
வ. பொன்னையா, B.A. (Hons.); Ph.D.
(கொக்குவில், இலங்கை.)

●

கொழும்பு
அப்போதிக்கரிசுக் கம்பனி இலிமிற்றெட்டு,
குமாரவீதி, கோட்டை, கொழும்பு, இலங்கை.
1958

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இல: ஈ.பீபி/சீ/133

சான்றிதல்

மாணுக்கர் அட்சர கணிதம்—பகுதி II

1952ம் ஆண்டு பெப்ருவரி மாதம் 29ந் திகதி வெளிவந்துள்ள இலங்கை அரசாங்க வர்த்தமானப் பத்திரிகையில் உதவி நன்கொடை பெறும் தன்மொழிப் பாடசாலைகளுக்கும், இரு பாஷைப் பாடசாலைகளுக்கும் ஆங்கில பாடசாலைகளுக்குமான ஒழுங்குச் சட்டத்தின் 19 (A)-ம் பிரிவில் பிரசுரிக்கப்பட்டதற்கமைய இப்புத்தகம் க. பொ. த. வகுப்புகளில் அட்சர கணிதம் படிப்பித்தற்கு ஒரு பாடப் புத்தகமாக 1969ம் ஆண்டு டிசெம்பர் மாதம் 31ந் திகதிவரை உபயோகித்தற்கு வித்தியாதிபதி அவர்களால் அங்கீகரிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஜீவானந்த நாணயக்கார,
செயலாளர்.
பாடநூற் பிரசுர ஆலோசனைச் சபை.

பாடநூற் பிரசுர ஆலோசனைச் சபை,
மலாய் வீதி, கொழும்பு 2.
7-10-1964.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மாணாக்கர் அட்சர கணிதம்

பகுதி II

(முதற்பகுதியோடு இப்பகுதி 6 ஆம் வகுப்புத் தொடக்கங் கல்விப் பொதுத் தகுதிப்பத்திர வகுப்பு வரைக்கும் உரியது.)

●

நூலாசிரியர்

வ. பொன்னையா, B.A. (Hons.); Ph.D.

(கொக்குவில், இலங்கை.)

●

[பதிப்புரிமை அப்போதிக்கரிசுக் கம்பனிக்கே உரியது.]

பிரசுரிப்பவர்

கொழும்பு அப்போதிக்கரிசுக் கம்பனி இலிமிற்றெட்டு,

குமாரவீதி, கோட்டை, கொழும்பு, இலங்கை.

1958

விலை ரூபா. 4.00

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முதற் பதிப்பு 1958

கொழும்பு அப்போதிக்கரிசுக் கம்பனி இலிமிற்றெட்டு
அச்சியந்திரசாலையிற் பதிப்பிக்கப்பட்டது.

உள்ளுறை

பகுதி II

அத்தியாயம்		பக்கம்
15.	பொ. கா. பெ., பொ. ம. சி. என்பன ..	223
16.	பின்னங்கள்	234
17.	கடுமையான சமன்பாடுகளும் உத்திக்கணக்குக் களும்	255
	பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 6	272
18.	சார்புக்குறியீடும் மீதித்தேற்றமும் ..	277
19.	இருபடிச் சமன்பாடுகள்	286
20.	இருபடிச் சமன்பாட்டு உத்திக் கணக்குக்கள்	301
21.	இருபடிச் சார்பின் வரைப்படம்	311
	பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 7	331
22.	குறிகாட்டிக் கொள்கையும் விகிதமுறு மூலங்களும்	337
23.	மடக்கைக் கொள்கையும் மடக்கைகளுடைய பிரயோகங்களும்	358
24.	ஒருங்கமையிருபடிச் சமன்பாடுகளும் உத்திக்கணக்குக்களும்	380
25.	இருபடிச் சார்புகளின் வரைப்படங்கள் (தொடர்ச்சி)	396
	பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 8 ..	405
26.	விகிதமும் விகிதசமமும்	413
27.	மாறல்	435
28.	விருத்திகள்	446
	பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 9	484

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

முகவுரை

மாணுக்கர் அட்சரகணிதம் என்னும் நூல் இங்கிலாந்துக் கணிதக் குழுவினரால் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட முறைப்படி அட்சரகணிதத்தைப் பொதுமைப்பாடுடைய எண் கணிதமெனக்கொண்டு எழுதப்பட்டது; கணிதங் கற்பிக்கும் முறையில் நூலாசிரியரின் 35 ஆண்டு அனுபவத்தையுங் கொண்டது. இந்நூலின் முதற்பகுதி ஆறும் வகுப்புத் தொடக்கம் எட்டாம் வகுப்பு வரைக்கும் பயன்படும்; இரண்டாம் பகுதி கல்விப்பொதுத்தகுதிப் பத்திர வகுப்பில் வழங்கத்தக்கது. இப்பகுதியின் அத்தியாயங்களும் முதற்பகுதியிற்போலப் படிமுறையில் எழுதப்பட்டன. மாணுக்கர் அத்தியாயப் பொருள்களிலே தேர்ச்சியடைதற் பொருட்டுப் பரீட்சைப் பத்திரங்கள் இடையிடையை சேர்க்கப்பட்டிருக்கின்றன.

இலங்கையரசுத் தன்மொழியலுவலகத்தாரால் வெளிப்படுத்தப்பட்ட கலைச் சொற்களே இந்நூலில் எடுத்தாளப்பட்டன. இதன்கண் யாதாயினுந் திருத்தஞ் செய்யப்படல் வேண்டுமாயின், அதனை நூலாசிரியருக்கு அறிவித்தல் சிறந்த தொண்டாகும்.

இந்நூலைச் சிறந்த முறையில் வெளிப்படுத்தித்தந்த அப்போதிக்கரிசுக் கம்பனியாருக்கு நூலாசிரியரது நன்றி உரியது.

வ. பொன்னையா

ஐப்பசி, 1958 (கொக்குவில், இலங்கை.)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 15

பொ. கா. பெ., பொ. ம. சி. என்பன

90. அட்சரகணிதத்தில் இரண்டு கோவைகளை, அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட கோவைகளை மீதியின்றி வகுக்குங் கோவைகள் பொதுக் காரணிகள் எனப்படும். அன்றிப் பொதுச் சினைகள் என்றுங் கூறலாம். அவற்றுட் பெரியது பொ.கா.பெ., அல்லது பொ.சி.பெ. என்று சுருக்க முறையால் அழைக்கப்படும். பொ.கா.பெ. என்பது பொதுக்காரணிகளுட் பெரியதென்றும் பொ.சி.பெ. என்பது பொதுச்சினைகளுட் பெரியது என்றும் விரியும்.

ஒருறுப்புக்கோவைகளுடைய பொ.கா.பெ. உளவாராய்வு மாத்திரையாற் காணப்படும்.

உ—ம்.

1. $அ^2இ$, $அ^3இ^2$, $அ^2இஉ$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

இவற்றின் பொ.கா.பெ. $அ^2இ$ என்று உளவாராய்வாற் காணலாம்.

உ—ம்.

2. $6கந^2ய^3, 8க^2ந^3ய, 10க^3நய^2$. இவற்றின் பொ.கா.பெ. ஐக் காண்க.

6, 8, 10 என்னும் இவற்றின் பொ.கா.பெ. 2 ஆகும். $கந^2ய^3$, $க^2ந^3ய$, $க^3நய^2$ என்னும் இவற்றின் பொ.கா.பெ. கநய ஆகும்.

∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. 2கநய ஆகும்.

உ—ம்.

3. $6க(க-ந)$, $9க^2ந(க-ந)$. இவற்றின் பொ.கா.பெ. யாது?

6, 9 என்னும் இவற்றின் பொ.கா.பெ. 3 ஆகும்.

$க(க-ந), க^2ந(க-ந)$ என்னும் இவற்றின் பொ.கா.பெ. $க(க-ந)$.

∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. $3க(க-ந)$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எண்குணகங்களோடு பொருந்திய கோவைகளின் பொ.கா.பெ.ஐக் கண்டவிடத்து அக்குணகங்களின் பொ.கா.பெ. ஐக் கண்டு, அதனை அட்சரகணிதக் கோவைகளின் பொ.கா.பெ. இன் குணகமாக நிறுத்தியமை காண்க.

பயிற்சி 15 (அ)

பின்வருங் கோவைகளின் பொ.கா.பெ. ஐக் காண்க.

1. $\text{அ}^2\text{இ}^3$, $\text{அ}^3\text{இ}^2$.
2. 2அ^2, $6\text{அ}^2\text{இ}$.
3. $6\text{க}^3\text{ந}^5$, $4\text{க}^5\text{ந}^3$.
4. $12\text{க}^4\text{ந}^6$, $20\text{க}^6\text{ந}^4$.
5. $2\text{க}^2\text{ந}$, $8\text{க}^4\text{ந}^3$.
6. 4, $8\text{க}^2\text{ந}$.
7. $\text{ப}^2\text{மவ}$, $\text{பம}^2\text{வ}$, பமவ^2.
8. $\text{பம}^2\text{வ}^3$, $\text{ப}^2\text{ம}^3\text{வ}$, $\text{ப}^3\text{மவ}^2$.
9. $6\text{க}^2\text{ந}^3\text{ய}^4$, $8\text{க}^3\text{ந}^4\text{ய}^2$, $10\text{க}^4\text{ந}^2\text{ய}^3$.
10. $12\text{க}^5\text{ந}^4\text{ய}^3$, $18\text{க}^4\text{ந}^3\text{ய}^5$, $24\text{க}^3\text{ந}^4\text{ய}^5$.
11. $\text{அ}(\text{அ} - \text{இ})$, $\text{இ}(\text{அ} - \text{இ})$.
12. $\text{கந}(\text{க} + \text{ந})$, $\text{க}^2\text{ந}^2(\text{க} + \text{ந})$.
13. $\text{க}^2\text{ந}(\text{க} - \text{ந})$, $\text{கந}^2(\text{க} - \text{ந})$.
14. $8\text{க}^2\text{ந}^2\text{ய}(\text{க} + \text{ந} - \text{ய})$, $12\text{க}^2\text{நய}^2(\text{க} + \text{ந} - \text{ய})$.
15. $6\text{அ}^2\text{இ}(\text{க} - 1)$, $12\text{அஇ}^2(\text{க} - 1)$.
16. $18\text{அ}^2\text{இ}^3(\text{க} - \text{அ})$, $27\text{அ}^3\text{இ}^2(\text{க} - \text{அ})$.
17. $8(2\text{க} + 3)(3\text{க} - 2)$, $12(3\text{க} + 2)(3\text{க} - 2)$.
18. $10\text{க}(\text{க} + 1)(\text{க} + 2)$, $15(\text{க} + 1)(\text{க} + 2)(\text{க} + 3)$.
19. $4(\text{க} - 1)^2(\text{க} + 2)^2$, $2(\text{க} + 2)^2(\text{க} - 3)^2$.
20. $3(1 - \text{க})^2$, $9(1 - \text{க})^3(1 + \text{க})$.
21. $(\text{க} - 1)(\text{க} + 2)$, $(\text{க} + 2)(\text{க} - 3)$, $(\text{க} - 4)(\text{க} + 2)$.
22. $4\text{க}^2(\text{க} + 1^2)(\text{க} + 2)^2$, $8\text{க}^2(\text{க} + 2^2)(\text{க} + 3)^2$, $12\text{க}^2(\text{க} + 2)^2(\text{க} + 4)^2$.
23. $(2\text{க} - 1)^2(3\text{க} + 1)^2$, $(3\text{க} - 1)^2(3\text{க} + 1)^2$, $(2\text{க} - 3)(3\text{க} + 1)^2$.
24. $5(1 - \text{க})^3$, $10(1 + \text{க})(1 - \text{க})^3$, $15(1 + \text{க})(1 - \text{க})^2$.

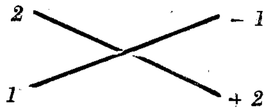
91. பல்லுறுப்புக் கோவைகளுடைய பொ.கா.பெ. (1) காரணிமுறை (2) வகுத்தன்முறை என்னும் இரு முறைகள் பற்றிக் காணப்படும்.

(1) காரணிமுறை: தந்த கோவைகள் ஒவ்வொன்றுங் காரணியாக்க இடங்கொடுக்குமெனின், இம்முறையாளப்படும். இம்முறையிற் கோவைகளைக் காரணிகளாகப் பிரித்துவிட்டு உளவாராய்வு மாத்திரையால் பொ.கா.பெ. காணப்படும்.

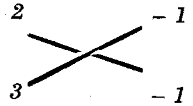
(உ—ம்).

1. $2\text{க}^2 + 3\text{கந} - 2\text{ந}^2$, $6\text{க}^2 - 5\text{கந} + \text{ந}^2$. இவற்றினுடைய பொ.கா.பெ. ஐக் காண்க.

$2\text{க}^2 + 3\text{கந} - 2\text{ந}^2$);
$= (2\text{க} - \text{ந})(\text{க} + 2\text{ந})$.



$6\text{க}^2 - 5\text{கந} + \text{ந}^2$
$= (2\text{க} - \text{ந})(3\text{க} - \text{ந})$;



∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. $(2\text{க} - \text{ந})$ ஆகும்.

உ—ம்.

2. $6\text{க}^3\text{ந} - 6\text{கந}^3$, $9\text{க}^4\text{ந} - 9\text{கந}^4$, $15\text{க}^7\text{ந} - 15\text{கந}^7$. இவற்றினுடைய பொ.கா.பெ. ஐக் காண்க.

$$6\text{க}^3\text{ந} - 6\text{கந}^3 = 6\text{கந}(\text{க}^2 - \text{ந}^2) = 6\text{கந}(\text{க} - \text{ந})(\text{க} + \text{ந});$$
$$9\text{க}^4\text{ந} - 9\text{கந}^4 = 9\text{கந}(\text{க}^3 - \text{ந}^3) = 9\text{கந}(\text{க} - \text{ந})(\text{க}^2 + \text{கந} + \text{ந}^2);$$
$$15\text{க}^7\text{ந} - 15\text{கந}^7 = 15\text{கந}(\text{க}^6 - \text{ந}^6) = 15\text{கந}(\text{க}^3 - \text{ந}^3)(\text{க}^3 + \text{ந}^3)$$
$$= 15\text{கந}(\text{க} - \text{ந})(\text{க}^2 + \text{கந} + \text{ந}^2)(\text{க} + \text{ந})(\text{க}^2 - \text{கந} + \text{ந}^2)$$
$$= 15\text{கந}(\text{க} - \text{ந})(\text{க} + \text{ந})(\text{க}^2 + \text{கந} + \text{ந}^2)(\text{க}^2 - \text{கந} + \text{ந}^2);$$

∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. $3\text{கந}(\text{க} - \text{ந})$ ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(2). **வகுத்தன்முறை** : இம்முறை பின்வரும் பொதுவுண்மையை அடிக்கொண்டுள்ளது.

ஆ உம் ஈ உம் க இனுடைய முழுவெண்சார்புகளாயின், அவற்றினுடைய பொ.கா.பெ. பஆ + மஈ என்பதன் காரணியாகும். இங்கு ப உம் ம உம் கஇனுடைய முழுவெண் சார்புகளாயிருக்கலாம்; அன்றி, மாறிலிகளாயு மிருக்கலாம்.

இவ்வுண்மையை நிறுவுவோம்.

ஆ, ஈ என்னும் இவற்றினுடைய பொ.கா.பெ. வ ஆகுக.

ஆ, ஈ. என்னும் இவற்றை வ ஆல் வகுக்க வரும் ஈவு முறையே அ உம் இ உம்ஆகுக.

∴ ஆ = அவ, ஈ = இவ.

∴ பஆ = அபவ, மஈ = இமவ.

∴ பஆ + மஈ = அபவ + இமவ = வ (அப + இம).

∴ வ என்பது பஆ + மஈ என்பதன் காரணியாகும்.

∴ ஆ, ஈ, என்னும் இவற்றினுடைய பொ.கா.பெ. பஆ + மஈ என்பதன் காரணியாகும்.

இனி, இதிலிருந்து ஒரு சிறப்புண்மையைப் பெறுவோம் :—

ப = 1, ம = 1 ஆயின், பஆ + மஈ என்பது ஆ + ஈ ஆகும்.

ப = 1, ம = − 1 ஆயின், பஆ + மஈ என்பது ஆ − ஈ ஆகும்.

∴ க இனுடைய இருமுழுவெண்சார்புகளுடைய பொ.கா.பெ. அவற்றினுடைய கூட்டுத் தொகைக்கும் வித்தியாசத்திற்குங் காரணியாகும்.

இவற்றைப் பயன்படுத்தி, பொ.கா.பெ. காணுதற்குரிய வகுத்தன் முறையை ஆராய்வோம்:—

அ உம் வ உம் க இனுடைய இருமுழுவெண்சார்புகளாகுக. அ என்பதை வ ஆல் வகுக்க வரும் ஈவு இ$_1$ ஆகுக; மீதி ம$_1$ ஆகுக. வ என்பதை ம$_1$ ஆல் வகுக்க வரும் ஈவு இ^2 ஆகுக; மீதி ம$_2$ ஆகுக. ம$_1$ என்பதை ம$_2$ ஆல் வகுக்க வரும் ஈவு இ$_3$ ஆகுக; மீதி ம$_3$ ஆகுக.

இவ்வகுத்தற்செய்கைகளைப்பின்வருமாறு காட்டலாம்:—

```
வ) அ   (இ₁
   இ₁வ
   ————
   ம₁)வ(இ₂
      இ₂ம₁
      ————
      ம₂)ம₁(இ₃
          இ₃ம₂
          ————
          ம₃. . .
```

இதிலிருந்து வகுத்தலுருமாற்ற விதிப்படி பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம் :—

அ = இ$_1$வ + ம$_1$; .. .. .. (1)

வ = இ$_2$ம$_1$ + ம$_2$; .. .. .. (2)

ம$_1$ = இ$_3$ம$_2$ + ம$_3$; .. .. .. (3)

(1) இல் இருந்து ம$_1$ = அ − இ$_1$வ ; .. (4)

(2) ,, ,, ம$_2$ = வ − இ$_2$ம$_1$; .. (5)

(3) ,, ,, ம$_3$ = ம$_1$ − இ$_3$ம$_2$. .. (6)

மேலேதந்த பொதுவுண்மைபற்றி (4) இல் இருந்து அ இற்கும் வ இற்குமுள்ள பொதுக்காரணிகளெல்லாம் ம$_1$ இற்குங் காரணிகளாகுமென்று அறியலாம். (1) இல் இருந்து வ இற்கும் ம$_1$ இற்கும் உள்ள பொதுக்காரணிகளெல்லாம் அ இற்குங் காரணிகள் ஆகு மென்று அறியலாம். ஆகவே, அ இற்கும் வ இற்குமுள்ள பொ.கா.பெ. வ இற்கும் ம$_1$ இற்கும் பொ.கா.பெ. ஆகும்.

அதுபோல, (2) இலும் (5) இலுமிருந்து வ இற்கும் ம$_1$ இற்குமுள்ள பொ.கா.பெ. ம$_1$ இற்கும் ம$_2$ இற்குங் பொ.கா.பெ. ஆகும்.

(6) இல் இருந்து ம$_1$ இற்கும் ம$_2$ இற்கும் உள்ள பொதுக்காரணிகள் எல்லாம் ம$_3$ இற்குங் காரணியாகும்,

ம$_3$ 0 ஆயின், ஈற்று வகுக்குங் கோவையாகிய ம$_2$ என்பது ம$_1$, ம$_2$ என்னும் இரண்டிற்கும் பொ.கா.பெ. ஆகும். எனவே அது அ இற்கும்வ இற்கும் பொ.கா.பெ. ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

m_3 ஒரு மாறிலியாயின், அ இற்கும் வ இற்கும் பொ.கா.பெ. இல்லையெனலாம்.

இதிலிருந்து பின்வருவன பெறப்படும் :—

வகுத்தூற் செய்கை 0 மீதியைத் தந்தால், ஈற்று வகுக்குமெண்ணே வேண்டிய பொ.கா.பெ. ஆகும்.

வகுத்தற் செய்கை ஒருமாறிலியாகிய மீதியைத் தந்தால் அக் கோவைகளுக்கு பொ.கா.பெ. இல்லை.

இம்முறையை உதாரணங்களால் விளக்குவோம் :—

உ—ம்

1\. $4க^3 - 15க + 9$, $4க^3 - 10க^2 + 9$. இவற்றிற்குப் பொ.கா.பெ. காண்க.

$2க^2$	$4க^3 \qquad - 15க + 9$		$4க^3 - 10க^2 \qquad + 9$	1
	$4க^3 - 6க^2$		$4க^3 \qquad - 15க + 9$	
$3க$	$6க^2 - 15க + 9$	$-5க$	$-10க^2 + 15க$	
	$6க^2 - 9க$		$2க - 3$	
-3	$-6க + 9$			
	$-6க + 9$			

∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. $2க - 3$ ஆகும்.

இங்கு $4க^3 - 10க^2 + 9$ என்பதை $4க^3 - 15க + 9$ என்பதால் வகுக்க $-10க^2 + 15க$ என்பதை மீதியாகப் பெறுவோம். தந்த இருகோவைகளுக்குமுள்ள பொ.கா.பெ. முதற் கோவைக்கும் அவ்விரு கோவைகளுடைய வித்தியாசமாகிய $-10க^2 + 15க$ இற்கும் பொ.கா.பெ. ஆகும். இனி, வித்தியாசத்தின் காரணியாகிய $-5க$ என்பது முதற் கோவைக்குக் காரணியாகாமையின், அதனை நீக்கி விடலாம். ஆயின், வேண்டிய பொ.கா.பெ. $2க - 3$ என்பதற்கும் முதற் கோவைக்கும் பொ.கா.பெ. ஆகும். முதற் கோவையை $2க - 3$ ஆல் வகுக்க மீதி 0 ஆகும். ஆகவே, $2க - 3$ என்பதே வேண்டிய பொ.கா.பெ. எனலாம்.

உ—ம்.

2\. $12க - 13க^2 - 4 + 6க^3$, $7க - 12க^2 + 9க^3 - 2$. இவற்றிற்கு பொ.கா.பெ. காண்க.

இக்கோவைகளை க இன் இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதி மேற்காட்டியவாறு செய்வோம் :—

	$6க^3 - 13க^2 + 12க - 4$	$9க^3 - 12க^2 + 7க - 2$	
	5	2	
$2க$	$30க^3 - 65க^2 + 60க - 20$	$18க^3 - 24க^2 + 14க - 4$	3
	$30க^3 - 44க^2 + 16க$	$18க^3 - 39க^2 + 36க - 12$	
	$-21க^2 + 44க - 20$	$15க^2 - 22க + 8$	$5க$
	-5	$15க^2 - 10க$	
7	$105க^2 - 220க + 100$	$-12க + 8$	-4
	$105க^2 - 154க + 56$	$-12க + 8$	
	$-22 \;\vert\; -66க + 44$		
	$3க - 2$		

∴ வேண்டிய பொ.கா.பெ. $3க - 2$ ஆகும்.

இரண்டாங்கோவையை முதலாங்கோவையால்வகுக்கின் பின்னக் குணகங்கள் பொருந்திய கோவையே மீதியாகப் பெறப்படும். ஆகையால், இரண்டாங் கோவையை 2 ஆற் பெருக்கி அதனை முதலாங் கோவையால் வகுக்க $15க^2 - 22க + 8$ என்பது மீதியாகப் பெறப்பட்டது. இனி முதலாங் கோவையை இம்மீதியால் வகுத்தாற் பின்னக் குணகங்கள் பொருந்திய கோவையே மீதியாகப் பெறப்படும். மீதி அவ்வாறு வராதபடி முதலாங் கோவையை 5 ஆற் பெருக்கி முன் பெற்ற மீதியால் வகுக்க $21க^2 + 44க - 20$ என்பது இரண்டா மீதியாகப் பெறப்படும். இது வகுக்குங் கோவையொடு ஒருபடித்தாயிருக்கின்றமையின் பின்னுமொரு முறை முதன் மீதியால் வகுக்கப்பட்டது. பின்னக் குணகங்கள் வராதபடி வகுக்கப்படும்போது, இது -5ஆற் பெருக்கப்பட்டு வகுக்கப்பட்டுள்ளது. வகுக்க வந்த ஈவு $-66க + 44$ ஆகும். இதன் காரணியாகிய -22 என்பது தந்த இருகோவைகளுக்குங் காரணியாகா

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

மையினுலே நீக்கப்பட்டது. நீக்க, $3க - 2$ என்பது பெறப்பட்டது. இதனுலே முன்பெற்ற மீதியாகிய $15க^2 - 22க + 8$ என்பதை வகுக்க மீதி 0 ஆனது.

ஆகவே, வேண்டிய பொ.கா.பெ. $3க - 2$ என்பதே.

92. மூன்று கோவைகளுடைய பொ.கா.பெ. அக்கோவைகளுள் இரண்டின் பொ.கா.பெ. இற்கும் மூன்றுங் கோவைக்கும் உள்ள பொ.கா.பெ. ஆகும்.

பயிற்சி 15 (ஆ)

பின்வருங் கோவைகளுடைய பொ.கா.பெ. ஐக் காண்க.

1. $க^3 - க,\ க^3 + 1$.
2. $க^3 + 8,\ க^2 + 6க + 8$.
3. $(அ - 2)^3,\ அ^3 - 8$.
4. $அ^2இ(அ + இ)^2,\ அ^4 - அ^2இ^2$.
5. $1 - அ^2,\ 1 - அ^3 + அ^2$.
6. $க^2 - 2க + 1,\ க^2 - 4க + 3$.
7. $க^2 + க - 2,\ க^2 - 3க + 2$.
8. $4க^2 - 4க - 3,\ 4க^2 + 4க - 15$.
9. $6க^2 - 5கந - 4ந^2,\ 12க^2 - 7கந - 12ந^2$.
10. $36க^2 - ந^2,\ 36க^2 + 24கந - 5ந^2$.
11. $16அ^2 - 8அஇ + இ^2,\ (4அஇ - இ^2)^2$.
12. $அ^2 - அ,\ (அ - 1)^2,\ அ^3 - 1$.
13. $அ + 3,\ அ^3 - 9,\ அ^3 + 27$.
14. $க^3 - க^2,\ க^3 + க^2 - 2க,\ க^3 - 4க^2 + 3க$.
15. $6க^2 - 11க + 3,\ 6க^2 - 7க - 3,\ 6க^2 - 5க - 6$.
16. $12க^2 - 25கந + 12ந^2,\ 12க^2 - 7கந - 12ந^2,\ 6க^2 - 11கந + 4ந^2$.
17. $1 + க - 6க^2,\ 1 - க - 12க^2,\ 1 - 2க - 15க^2$.
18. $3அக^2 - 12அ^2க + 9அ^4,\ 6அ^2 + 12அ^2க - 18அ^3,\ 9அ^2க^2 - 18அ^3க + 9அ^4$.
19. $க^3 - 3க^2 - 13க + 15,\ க^3 - 3க^2 - 10க + 24$.
20. $க^3 - 5க + 4,\ க^3 - 5க^2 + 4$.
21. $4க^3 - 3க + 1,\ 16க^3 - 12க^2 + 1$.
22. $க^4 + க^2ந^2 + ந^4,\ க^4 + க^3ந + கந^3 + ந^4$.

23. $16க^4 - 24க^3 + 8க^2 - 2க - 1,\ 16க^4 + 8க^3 - 8க^2 + 6க - 1$.
24. $8க^4 + 3க - 5,\ 4க^4 - 6க^3 + 3க^2 - 2க + 1$.
25. $2க^4 - 3க^2 + 1,\ 3க^4 - 2க^2 + 2க - 3$.
26. $8க^3 - 12க^2 - 26க + 15,\ 16க^4 - 88க^2 - 48க + 45$.
27. $2க^3 + 3க^2 - 1,\ 3க^3 - 2க + 1,\ 2க^3 + க^2 + 1$.
28. $1 + க - 11க^2 + 5க^3 + 4க^4,\ 1 - 4க + 9க^2 - 10க^3 - 6க^4,\ 1 - 3க - 2க^2 + 7க^3 + 3க^4$.
29. $6க^4 - 11க^3 + 7க^2 + க - 2,\ 2க^4 - 5க^3 + 3க^2 + க - 2,\ 8க^4 - 14க^3 + 13க^2 - 5க + 2$.
30. $க^4 - க^2 - 2க - 1,\ க^4 - 3க^2 + 1,\ க^4 - 3க^3 + 2க^2 + க - 1$.

93. பொ.ம.சி: இரண்டு, அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட அட்சரகணிதக் கோவைகளுடைய பொதுமடங்குகளுட் சிறியது அக்கோவைகளாலே தனித்தனி மீதியின்றி வகுக்கத்தக்க கோவைகளுட் படியாற் குறைந்த கோவையாகும். சுருக்க முறைபற்றி அது பொ.ம.சி. எனப்படும்.

ஒருறுப்புக் கோவைகளுடைய பொ.ம.சி. உளவாராய்வு மாத்திரையாலும், ஏனையுறுப்புக் கோவைகளுடைய பொ.ம.சி. பெரும்பான்மையாய்க் காரணி முறையாலுங்காணப்படும்.

உ—ம்.

1. $க^3ந,\ க^2ந^2,\ கந^3$. இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. ஐக் காண்க.

$க^3, க^2, க$ என்பனவற்றுல் வகுபடும் க இனுடைய அடுக்குக்களுட் குறைந்தது $க^3$.

$ந, ந^2, ந^3$ என்பனவற்றுல் வகுபடும் ந இனுடைய அடுக்குக்களுட் குறைந்தது $ந^3$.

$க^3ந,\ க^2ந^2, கந^3$ என்பனவற்றுல் வகுபடும் கோவைகளுட் படியாற் குறைந்தது $க^3ந^3$.

அவற்றினுடைய பொ.ம.சி. $க^3ந^3$ ஆகும்.

உ—ம்.

2. $6(க^2 - ந^2),\ 12(க^3 - ந^3),\ 8(க^3 + ந^3)$. இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$6(க^2 - ந^2) = 6(க - ந)(க + ந);$$
$$12(க^3 - ந^3) = 12(க - ந)(க^2 + கந + ந^2);$$
$$8(க^3 + ந^3) = 8(க + ந)(க^2 - கந + ந^2);$$

இங்கு 6, 12, 8 என்னும் இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. 72. $க^2 - ந^2$, $க^3 - ந^3$, $க^3 + ந^3$ என்னும் இவற்றினுடைய

$$\text{பொ.ம.சி.}\ (க - ந)(க^2 + கந + ந^2)(க + ந)(க^2 - கந + ந^2)$$
$$= (க^3 - ந^3)(க^3 + ந^3)$$
$$= க^6 - ந^6.$$

∴ வேண்டிய பொ.ம.சி. $72(க^6 - ந^6)$ ஆகும்.

94. தந்த கோவைகள் எண் குணகங்களொடு பொருந்தியிருந்தால், அக்குணகங்களுடைய பொ.ம.சி. ஐக் கண்டு அதனை அட்சரகணித பொ.ம.சி. இன் குணகமாக நிறுத்தலாம். தந்த கோவைகள் எளிதிற் காரணிகளாய்ப் பிரிக்க இடங்கொடாவாயின், அவற்றிற்கு பொ.கா.பெ. கண்டு அந்த பொ.கா.பெ. ஆல் ஒவ்வொரு கோவையையும் வகுத்து, அவ்வக் கோவையினுடைய காரணிகளைப் பெற்று, அதனுலே அக்கோவைகளுடைய பொ.ம.சி. ஐக் காணலாம்.

உ—ம்.

$24க^3 - 4க^2 - 13க - 3$, $24க^3 - க^2 - 15க - 4$. இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. ஐக் காண்க.

$8க$	$24க^3 - 4க^2 - 13க - 3$	$24க^3 - க^2 - 15க - 4$	1
	$24க^3 - 16க^2 - 8க$	$24க^3 - 4க^2 - 13க - 3$	
$+4$	$+12க^2 - 5க - 3$	$3க^2 - 2க - 1$	$க$
	$+12க^2 - 8க - 4$	$3க^2 + க$	
	$3க + 1$	$-3க - 1$	-1
		$-3க - 1$	

∴ தந்த கோவைகளுடைய பொ.கா.பெ. $3க + 1$ ஆகும்.

இதனைத் துணைக்கொண்டு தந்த கோவைகளைக் காரணிகளாய்ப் பிரிப்போம்.

$$24க^3 - 4க^2 - 13க - 3$$
$$= 8க^2(3க + 1) - 4க(3க + 1) - 3(3க + 1)$$
$$= (3க + 1)(8க^2 - 4க - 3);$$
$$24க^3 - க^2 - 15க - 4$$
$$= 8க^2(3க + 1) - 3க(3க + 1) - 4(3க + 1)$$
$$= (3க + 1)(8க^2 - 3க - 4);$$

∴ வேண்டிய பொ.ம.சி. $(3க + 1)(8க^2 - 4க - 3)(8க^2 - 3க - 4)$ என்பதே.

பயிற்சி 15 (இ)

பின்வருங் கோவைகளுடைய பொ.ம.சி. ஐக் காண்க.

1. $அஇ^2உ^3$, $அ^2இ^3உ$, $அ^3இஉ^2$.
2. $16அ^4இ^3உ^2$, $32அ^3இ^4உ$, $48அஉ^3$.
3. $4அ^2இ$, $6இ^2உ$, $8உ^2அ$.
4. $க(க - 1)$, $க^2 - 1$, $க^3 - 1$.
5. $க^2 + க$, $(க + 1)^2$, $க^3 + 1$.
6. $(2க - 1)(க + 1)$, $(க - 2)(2க - 1)$.
7. $க(3க + 2)(2க - 3)$, $க(3க - 2)(2க - 3)$.
8. $10க^2 + 23க - 5$, $10க^2 + 13க - 3$.
9. $8க^2 - 15க - 2$, $16க^2 - 6க - 1$.
10. $க^3 - 1$, $4க^2 - 3க - 1$.
11. $க^4 - க^2ந^2 + ந^4$, $க^6 + ந^6$.
12. $2க^3 - 3க + 1$, $3க^3 - 5க^2 + 2$.
13. $8க^3 - 4க + 1$, $8க^3 - 16க^2 + 3$.
14. $2க^3 - 3க^2 - 2க + 3$, $2க^3 + 5க^2 + 4க + 1$.
15. $2க^3 - க^2 - 3க + 2$, $4க^3 - 5க + 2$.
16. $12க^3 + 8க^2 - 13க + 3$, $12க^3 + 16க^2 - 5க - 3$.
17. $18க^3 - 9க^2 - 2க + 1$, $18க^3 - 21க^2 + 8க - 1$.
18. $1 + க^2 + க^4$, $1 - க^3$, $1 - க^6$.
19. $க^2 - ந^2$, $க^3 - ந^3$, $க^2 - கந + ந^2$.
20. $2க - 1$, $8க^3 - 1$, $4க^2 - 4க + 1$.
21. $6க^3 - 5க^2 - 2க + 1$, $9க^2 - 7க + 2$, $6க^2 + க - 1$.
22. $10க^2 + 21க - 10$, $6க^2 + 11க - 10$, $8க^2 + 18க - 5$.
23. $4க^2 - 9$, $4க^2 + 12க + 9$, $6க^2 - 13க + 6$.
24. $36க^4 - 97க^2 + 36$, $12க^3 + 8க^2 - 27க - 18$, $18க^3 - 27க^2 - 8க + 12$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 16

பின்னங்கள்

95. எண்கணிதத்தில் $\frac{3}{4}$ என்னும் பின்னம் 4 இல் 3 என்ருதல் 3 இன்கீழ் 4 என்ருதல் கூறப்படும். இங்கு, 4 ஐ அப்பின்னத்தின் பகுதியென்றும் 3 ஐ அதனுடைய தொகுதியென்றுங் கூறுதல் வழக்கு. அதுபோல, அட்சரகணிதத்தில் $\frac{\text{அ}}{\text{க}}$ என்னும் பின்னம் க இல் அ என்ருதல் அ இன்கீழ் க என்ருதல் கூறப்படும். க என்பதை அப்பின்னத்தின் பகுதியென்றும் அ என்பதை அதனுடைய தொகுதியென்றுங் கூறலாம்.

எண்கணிதத்திற் போல, அட்சரகணிதத்திலும் ஒரு பின்னத்தின் பெறுமானம் அதன் பகுதியையுந் தொகுதியையும் ஒரு கணியத்தாற் பெருக்கினுலும் வகுத்தாலும் மாருது.

$$\frac{\text{அ}}{\text{க}}=\frac{\text{அப}}{\text{கப}}; \qquad \frac{\text{அப}}{\text{கப}}=\frac{\text{அ}}{\text{க}}.$$

எண்கணிதப் பின்னங்கள் போல, அட்சரகணிதப் பின்னங்களுங் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் என்னும் அடிப்படைச் செய்கை நான்கிற்கும் இடந்தரும்.

96. கூட்டல் கழித்தல்கள் : ஒரு தொகை பின்னங்களுடைய அட்சரகணிதக் கூட்டுத் தொகையைக் காண்பதற்கு, முதல் அப்பின்னங்களுடைய பகுதிகளுக்கு பொ.ம.சி. காணவேண்டும். பின் அந்த பொ.ம.சி. ஐயே அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் பகுதியாக்க வேண்டும். அதன் பின் எண்கணிதத்திற் போல வேண்டிய கூட்டுத் தொகையைக் காணலாம் :—

உ—ம்.

1. $\frac{\text{அ}}{\text{2கந}}, \frac{\text{இ}}{\text{6நய}}, \frac{-\text{உ}}{\text{9யக}}$. இவற்றினுடைய கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

பகுதிகளாகிய 2கந, 6நய, 9யக என்னும் இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. 18கநய. 18கநய என்பதனை 2கந, 6நய, 9யக என்னும் இவற்ருல் வகுக்க, முறையே 9ய, 3க, 2ந என்பன ஈவுகளாகப் பெறப்படும்.

$$\therefore \frac{\text{அ}}{\text{2கந}}=\frac{\text{அ}}{\text{2கந}}\cdot\frac{\text{9ய}}{\text{9ய}}=\frac{\text{9அய}}{\text{18கநய}};$$

$$\frac{\text{இ}}{\text{6நய}}=\frac{\text{இ}}{\text{6நய}}\cdot\frac{\text{3க}}{\text{3க}}=\frac{\text{3இக}}{\text{18கநய}};$$

$$\frac{-\text{உ}}{\text{9யக}}=\frac{-\text{உ}}{\text{6க}}\cdot\frac{\text{2ந}}{\text{2ந}}=\frac{-\text{2உந}}{\text{18கநய}};$$

∴ வேண்டிய கூட்டுத் தொகை

$$\frac{\text{9அய}}{\text{18கநய}}+\frac{\text{3இக}}{\text{18கநய}}-\frac{\text{2உந}}{\text{18கநய}}$$

$$=\frac{\text{9அய}+\text{3இக}-\text{2உந}}{\text{18கநய}}.$$

இதனைப் பின்வருமாறு சுருக்கமாகச் செய்யலாம் :—

$$\frac{\text{அ}}{\text{2கந}}+\frac{\text{இ}}{\text{6நய}}-\frac{\text{உ}}{\text{9யக}}$$

$$=\frac{\text{9அய}+\text{3இக}-\text{2உந}}{\text{18கநய}}.$$

இங்கு, 2கந, 6நய, 9யக என்னும் இவற்றினுடைய பொ.ம.சி. 18கநய என்பது சுருக்கத்தின் பகுதியாகக் கொள்ளப்பட்டது. இதனை முதற் பின்னத்தின் பகுதியால் வகுக்க வந்த ஈவை அதனுடைய தொகுதியாற் பெருக்க வந்த பெருக்கமே சுருக்கத்தின் முதலுறுப்பாகும். இவ்வாறே ஏனைய உறுப்புக்கள் இரண்டுங் காணப்பட்டன.

உ—ம்.

2. $1-\frac{\text{அ}}{\text{க}+\text{அ}}$ இதனைச் சுருக்குக.

$$1-\frac{\text{அ}}{\text{க}+\text{அ}}=\frac{(\text{க}+\text{அ})-\text{அ}}{\text{க}+\text{அ}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \frac{க + அ - அ}{க + அ}$$

$$= \frac{க}{க + அ}.$$

இங்கு 1 ஐ $\frac{1}{1}$ எனக் கொண்டு 1ம் (க + அ) என்பதுமாகிய இருபகுதிகளுக்கும் பொ.ம.சி. (க + அ) எனக்கண்டு முன்னுதாரணத்திற் காட்டியவாறு செய்தமை காண்க.

உ—ம்.

3. $\frac{க}{4(க - 2)^2} - \frac{1}{4(க - 2)} - \frac{1}{2(க^2 - 4)}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{க}{4(க - 2)^2} - \frac{1}{4(க - 2)} - \frac{1}{2(க^2 - 4)}$$

$$= \frac{க(க + 2) - (க^2 - 4) - 2(க - 2)}{4(க - 2)^2(க + 2)}$$

$$\frac{க^2 + 2க - க^2 + 4 - 2க + 4}{4(க - 2)^2(க + 2)}$$

$$= \frac{8}{4(க - 2)^2(க + 2)}$$

$$= \frac{2}{(க - 2)^2(க + 2)}.$$

97. பின்னக் கூட்டலிற் குறியீட்டு மாற்றம்: ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னமானது அதனுடைய தொகுதியைப் பகுதியால் வகுக்க வரும் ஈவாகும். ஆகவே, பின்னக் கூட்டலின் குறியீட்டுமாற்றம் வகுத்தற்குறியீட்டு விதியிலே தங்கியுள்ளது. அவ்விதி 38-ஆம் பிரிவிற் பின்வருமாறு கூறப்பட்டுள்ளது:

ஒருறுப்பை ஒருறுப்பால் வகுத்தால் ஒத்த குறியீடுகள் + ஒடு பொருந்திய ஈவையும் ஒவ்வாத குறியீடுகள் − ஒடு பொருந்திய ஈவையுந் தரும்.

அவ்விதியின்படி,

$$\frac{+கந}{+ந} = +க; \qquad (1)$$

$$\frac{-கந}{-ந} = +க; \qquad (2)$$

$$\frac{+கந}{-ந} = -க; \qquad (3)$$

$$\frac{-கந}{ந} = -க. \qquad (4)$$

இவற்றிலிருந்து பின்னக் கூட்டலின் குறியீட்டுமாற்றத்தைப் பற்றிய இரு விதிகள் பெறலாம்.

விதி I. ஒரு பின்னத்தினுடைய தொகுதியின் குறியீட்டையும் பகுதியின் குறியீட்டையும் ஒருங்கு மாற்றினுல் அப்பின்னத்தினுடைய குறியீடு மாற்ற மடையாது.

விதி. II. ஒரு பின்னத்தினுடைய தொகுதியின் குறியீட்டையேனும் அதன் பகுதியின் குறியீட்டையேனும் மாற்றினுல், அப்பின்னத்தின் குறியீடும் மாற்றமடையும்.

இவ் விதிகளைப் பயன்படுத்திச் சில பின்னங்களைச் சுருக்குதல் எளிது.

உ—ம்

1.. $\frac{1}{2க + 1} - \frac{1}{1 - 2க} + \frac{2}{1 - 4க^2}$. இதனை க இன் இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதிச் சுருக்குக

$$\frac{1}{2க + 1} - \frac{1}{1 - 2க} + \frac{2}{1 - 4க^2}$$

$$= \frac{1}{2க + 1} + \frac{1}{-(1 - 2க)} - \frac{2}{-(1 - 4க^2)}$$

$$= \frac{1}{2க + 1} + \frac{1}{2க - 1} - \frac{2}{4க^2 - 1}$$

$$= \frac{(2க - 1) + (2க + 1) - 2}{4க^2 - 1}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$=\frac{2க-1+2க+1-2}{4க^2-1}$$

$$=\frac{4க-2}{4க^2-1}$$

$$=\frac{2(2க-1)}{(2க-1)(2க+1)}$$

$$=\frac{2}{2க+1}.$$

இங்கு, முதற் பின்னத்தின் பகுதி $2க+1$ என்பது க இனது இறங்கடுக்கு வரிசையில் இருக்கின்றது. ஏனைய பின்னங்களுடைய பகுதிகளையும் + குறியீடு முன்னிட்ட க இன் உறுப்புத் தொடங்கி க இனது இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதுவதற்கு அப்பகுதிகளுடைய குறியீடுகளை மாற்றிப் பின்னங்களுடைய குறியீடுகளையு மாற்றியவாறு காண்க.

பயிற்சி 16 (அ)

பின்வரும் பின்னங்களுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

1. $\frac{அ}{2}-\frac{இ}{3}+\frac{உ}{4}$.
2. $\frac{2}{அ}+\frac{3}{இ}-\frac{4}{2}$.
3. $\frac{1}{2அஇ}-\frac{1}{3இஉ}-\frac{1}{4உஅ}$.
4. $\frac{அ}{3இஉ}-\frac{இ}{4உஅ}+\frac{உ}{6அஇ}$.
5. $\frac{க}{2இஉ}-\frac{ந}{4உஅ}+\frac{ய}{8அஇ}$.
6. $\frac{அ}{3இஉக}-\frac{இ}{4உஅந}-\frac{உ}{8அஇய}$.
7. $1-\frac{இ}{அ}$.
8. $\frac{அ}{இ}+1$.

9. $க+\frac{க}{ந}$.
10. $3-\frac{க}{ந}$.
11. $\frac{க^2}{ந^2}+\frac{2க}{ந}+1$.
12. $\frac{க^2}{ந^2}-\frac{2க}{ந}+1$.
13. $1-\frac{அ}{க+அ}$.
14. $\frac{அ}{க-அ}+1$.
15. $\frac{1}{க-அ}+\frac{1}{க+அ}$.
16. $\frac{1}{அ-க}-\frac{1}{அ+க}$.
17. $\frac{க^2}{க-1}-க$.
18. $\frac{க}{(க-1)^2}-\frac{1}{க-1}$.
19. $\frac{1}{க+2}-\frac{2}{(க+2)^2}$.
20. $\frac{1}{(க-ந)^2}-\frac{1}{(க+ந)^2}$.
21. $\frac{க}{க^2-ந^2}-\frac{2}{க-ந}+\frac{க}{(க-ந)^2}$.
22. $\frac{1}{க(க+ந)}+\frac{1}{க(க-ந)}-\frac{2}{க^2-ந^2}$.
23. $\frac{1}{க-1}-\frac{க}{க^2-1}-\frac{க}{க^3+1}$.
24. $\frac{1}{2(1-3க)}-\frac{1}{3(1+3க)}-\frac{3க}{1-9க^2}$.
25. $\frac{3}{4(1+3க)}-\frac{2}{3(1-3க)}-\frac{1}{12(1-9க^2)}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

26. $\frac{1}{4(1+2\text{க})}-\frac{1}{4(2\text{க}-1)}-\frac{1}{2(1-4\text{க}^2)}$.

27. $\frac{1}{3(2+3\text{க})}-\frac{1}{3(3\text{க}-2)}-\frac{3\text{க}^2}{4-9\text{க}^2}$.

28. $\frac{1}{4(2\text{க}-5)}-\frac{1}{4(5+2\text{க})}-\frac{10}{(5-2\text{க})^2}$.

29. $\frac{3}{\text{க}(\text{க}-\text{ந})}-\frac{2}{\text{கந}}+\frac{2}{\text{ந}(\text{ந}-\text{க})}$.

30. $\frac{\text{க}}{\text{க}-\text{ந}}+\frac{\text{கந}}{(\text{ந}-\text{க})^2}-\frac{\text{க}^2\text{ந}}{(\text{ந}-\text{க})^3}$.

31. $\frac{1}{\text{க}-\text{அ}}-\frac{1}{\text{க}+\text{அ}}-\frac{2\text{அ}}{\text{க}^2+\text{அ}^2}$.

32. $\frac{1}{2(1+\text{க})}-\frac{1}{2(\text{க}-1)}+\frac{1}{1+\text{க}^2}$.

33. $\frac{1}{\text{ந}+1}+\frac{\text{ந}}{1-\text{ந}^2}+\frac{1}{\text{ந}^3+1}$.

34. $\frac{1}{\text{ந}(\text{ந}+1)}-\frac{1}{\text{ந}(1-\text{ந})}-\frac{2}{\text{ந}^2+1}$.

35. $\frac{1}{\text{க}+1}+\frac{1}{1-\text{க}}+\frac{1}{2-\text{க}}+\frac{1}{\text{க}+2}$.

36. $\frac{1}{3\text{க}+1}-\frac{1}{1-3\text{க}}+\frac{1}{2-3\text{க}}-\frac{1}{3\text{க}+2}$.

37. $\frac{1-\text{அ}}{\text{அ}-2}+\frac{1+\text{அ}}{\text{அ}+2}+\frac{2+\text{அ}}{\text{அ}+3}+\frac{2-\text{அ}}{\text{அ}-3}$.

38. $\frac{4}{3\text{க}+1}-\frac{1}{3\text{க}+4}+\frac{4}{1-3\text{க}}-\frac{1}{4-3\text{க}}$.

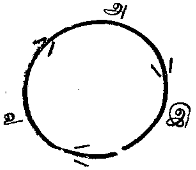
39. $\frac{1}{1+\text{க}}-\frac{1}{\text{க}-1}+\frac{2}{1+\text{க}^2}+\frac{4}{\text{க}^4-1}$.

40. $\frac{1}{\text{அ}+2}-\frac{1}{2-\text{அ}}-\frac{\text{அ}}{\text{அ}^2-4}+\frac{2}{4-\text{அ}^4}$.

41. $\frac{1}{1+\text{க}+\text{க}^2}-\frac{1}{1-\text{க}^3}-\frac{1}{(\text{க}-1)^2}-\frac{1}{(\text{க}-1)^3}$.

42. $\frac{1+4\text{க}^2}{8\text{க}^3+1}-\frac{1}{2\text{க}+1}-\frac{2\text{க}}{1-4\text{க}^2}$.

98. ஒரு பின்னத்திலுள்ள மாறிகளை வட்ட வரிசையில் எழுதல் முடியுமாயின், அவ்வாறு எழுதி அப்பின்னத்தைச் சுருக்குதல் எளிது.



ஒரு வட்டம் வரைந்து அதனைச் சுற்றி அட்சரங்களை எழுதி அவற்றை அவ்வொழுங்கின் படி எடுத்தலே வட்டவரிசை யாகும்.

இப்படத்தில், அ − இ, இ − உ, உ − அ என்பன வட்ட வரிசையிலுள்ளன.

வட்ட வரிசையில் எழுதுதல் பற்றியேனும் பிறகாரணம் பற்றியேனும் ஒரு பெருக்கத்தினுடைய காரணிகளுள் ஒன்றின் குறியீட்டை மாற்றினல் அப்பெருக்கத்தின் குறியீட்டையும் மாற்ற வேண்டும். அன்றி, இரண்டின் குறியீட்டை மாற்றினல் அப்பெருக்கத்தின் குறியீட்டை மாற்றல் ஆகாது :

$$(\text{அ}-\text{இ})(\text{உ}-\text{இ})=(\text{அ}-\text{இ})\{-(\text{இ}-\text{உ})\}$$
$$=-(\text{அ}-\text{இ})(\text{இ}-\text{உ});$$
$$(\text{இ}-\text{அ})\ (\text{உ}-\text{இ})=\{-(\text{அ}-\text{இ})\}\{-(\text{இ}-\text{உ})\}$$
$$=(\text{அ}-\text{இ})(\text{இ}-\text{உ});$$

மேலுள்ள சமன்பாடுகளிற் காரணிகளுள் ஒன்றின் குறியீட்டை மாற்றப் பெருக்கத்தின் குறியீடு மாறினமையும் இரண்டின் குறியீட்டை மாற்றப் பெருக்கத்தின் குறியீடு மாருமையுங் காண்க.

உ—ம்.

1. $\frac{\text{அ}}{(\text{அ}-\text{இ})(\text{அ}-\text{உ})}+\frac{\text{இ}}{(\text{இ}-\text{உ})\ (\text{இ}-\text{அ})}$
$+\frac{\text{உ}}{(\text{உ}-\text{அ})(\text{உ}-\text{இ})}$. இதனைச் சுருக்குக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\frac{அ}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{இ}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{உ}{(உ-அ)(உ-இ)}.$$

$$=\frac{அ}{-(அ-இ)(உ-அ)}+\frac{இ}{-(இ-உ)(அ-இ)}$$

$$+\frac{உ}{-(உ-அ)(இ-உ)}$$ மேலேதந்த விதிபற்றிப் பெறப்பட்டது.

$$=-\frac{அ}{(அ-இ)(உ-அ)}-\frac{இ}{(இ-உ)(அ-இ)}$$

$$-\frac{உ}{(உ-அ)(இ-உ)}$$ பிரிவு 97. விதி II

$$=-\frac{அ(இ-உ)+இ(உ-அ)+உ(அ-இ)}{(அ-இ)(இ-உ)(உ-அ)}$$

$$=-\frac{அஇ-உஅ+இஉ-அஇ+உஅ-இஉ}{(அ-இ)(இ-உ)(உ-அ)}$$

$$=-\frac{0}{(அ-இ)(இ-உ)(உ-அ)}$$

$$=\quad 0.$$

(உ—ம்.)

2. $\frac{1}{(க-1)(க-2)}+\frac{1}{(2-க)(3-க)}-\frac{1}{(1-க)(க-3)}.$ இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{1}{(க-1)(க-2)}+\frac{1}{(2-க)(3-க)}-\frac{1}{(1-க)(க-3)}$$

$$=\frac{1}{(க-1)(க-2)}+\frac{1}{(க-2)(க-3)}+\frac{1}{(க-1)(க-3)}$$

க இனது இறங்கடுக்கு வரிசை.

$$=\frac{(க-3)+(க-1)+(க-2)}{(க-1)(க-2)(க-3)}$$

$$=\frac{க-3+க-1+க-2}{(க-1)(க-2)(க+3)}$$

$$=\frac{3க-6}{(க-1)(க-2)(க-3)}$$

$$=\frac{3(க-2)}{(க-1)(க-2)(க-3)}$$

$$=\frac{3}{(க-1)(க-3)}.$$

பயிற்சி 16 (ஆ)

பின்வரும் பின்னங்களுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க:—

1. $\frac{1}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{1}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{1}{(உ-அ)(உ-இ)}.$

2. $\frac{அ^2}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{இ^2}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{உ^2}{(உ-அ)(உ-இ)}.$

3. $\frac{ந}{(க-ந)(க-ய)}+\frac{ய}{(ந-ய)(ந-க)}+\frac{க}{(ய-க)(ய-ந)}.$

4. $\frac{ந-ய}{(க-ந)(க-ய)}+\frac{ய-க}{(ந-ய)(ந-க)}+\frac{க-ந}{(ய-க)(ய-ந)}.$

5. $\frac{க+1}{(க-ந)(க-ய)}+\frac{ந+1}{(ந-ய)(ந-க)}+\frac{ய+1}{(ய-க)(ய-ந)}.$

6. $\frac{க+அ}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{க+இ}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{க+உ}{(உ-அ)(உ-இ)}.$

7. $\frac{க+ந}{(ய-க)(ய-ந)}+\frac{ந+ய}{(க-ந)(க-ய)}+\frac{ய+க}{(ந-ய)(ந-க)}.$

8. $\frac{அக}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{இக}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{உக}{(உ-அ)(உ-இ)}$

9. $\frac{அஇ}{(இ-உ)(உ-அ)}+\frac{இஉ}{(உ-அ)(அ-இ)}+\frac{உஅ}{(அ-இ)(இ-உ)}.$

10. $\frac{அ^2(இ+உ)}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{இ^2(உ+அ)}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{உ^2(அ+இ)}{(உ-அ)(உ-இ)}.$

11. $\frac{க}{(க-3)(க-4)}+\frac{1}{(4-க)(5-க)}+\frac{க}{(க-5)(3-க)}.$

12. $\frac{க-2}{(க-3)(க-4)}+\frac{2(க-3)}{(க-2)(4-க)}-\frac{4-க}{(2-க)(3-க)}.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. $\frac{க+3}{(க-2)(க-4)} - \frac{2(4+க)}{(3-க)(2-க)} - \frac{2+க}{(4-க)(க-3)}$.

14. $\frac{1}{(2க-1)(2க-3)} - \frac{2}{(3-2க)(5-2க)}$

$\frac{1}{(2க-5)(1-2க)}$.

15. $\frac{1}{6க^2-க-1} + \frac{1}{1-2க-15க^2} - \frac{1}{1-7க+10க^2}$.

16 $\frac{13க}{6க^2-5க-6} + \frac{13க}{2-க-6க^2} - \frac{6}{3-8க+4க^2}$.

99. **பெருக்கலும் வகுத்தலும்** :—அட்சரகணிதப் பின்னங்களுடைய பெருக்கலும் வகுத்தலும் எண்கணித முறையைப் போன்றன.

பின்னங்களைப் பெருக்கும்பொழுது அவற்றினுடைய தொகுதிகளையும் பகுதிகளையுங் காரணிகளாகப் பிரித்தெழுதி அத்தொகுதிகளுக்கும் பகுதிகளுக்கும் உள்ள பொதுக் காரணிகள் எல்லாவற்றையும் வகுத்தலால் ஒழித்துவிட்டு மீந்திருக்குந் தொகுதிகளுடைய பெருக்கத்தைப் புதுத் தொகுதியாகவும் பகுதிகளுடைய பெருக்கத்தைப் புதுப் பகுதியாகவுங் கொள்ள வேண்டும்.

ஒரு பின்னத்தால் வகுத்தல் எண்கணிதத்திற்போல அதன் தலைகீழ்ப் பின்னத்தாற் பெருக்குதலுக்குச் சமன்.

(உ—ம்.)

1. $\frac{12அ^2இஉ}{24அஇ^2} \times \frac{36இ^2}{9இஉ}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{12அ^2இஉ}{24அஇ^2}\times\frac{36இ^2}{9இஉ} = \frac{12\times36\times அ^2இ^{1+2}உ}{24\times9\times அஇ^{2+1}உ}$$
$$= \frac{12\times2\times9\times2\times அ^2இ^3உ}{12\times2\times9\times அஇ^3உ}$$
$$= 2அ.$$

இங்கு, பகுதியையுந் தொகுதியையும் $12\times2\times9\times அஇ^3உ$ என்பதால் வகுக்க 2அ பெறப்படுதல் காண்க.

(உ—ம்.)

2. $\frac{க^2-ந^2}{க^3+ந^3}\times\frac{க^2-கந+ந^2}{க^3-ந^3}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{க^2-ந^2}{க^3+ந^3}\times\frac{க^2-கந+ந^2}{க^3-ந^3}$$
$$= \frac{(க-ந)(க+ந)(க^2-கந+ந^2)}{(க+ந)(க^2-கந+ந^2)(க-ந)(க^2+கந+ந^2)}$$
$$= \frac{1}{க^2+கந+ந^2}.$$

இங்கு, பகுதியையுந் தொகுதியையும் $(க-ந)(க+ந)(க^2-கந+ந^2)$ என்பதால் வகுக்க,

$\frac{1}{க^2+கந+ந^2}$ என்பது பெறப்பட்டமை காண்க.

100. பெருக்கற் குறியீடுகளும் வகுத்தற் குறியீடுகளுங் கலந்து இருந்தால் எண்கணிதத்திற் போல அடைப்புக் குறியை முன்னும் வகுத்தற் குறியீட்டைப் பின்னும், பெருக்கற் குறியீட்டை அதன் பின்னுமாக நீக்கல் வேண்டும்.

(உ—ம்.)

1. $\frac{3அ^2இ}{5இ^2உ} \div \frac{9அஇஉ}{15உ^2அ}\times\frac{இ^2}{அ^2}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{3அ^2இ}{5இ^2உ} \div \frac{9அஇஉ}{15உ^2அ}\times\frac{இ^2}{அ^2}$$
$$= \frac{3அ^2இ}{5இ^2உ}\times\frac{15உ^2அ}{9அஇஉ}\times\frac{இ^2}{அ^2}$$
$$= \frac{3\times15\times அ^{2+1}இ^{1+2}உ^2}{5\times9\times அ^{1+2}இ^{2+1}உ^{1+1}}$$
$$= \frac{அ^3இ^3உ^2}{அ^3இ^3உ^2}$$
$$= 1.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(உ—ம்.)

2. $\frac{2க^2-3க+1}{2க^2-3க-2} \div \left(\frac{2க^2+க-1}{2க^2+5க+2} \times \frac{க^2+க-2}{க^2-க-2}\right)$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{2க^2-3க+1}{2க^2-3க-2} \div \left(\frac{2க^2+க-1}{2க^2+5க+2} \times \frac{க^2+க-2}{க^2-க-2}\right)$$

$$=\frac{(2க-1)(க-1)}{(2க+1)(க-2)} \div \left\{\frac{(2க-1)(க+1)}{(2க+1)(க+2)} \times \frac{(க-1)(க+2)}{(க+1)(க-2)}\right\}$$

$$=\frac{(2க-1)(க-1)}{(2க+1)(க-2)} \div \frac{(2க-1)(க-1)}{(2க+1)(க-2)}$$ அடைப்பு நீக்கப்பட்டது.

$$=\frac{(2க-1)(க-1)}{(2க+1)(க-2)} \times \frac{(2க+1)(க-2)}{(2க-1)(க-1)}$$

$$=1$$

பயிற்சி 16 (இ)

பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக :—

1. $\frac{அ^2இ}{கந} \times \frac{க^2ந^2}{அஇ}$.

2. $\frac{3அஇ^2}{க^3ந^3} \times \frac{க^2ந^2}{6அ^2இ^2}$.

3. $\frac{12அஇ}{5கந} \div \frac{4அஇ}{15க^2ந}$.

4. $\frac{3அ^2இ^3}{16க^2ந^2} \div \frac{9அ^3இ^2}{32க^2ந}$.

5. $\frac{8அ^2}{15க^2} \div \frac{2க^3}{5இ^3} \times \frac{க^5}{4அ^2இ^3}$.

6. $\frac{12அ^2இ^3}{5க^2ந^3} \div \frac{4அ^3இ}{15க^3ந} \times \frac{அந}{9அஇ^2க}$.

7. $\frac{16த^2ப^3}{5ம^2வ^3} \div \frac{4மப}{3தவ} \times \frac{5ம^3வ^2}{12த^3ப^2}$.

8. $\frac{12த^3ப^2}{5மவ^5} \div \frac{3த^4ம}{ப^3வ^2} \times \frac{5தவ^3}{4ப^5ம}$.

9. $\frac{9அ^2இ}{20கந^2} \div \left(\frac{3இ^2உ}{4ந^2ய^2} \times \frac{3ய^2க}{5உ^2அ}\right)$.

10. $\frac{6அ^3இ^4உ^5}{35க^3ந^4ய^5} \div \left(\frac{2இ^4உ^3}{5ந^2ய^5} \times \frac{3அ^3உ^2}{7ந^2}\right)$.

11. $\frac{அ^2}{4க^2-9ந^2} \times \frac{6க^2-5கந-6ந^2}{அ^2இ^2} \times \frac{இ^2}{3க+2ந}$.

12. $\frac{அ^2-4}{க^3-1} \div \frac{அ-2}{க-1} \times \frac{க^2+க+1}{அ+2}$.

13. $\frac{6க^2-க-1}{6க^2+க-1} \div \frac{3க^2-2க-1}{2க^2-3க-2} \times \frac{க-1}{6க^2-5க+1}$.

14. $\frac{4க^2+4க-3}{4க^2-4க-3} \div \frac{6க^2+5க-6}{6க^2-5க-6} \times \frac{2க+1}{6க^2+க-2}$.

15. $\frac{1-5க+6க^2}{1+5க+6க^2} \div \left(\frac{1-2க-3க^2}{1+2க-3க^2} \times \frac{1-3க+2க^2}{1+க}\right)$.

16. $\frac{1+க-6க^2}{1-க-6க^2} \times \frac{1-6க+9க^2}{1+6க+9க^2} \div \frac{1-5க+6க^2}{1+3க}$.

17. $\frac{4க^2-4க+1}{9க^2+6க+1} \div \left(\frac{1-4க^2}{1-9க^2} \times \frac{1-5க+6க^2}{1+5க+6க^2}\right)$.

18. $\frac{க^2-க}{க^2-க-2} \times \frac{க^2+க-6}{க^2+க-2} \times \frac{க^2+3க+2}{க^2+2க-3}$.

19. $\frac{அ^6-இ^6}{அஇ(அ+இ)} \times \frac{அ}{அ^4+அ^2இ^2+இ^4} \div \frac{அ-இ}{இ}$.

20. $\frac{அ^3-27}{அ^2+6அ+9} \times \frac{1}{அ^2-9} \times \frac{அ+3}{அ^2+3அ+9}$.

21. $\frac{8அ^3+1}{அ(அ-2)^2} \times \frac{அ^3-4அ}{4அ^2-1} \times \frac{2அ^2-5அ+2}{4அ^2+2அ+1}$.

22. $\frac{க^4-1}{க^6+1} \div \frac{க^3-1}{க^4-க^2+1} \times \frac{க^2+க+1}{(க+1)^2}$.

23. $\frac{க^6+ந^6}{க^6-ந^6} \div \frac{க^4-க^2ந^2+ந^4}{க^4+க^2ந^2+ந^4} \times \frac{க^2-ந^2}{க^2+ந^2}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

24. $\frac{1-க-ந+கந}{4+2க+2ந+கந}\div\frac{1-க+2ந-2கந}{2+4க+ந+2கந}$
$\times\frac{2+க+4ந+2கந}{1+2க-ந-2கந}$.

25. $\frac{2க^2-3கந+ந^2}{1-க-ந+கந}\times\frac{1+2க-ந-2கந}{2க-ந+2கந-4க^2}$
$\times\frac{1-2க}{க-ந-2கந+2க^2}$.

26. $\frac{(க+ந)^2-அ^2}{ந^2-(அ-க)^2}\div\frac{(ந-அ)^2-க^2}{(ந-க)^2-அ^2}\times\frac{க+ந-அ}{க+ந+அ}$.

27. $\frac{(க+ந)^2-அ^2}{க^2-(ந+அ)^2}\times\frac{(க-அ)^2-ந^2}{(ந-அ)^2-க^2}\times\frac{ந-\overline{அ+க}}{க-\overline{அ-க}}$.

28. $\frac{அ^2-(இ+உ)^2}{(அ+இ)^2-உ^2}\times\frac{அ^2-(இ-உ)^2}{அஇ-இ^2-இஉ}\div\frac{அ^2-அஇ+அஉ}{இ}$.

101. இப்பிரிவிற் சிக்கற் பின்னங்களையுந் தொடர் பின்னங்களையுஞ் சிலகலப்பினப் பின்னங்களையுஞ் சுருக்குமுறைகளை ஆராய்வோம்.

1. ஒரு பின்னத்தினுடைய தொகுதியிலாயினும், பகுதியிலாயினும், அன்றி அவை இரண்டிலுமாயினும், ஒரு பின்னக்கோவை இருப்பின், அது சிக்கற் பின்னம் எனப்படும்.

$\frac{\frac{அ}{இ}}{க},\ \frac{க}{\frac{அ}{இ}},\ \frac{\frac{அ}{இ}}{\frac{க}{ந}},\ \frac{1}{\frac{அ}{இ}},\ \frac{அ}{\frac{1}{இ}},\ \frac{\frac{1}{க-ந}}{\frac{1}{க+ந}}$ என்பன சிக்கற் பின்னங்களாகும்.

இவற்றைப் பின்வருமாறும் எழுதலாம் :

$\frac{அ}{இ}\Big/க,\ க\Big/\frac{அ}{இ},\ \frac{அ}{இ}\Big/\frac{க}{ந},\ 1\Big/\frac{அ}{இ},\ அ\Big/\frac{1}{இ},\ \frac{1}{க-ந}\Big/\frac{1}{க+ந}$

ஓர் அட்சரகணிதப் பின்னமானது அதனுடைய தொகுதியை அதன் பகுதியால் வகுக்க வரும் ஈவாகும்.

(i) $\therefore\ \frac{\frac{அ}{இ}}{க}=\frac{அ}{இ}\div க$
$=\frac{அ}{இ}\times\frac{1}{க}$
$=\frac{அ}{இக}$.

(ii) $\frac{க}{\frac{அ}{இ}}=க\div\frac{அ}{இ}$
$=க\times\frac{இ}{அ}$
$=\frac{இக}{அ}$.

(iii) $\frac{\frac{அ}{இ}}{\frac{க}{ந}}=\frac{அ}{இ}\div\frac{க}{ந}$
$=\frac{அ}{இ}\times\frac{ந}{க}$
$=\frac{அந}{இக}$.

இவைபோல, $\frac{1}{\frac{அ}{இ}}=\frac{இ}{அ}$; $\frac{அ}{\frac{1}{இ}}=அஇ$; $\frac{\frac{1}{க-ந}}{\frac{1}{க+ந}}=\frac{க+ந}{க-ந}$ எனப் பெறலாம்.

(உ—ம்.)

I.

1. $\frac{1-\frac{3}{10அ}-\frac{1}{10அ^2}}{1-\frac{1}{6அ}-\frac{1}{6அ^2}}$ இதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இக்கோவையினுடைய தொகுதியையும் பகுதியையும் 30அ^2 ஆற் பெருக்கினுற் பெறுமானம் மாருது.

$$\therefore \text{ தந்த கோவை} = \frac{30\text{அ}^2 - 9\text{அ} - 3}{30\text{அ}^2 - 5\text{அ} - 5}$$

$$= \frac{3(10\text{அ}^2 - 3\text{அ} - 1)}{5(6\text{அ}^2 - \text{அ} - 1)}$$

$$= \frac{3(5\text{அ}+1)(2\text{அ}-1)}{5(3\text{அ}+1)(2\text{அ}-1)}$$

$$= \frac{3(5\text{அ}+1)}{5(3\text{அ}+1)}.$$

(உ—ம்.)

2. $\dfrac{\dfrac{\text{அ}^2-1}{\text{அ}^2+1} - 1}{\dfrac{\text{அ}^2-1}{\text{அ}^2+1} + 1}$. இதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$\text{தந்த கோவை} = \frac{(\text{அ}^2-1)-(\text{அ}^2+1)}{\text{அ}^2+1} \div \frac{(\text{அ}^2-1)+(\text{அ}^2+1)}{\text{அ}^2+1}$$

$$= \frac{-2}{\text{அ}^2+1} \div \frac{2\text{அ}^2}{\text{அ}^2+1}$$

$$= -\frac{2}{\text{அ}^2+1} \times \frac{\text{அ}^2+1}{2\text{அ}^2}$$

$$= -\frac{1}{\text{அ}^2}.$$

II. $\dfrac{1}{\text{அ} + \dfrac{1}{\text{இ} + \dfrac{1}{\text{உ} + \dots}}}$ என்னும் வடிவத்திலுள்ள பின்னந் தொடர் பின்னமெனப்படும்.

இவ்வினப் பின்னங்களைச் சுருக்குதற்குக் கீழ்ப்பின்னந் தொடங்கிப் படிப்படியாக மேற்பின்னங்களுக்குச் செல்ல வேண்டும்.

உ—ம்.

$1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\text{அ}}}}$ இதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$$1 - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\text{அ}}}} = 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\dfrac{\text{அ}-1}{\text{அ}}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{\text{அ}}{\text{அ}-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\dfrac{(\text{அ}-1)-\text{அ}}{\text{அ}-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\dfrac{-1}{\text{அ}-1}}$$

$$= 1 + \text{அ} - 1$$

$$= \text{அ}.$$

II. சில பின்னங்களைச் சுருக்குதற்கு எல்லாப் பகுதிகளுக்கும் ஒருங்கு பொ. ம. சி. ஐக் கண்டு செல்லுதலினும் பின்னங்களை இரண்டு இரண்டாகச் சுருக்குதல் இலேசாகப் பயன் அளிக்கும்.

உ—ம்.

$\dfrac{1}{1+\text{க}^4} + \dfrac{1}{2(1+\text{க}^2)} + \dfrac{1}{4(1+\text{க})} + \dfrac{1}{4(1-\text{க})}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\text{பின்னம்} = \frac{1}{1+\text{க}^4} + \frac{1}{2(1+\text{க}^2)} + \frac{1-\text{க}+1+\text{க}}{4(1-\text{க}^2)}$$

$$= \frac{1}{1+\text{க}^4} + \frac{1}{2(1+\text{க}^2)} + \frac{1}{2(1-\text{க}^2)}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \frac{1}{1+க^4} + \frac{1-க^2+1+க^2}{2(1-க^4)}$$

$$= \frac{1}{1+க^4} + \frac{1}{1-க^4}$$

$$= \frac{1-க^4+1+க^4}{1-க^8}$$

$$= \frac{2}{1-க^8}.$$

பயிற்சி 16 (ஈ)

பின்வரும் பின்னங்களைச் சுருக்குக.

1. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{அ}}.$

2. $\dfrac{2-அ}{1-\dfrac{அ}{2}}.$

3. $\dfrac{1-\dfrac{1}{க}}{1+\dfrac{1}{க}}.$

4. $\dfrac{\dfrac{அ}{ந}-\dfrac{இ}{க}}{\dfrac{அ}{ந}+\dfrac{இ}{க}}.$

5. $\dfrac{\dfrac{1}{க^2}-\dfrac{1}{12க}-\dfrac{1}{12}}{\dfrac{1}{க^2}-\dfrac{8}{15க}+\dfrac{1}{15}}$

6. $\dfrac{\dfrac{2}{க}+5-12க}{\dfrac{2}{க}+3-9க}$

7. $அ+\dfrac{அ}{1+\dfrac{1}{அ}}.$

8. $அ-\dfrac{அ}{1-\dfrac{1}{அ}}.$

9. $அ-\dfrac{அ^2}{அ-\dfrac{1}{அ}}.$

10. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{அ-1}}+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{அ+1}}.$

11. $\dfrac{1}{2க-1}-\dfrac{1}{2க+1}-\dfrac{2}{4க^2+1}.$

12. $\dfrac{1}{3க+2}-\dfrac{3க}{(3க+2)^2}-\dfrac{2}{(3க-2)^2}.$

13. $\dfrac{1}{4(க+2)}-\dfrac{1}{4(க-2)}+\dfrac{1}{க^2+4}+\dfrac{8}{க^4+16}.$

14. $\dfrac{1}{க-3}-\dfrac{1}{க-4}-\dfrac{க}{(க-3)^2}+\dfrac{க}{(க-4)^2}.$

15. $\dfrac{\dfrac{அ-இக}{அ+இக}+1}{\dfrac{அ-இக}{அ+இக}-1}$

16. $\dfrac{1-\dfrac{க^2+ந^2-ய^2}{2கந}}{1+\dfrac{ந^2+ய^2-க^2}{2நய}}.$

17. $\dfrac{1}{2அ-1}+\dfrac{1}{3அ+1}-\dfrac{1}{2அ+1}-\dfrac{1}{3அ-1}.$

18. $\dfrac{1}{5க+2}-\dfrac{1}{5க-2}-\dfrac{2}{(5க+2)^2}-\dfrac{2}{(5க-2)^2}.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

19. $\left(1+\frac{1}{க-2}\right)\left(1+\frac{1}{க-3}\right)\left(1-\frac{2}{க-1}\right).$

20. $\frac{2க-1}{க-1}+\frac{2க-5}{க-3}-\frac{2(2க-3)}{க-2}.$

21. $\left(அ^2+4இ^2+\frac{7இ^4}{அ^2-4இ^2}\right)\div\left(அ+2இ+\frac{இ^2}{அ-2இ}\right).$

22. $\frac{\left(\frac{க+ந}{க-ந}\right)^2+1}{\left(\frac{க+ந}{க-ந}\right)^2-1}\times\frac{2கந(க-ந)}{க^4-ந^4}.$

23. $\frac{1}{1-க}+\frac{3}{க-2}+\frac{3}{3-க}+\frac{1}{க-4}.$

24. $\left(\frac{க}{ந}-2+\frac{ந}{க}\right)\left(\frac{க}{ந}+2+\frac{ந}{க}\right)\div\left(\frac{க^2}{ந^2}-2+\frac{ந^2}{க^2}\right).$

25. $\frac{1}{அ(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{1}{இ(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{1}{உ(உ-அ)(உ-இ)}.$

26. $\frac{அ+இஉ}{(அ-இ)(அ-உ)}+\frac{இ+உஅ}{(இ-உ)(இ-அ)}+\frac{உ+அஇ}{(உ-அ)(உ-இ)}.$

அத்தியாயம் 17

கடுமையான சமன்பாடுகளும் உத்திக் கணக்குக்களும்

102. பின்னச் சமன்பாடுகள்: ஒரு பின்னச் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வைக் காண்பதற்கு அச்சமன்பாட்டிலுள்ள பின்னங்களுடைய பகுதிகளுக்கு பொ. ம. சி. கண்டு அதனால் அச்சமன்பாட்டிலுள்ள உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றையும் பெருக்கப் பெரும்பாலும் அச்சமன் பாட்டொடு ஒருதீர்வுடையதும் பின்னம் நீங்கியதுமான வேறொரு சமன்பாட்டைப் பெறலாம். இதனுடைய தீர்வே தந்த சமன்பாட்டிற்குந் தீர்வாகும்.

உ—ம்.

1. $\frac{க-2}{3}+\frac{க+1}{6}-1=\frac{2க-3}{4}-\frac{2க}{8}.$ இதனைத் தீர்க்க.

இருபக்கங்களையும் பகுதிகளுடைய பொ. ம. சி. ஆகிய 24 ஆற் பெருக்குக.

$\therefore 8(க-2)+4(க+1)-24 = 6(2க-3)-6க.$

$\therefore 8க-16+4க+4-24 = 12க-18-6க.$

$\therefore 8க+4க-12க+6க = 16-4+24-18.$

$\therefore 6க = 18.$

$\therefore க = 3.$

உ—ம்.

2. $\frac{2க+3}{2க-1}=\frac{2க+1}{2க+5}.$ இதனுடைய தீர்வைக் காண்க.

இருபக்கங்களையும் பகுதிகளுடைய பொ. ம. சி. ஆகிய $(2க-1)(2க+5)$ என்பதாற் பெருக்குக.

$\therefore (2க+3)(2க+5) = (2க-1)(2க+1).$

$\therefore 4க^2+16க+15 = 4க^2-1.$

$\therefore 16க = -15-1$

$= -16.$

$\therefore க = -1.$

இத்தீர்வில், முதற் பின்னத்தினுடைய தொகுதியை இரண்டாம் பின்னத்தின் பகுதியாற் பெருக்க வருவது முதற் பின்னத்தின் பகுதியை இரண்டாம் பின்னத்தினுடைய தொகுதியாற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திற்குச் சமன் என்பது முதற்படியாற் பெற்றோம். இம்முறை **குறுக்குப் பெருக்கன்முறை** எனப்படும்.

103. ஒரு பின்னச் சமன்பாட்டிலுள்ள பின்னங்களுடைய தொகுதிகளானவை தந்தம் பகுதிகளோடு ஒரு படித்தானவையாய் இருப்பின், அல்லது மேற்பட்ட படித்தானவையாயிருப்பின், அவற்றை அவ்வப்பகுதிகளால் வகுத்து மேற் செல்லுதலே இலேசாகும்.

உ—ம்.

$\frac{3க+1}{3க-2}=\frac{2க+3}{2க-3}$. இதனைத் தீர்க்க.

$\therefore \frac{(3க-2)+3}{3க-2}=\frac{(2க-3)+6}{2க-3}$;

$\therefore 1+\frac{3}{3க-2}=1+\frac{6}{2க-3}$;

$\therefore \frac{3}{3க-2}=\frac{6}{2க-3}$;

$\therefore$ குறுக்குப் பெருக்கலாற் பெறுவது $3(2க-3)=6(3க-2)$;

$\therefore 6க-9=18க-12$;

$6க-18க=9-12$;

$-12க=-3$;

$\therefore க=\frac{1}{4}$.

104. யாதுமொரு சமன்பாட்டில் இரண்டு பின்னங்களேனும், இரண்டின் மேற்பட்ட பின்னங்களேனும் ஒரு பகுதியுடையனவாயின் அவற்றை ஒருங்கு தொகுத்துச் சுருக்கிச் செல்லுதல் தீர்வு காண்டற்கு எளிது.

உ—ம்.

$\frac{5-3க}{2க-1}-\frac{9-க}{2க-5}=\frac{4க-3}{1-2க}+1$. இதனுடைய தீர்வைக் காண்க.

இதனை க இனது இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதுவோம்.

$-\frac{3க-5}{2க-1}+\frac{க-9}{2க-5}=-\frac{4க-3}{2க-1}+1$;

ஒரு பகுதியுடைய பின்னங்களை ஒரு பக்கமாக்குவோம்.

$\therefore \frac{4க-3}{2க-1}-\frac{3க-5}{2க-1}=1-\frac{க-9}{2க-5}$;

$\therefore \frac{(4க-3)-(3க-5)}{2க-1}=\frac{(2க-5)-(க-9)}{2க-5}$;

$\therefore \frac{க+2}{2க-1}=\frac{க+4}{2க-5}$;

$\therefore$ குறுக்குப் பெருக்கலாற் பெறுவது $(க+2)(2க-5)=(2க-1)(க+4)$;

$\therefore 2க^2-க-10=2க^2+7க-4$

$\therefore -க-7க=10-4$;

$\therefore -8க=6$;

$\therefore க=-\frac{3}{4}$.

105. ஒரு மாறிலியையேனும் ஒரு வெற்றெண்ணையேனுந் தொகுதியாகக் கொண்ட இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமனாயின், அவற்றினுடைய பகுதிகளும் ஒன்றனுக்கொன்று சமனாகும்.

இதனை நிறுவுவோம் :—

$\frac{அ}{இ_1க+உ_1}, \frac{அ}{இ_2க+உ_2}$ என்பன அ என்னும் ஒரு மாறிலியைத் தொகுதியாய்க் கொண்டு ஒன்றற்கொன்று சமனை இரு பின்னங்கள் எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \frac{அ}{இ_1க+உ_1}=\frac{அ}{இ_2க+உ_2}$;

குறுக்குப் பெருக்கலாற் பெறுவது

$அ(இ_2க+உ_2)=அ(இ_1க+உ_1)$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore இ_2க + உ_2 = இ_1க + உ_1$.

∴ பகுதிகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமனுதல் காண்க.

உ—ம்.

$$\frac{2}{(2க-1)(க+2)} = \frac{2}{(2க+1)(க-3)}.$$ இதனைத் தீர்க்க.

இங்கு ஒரு வெற்றெண்ணைத் தொகுதியாகக் கொண்ட இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமன்;

∴ அப் பின்னங்களுடைய பகுதிகளும் ஒன்றனுக் கொன்று சமன்.

$\therefore (2க-1)(க+2) = (2க+1)(க-3)$;

$\therefore 2க^2 + 3க - 2 = 2க^2 - 5க - 3$;

$\therefore 3க + 5க = 2 - 3$;

$\therefore 8க = -1$;

$\therefore க = -\frac{1}{8}$.

106. ஒரு தொகுதியையுஞ் சமனில்லாப் பகுதிகளையும் உடைய இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமனுயின், அத்தொகுதி 0 ஆகும்.

இதன் உண்மையைக் காட்டுவோம் :—

$\frac{அ}{8}, \frac{அ}{9}$ என்பன ஒரு தொகுதியையுஞ் சமனில்லாப் பகுதிகளையுங் கொண்டு ஒன்றனுக்கொன்று சமனுன இரு பின்னங்களெனக் கொள்வோம்.

$\therefore \frac{அ}{8} = \frac{அ}{9}$;

குறுக்குப் பெருக்கலாற் பெறுவது $9அ = 8அ$;

$\therefore 9அ - 8அ = 0$;

$\therefore அ = 0$.

∴ தொகுதி பூச்சியமாதல் காண்க.

உ—ம்.

$$\frac{2க-3}{க^2-10க+24} = \frac{2க-3}{க^2-10க+21}.$$ இதனைத் தீர்க்க.

க இனது எப்பெறுமானத்திற்கும் $க^2 - 10க + 21$ என்பது $க^2 - 10க + 21$ என்பதற்குச் சமனுகாது.

இங்கு, ஒரு தொகுதியையுஞ் சமனில்லாப் பகுதிகளையும் உடைய இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமனெனத் தரப்பட்டுள்ளன.

∴ தொகுதி 0 ஆகும்;

$\therefore 2க - 3 = 0$;

$\therefore 2க = 3$;

$\therefore க = 1\frac{1}{2}$.

107. மேற்கூறியனவற்றைப் பயன்படுத்துவோம் :

உ—ம்.

$$\frac{க-4}{க-5} + \frac{க-3}{க-4} = \frac{க-5}{க-6} + \frac{க-2}{க-3}.$$ இதனைத் தீர்க்க.

$$\therefore \frac{(க-5)+1}{க-5} + \frac{(க-4)+1}{க-4} = \frac{(க-6)+1}{க-6} + \frac{(க-3)+1}{க-3};$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{க-5} + 1 + \frac{1}{க-4} = 1 + \frac{1}{க-6} + 1 + \frac{1}{க-3};$$

$$\therefore \frac{1}{க-5} + \frac{1}{க-4} = \frac{1}{க-6} + \frac{1}{க-3}.$$

இனி, இடமாற்றஞ் செய்துஞ் செல்லலாம், செய்யாதுஞ் செல்லலாம்.

(i) இட மாற்றஞ் செய்யப் பெறுவது

$$\frac{1}{க-5} - \frac{1}{க-6} = \frac{1}{க-3} - \frac{1}{க-4};$$

$$\therefore \frac{(க-6)-(க-5)}{(க-5)(க-6)} = \frac{(க-4)-(க-3)}{(க-3)(க-4)};$$

$$\therefore \frac{-1}{க^2-11க+30} = \frac{-1}{க^2-7க+12};$$

இங்கு ஒரு வெற்றெண்ணைத் தொகுதியாகக் கொண்ட இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமன் ;

∴ பகுதிகளும் ஒன்றனுக்கொன்று சமன் ;

$\therefore க^2 - 11க + 30 = க^2 - 7க + 12$;

$\therefore -11க + 7க = -30 + 12$;

$\therefore -4க = -18$;

$\therefore க = 4\frac{1}{2}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) இடமாற்றஞ் செய்யாது பின்வருமாறு தீர்வு காணலாம் :

$$\frac{1}{க-5}+\frac{1}{க-4}=\frac{1}{க-6}+\frac{1}{க-3};$$

$$\therefore \frac{(க-4)+(க-5)}{(க-5)(க-4)}=\frac{(க-3)+(க-6)}{(க-6)(க-3)};$$

$$\therefore \frac{2க-9}{க^2-9க+20}=\frac{2க-9}{க^2-9க+18};$$

க இனது எப்பெறுமானத்திற்கும் $க^2-9க+20$ என்பது $க^2-9க+18$ என்பதற்குச் சமனுகாது ;

∴ இங்கு, ஒரு தொகுதியையுஞ் சமனில்லாப் பகுதிகளையும் உடைய இரு பின்னங்கள் ஒன்றனுக்கொன்று சமனெனப் பெறப்பட்டன ;

∴ தொகுதி 0 ஆகும் ;

$\therefore 2க-9=0;$

$\therefore 2க=9;$

$\therefore க=4\frac{1}{2}.$

பயிற்சி 17 (அ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :—

1. $\frac{2க-1}{3}-\frac{2க+3}{4}=\frac{3க-2}{2}.$

2. $\frac{க}{4}-\frac{க+1}{3}+1=\frac{2க-1}{6}-\frac{2க+1}{4}$

3. $\frac{3க-5}{3க+4}=\frac{4க-3}{4க+3}.$

4. $\frac{2க-5}{2க-3}=\frac{5க-4}{5க-1}.$

5. $\frac{4க-9}{2க-3}-\frac{6க-13}{3க-2}=0.$

6. $\frac{10க-3}{5க-2}-\frac{8க+5}{4க+3}=0.$

7. $\frac{(க+2)(2க+3)}{(க-2)(2க-3)}=\frac{க+4}{க-3}.$

8. $\frac{(3க+2)(2க+1)}{(3க-2)(2க-1)}=\frac{3(க+1)}{3க-4}.$

9. $\frac{3}{க-3}+\frac{2}{க}=\frac{5}{க-4}.$

10. $\frac{க}{3க-1}+\frac{1}{4க-3}=\frac{1}{3}.$

11. $\frac{1}{க-1}-\frac{1}{க-2}=\frac{1}{க-3}-\frac{1}{க-4}.$

12. $\frac{1}{க+5}+\frac{1}{க+6}=\frac{1}{க+4}+\frac{1}{க+7}.$

13. $\frac{2}{2க-3}+\frac{2}{2க-7}=\frac{1}{க-4}+\frac{1}{க-1}.$

14. $\frac{3}{3க-1}+\frac{3}{3க-17}=\frac{1}{க-1}+\frac{1}{க-5}.$

15. $\frac{க-7}{க-6}+\frac{க-8}{க-7}=\frac{க-10}{க-9}+\frac{க-5}{க-4}.$

16. $\frac{க+5}{க+4}+\frac{க+8}{க+7}=\frac{க+7}{க+6}+\frac{க+6}{க+5}.$

17. $\frac{க-11}{க-12}-\frac{க-9}{க-10}=\frac{க-7}{க-8}-\frac{க-5}{க-6}.$

18. $\frac{3க-1}{3க-2}-\frac{3க-4}{3க-5}=\frac{3க-7}{3க-8}-\frac{3க-10}{3க-11}.$

19. $\frac{16க-5}{4க-1}+\frac{8க-11}{4க-5}=\frac{4(6க-5)}{4க-3}.$

20. $\frac{3(4க+3)}{6க+5}+\frac{2(3க+4)}{3(2க+3)}=\frac{18க+19}{6க+7}.$

21. $\frac{10க-13}{2க-3}+\frac{6க-25}{2க-9}=\frac{6க-13}{2க-5}+\frac{10க-33}{2க-7}.$

22. $\frac{18க+11}{3க+2}+\frac{3க+10}{3க+11}=\frac{18க+47}{3க+8}+\frac{3க+4}{3க+5}.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

108. எழுத்துக் குணகங்களோடு பொருந்திய சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குமிடத்து, அவ்வெழுத்துக்கள் தெரிந்த கணியங்களைக் குறித்து நிற்குமாதலாலே தீர்வுகளிலுங் காணப்படும் :—

உ—ம்

1. $2\text{அ}(\text{க} - \text{இ}) = \text{இ}(\text{இ} - \text{க}) + \text{அ}^2$. இதனைத் தீர்க்க.

அடைப்புக்களை நீக்குவோம் :

$\therefore\ 2\text{அக} - 2\text{அஇ} = \text{இ}^2 - \text{இக} + \text{அ}^2$;

இடமாற்றஞ் செய்வோம்.

$\therefore\ 2\text{அக} + \text{இக} = \text{அ}^2 + 2\text{அஇ} + \text{இ}^2$;

$\therefore\ \text{க}(2\text{அ} + \text{இ}) = (\text{அ} + \text{இ})^2$;

$$\therefore\ \text{க} = \frac{(\text{அ} + \text{இ})^2}{2\text{அ} + \text{இ}}$$

உ—ம்.

2. $(\text{அக} - \text{இ})(\text{இக} + \text{அ}) = \text{அ}(\text{இக}^2 - \text{அ})$. இதனைத் தீர்க்க.

$\therefore\ \text{அஇக}^2 + \text{அ}^2\text{க} - \text{இ}^2\text{க} - \text{அஇ} = \text{அஇக}^2 - \text{அ}^2$;

$\therefore\ \text{அ}^2\text{க} - \text{இ}^2\text{க} = -\text{அ}^2 + \text{அஇ}$;

$\therefore\ \text{க}(\text{அ}^2 - \text{இ}^2) = -\text{அ}(\text{அ} - \text{இ})$;

$$\therefore\ \text{க} = -\frac{\text{அ}(\text{அ} - \text{இ})}{\text{அ}^2 - \text{இ}^2}$$

$$= -\frac{\text{அ}(\text{அ} - \text{இ})}{(\text{அ} - \text{இ})(\text{அ} + \text{இ})}$$

$$= -\frac{\text{அ}}{\text{அ} + \text{இ}}.$$

உ—ம்.

3. $\dfrac{\text{க} - \text{அ}}{\text{அ} + \text{இ}} + \dfrac{\text{க} - \text{இ}}{\text{அ} - \text{இ}} = \dfrac{(\text{அ} - \text{இ})^2}{\text{அ}^2 - \text{இ}^2}$. இதனுடைய தீர்வைக் காண்க.

இரு பக்கங்களையும் $\text{அ}^2 - \text{இ}^2$ என்பதாற் பெருக்குக.

$\therefore\ (\text{அ} - \text{இ})(\text{க} - \text{அ}) + (\text{அ} + \text{இ})(\text{க} - \text{இ}) = (\text{அ} - \text{இ})^2$;

$\therefore\ (\text{அ} - \text{இ})\text{க} - \text{அ}(\text{அ} - \text{இ}) + (\text{அ} + \text{இ})\text{க} - \text{இ}(\text{அ} + \text{இ}) = (\text{அ} - \text{இ})^2$;

$\therefore\ \text{க}(\overline{\text{அ} - \text{இ}} + \overline{\text{அ} + \text{இ}}) = (\text{அ} - \text{இ})^2 + \text{அ}(\text{அ} - \text{இ}) + \text{இ}(\text{அ} + \text{இ})$;

$2\text{அக} = \text{அ}^2 - 2\text{அஇ} + \text{இ}^2 + \text{அ}^2 - \text{அஇ} + \text{அஇ} + \text{இ}^2$

$= 2\text{அ}^2 - 2\text{அஇ} + 2\text{இ}^2$;

$\therefore\ \text{அக} = \text{அ}^2 - \text{அஇ} + \text{இ}^2$;

$$\therefore\ \text{க} = \frac{\text{அ}^2 - \text{அஇ} + \text{இ}^2}{\text{அ}}.$$

உ—ம்.

4. $\text{அக} + \text{இந} + \text{உ} = 0$, ... (1)

$\text{அ}'\text{க} + \text{இ}'\text{ந} + \text{உ}' = 0$ . ... (2)

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) இல் இருந்து, $\text{அக} + \text{இந} = -\text{உ}$; .... (3)

(2) ,, ,, $\text{அ}'\text{க} + \text{இ}'\text{ந} = -\text{உ}'$; .... (4)

(3) ஐ இ′ ஆலும் (4) ஐ இ ஆலும் பெருக்குக.

$\text{அஇ}'\text{க} + \text{இஇ}'\text{ந} = -\text{இ}'\text{உ}$; .... (5)

$\text{அ}'\text{இக} + \text{இஇ}'\text{ந} = -\text{இஉ}'$; .... (6)

(5) இல் இருந்து (6) ஐக் கழிக்க.

$\therefore\ \text{க}(\text{அஇ}' - \text{அ}'\text{இ}) = \text{இஉ}' - \text{இ}'\text{உ}$;

$$\therefore\ \text{க} = \frac{\text{இஉ}' - \text{இ}'\text{உ}}{\text{அஇ}' - \text{அ}'\text{இ}}.$$

இனி (3) ஐ அ′ ஆலும் (4) ஐ அ ஆலும் பெருக்குக.

$\text{அஅ}'\text{க} + \text{அ}'\text{இந} = -\text{உஅ}'$; .... (7)

$\text{அஅ}'\text{க} + \text{அஇ}'\text{ந} = -\text{உ}'\text{அ}$; .... (8)

(7) இல் இருந்து (8) ஐக் கழிக்க.

$\therefore\ \text{ந}(\text{அ}'\text{இ} - \text{அஇ}') = \text{உ}'\text{அ} - \text{உஅ}'$;

$$\therefore\ \text{ந} = \frac{\text{உ}'\text{அ} - \text{உஅ}'}{\text{அ}'\text{இ} - \text{அஇ}'}.$$

உ—ம்.

5. $\text{அக} - \text{இந} = \text{அ}^2 - \text{அஇ}$, ... (1)

$\text{இக} + \text{அந} = \text{அஇ} - \text{இ}^2$. .... (2)

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ அ ஆலும் (2) ஐ இ ஆலும் பெருக்குக.

$\text{அ}^2\text{க} - \text{அஇந} = \text{அ}^2(\text{அ} - \text{இ})$; .... (3)

$\text{இ}^2\text{க} + \text{அஇந} = \text{இ}^2(\text{அ} - \text{இ})$; .... (4)

(3) ஐயும் (4) ஐயுங் கூட்டுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$க(அ^2+இ^2)=(அ-இ)(அ^2+இ^2)$;

$\therefore\ க=\frac{(அ-இ)(அ^2+இ^2)}{(அ^2+இ^2)}$.

$=அ-இ$.

இனி, $க=அ-இ$ என (2) இற் பிரதியிடுக.

$இ(அ-இ)+அந=அஇ-இ^2$.

$அந=அஇ-இ^2-இ(அ-இ)$

$=அஇ-இ^2-அஇ+இ^2$

$=0$.

$\therefore\ ந=0$,

$க=அ-இ$.

பயிற்சி 17 (ஆ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $அ(க-அ)=இ(க-இ)$.
2. $க^2-(அ-க)^2=அ^2$.
3. $(க-அ)(க+அ-இ)=(க+அ)(க-இ)$.
4. $(க-அ)(இ+உ)-(க-இ)(உ+அ)+(க-உ)(அ+இ)=0$.
5. $(க-அ+இ)(க+அ-இ)=(அ+இ)^2+(க-அ^2)$.
6. $(அக-இ)(இக+அ)=அ(இக^2-அ)$.
7. $\frac{க}{அஇ}+\frac{க}{இஉ}+\frac{க}{உஅ}=1$.
8. $அ+\frac{அ}{இ}(க-அ)=இ+\frac{இ}{அ}(க-இ)$.
9. $\frac{க+இ}{அ-இ}-\frac{க-இ}{அ+இ}=\frac{4அஇ}{அ^2-இ^2}$.
10. $\frac{க+அ}{அ+இ}+\frac{க+இ}{அ-இ}=\frac{(அ+இ)^2}{அ^2-இ^2}$.
11. $\frac{க-அ}{அ-இ}-\frac{அ}{இ-அ}=\frac{1}{அ^2-இ^2}$.
12. $\frac{அ-க}{அ+க}=\frac{அ-இ}{அ+இ}$.

13. $\frac{அ}{இக}+\frac{இ}{அக}=\frac{1}{அ}+\frac{1}{இ}$.
14. $\frac{அ}{இக}-\frac{இ}{அக}=\frac{1}{அ}-\frac{1}{இ}$.
15. $\frac{அக-இ}{அக+இ}=\frac{இ}{அ}$.
16. $\frac{க}{க-அ+இ}+\frac{இ}{க+இ}=1$.
17. $\frac{க-2அ}{க-3அ}-\frac{க-4அ}{க-5அ}=\frac{க-6அ}{க-7அ}-\frac{க-8அ}{க-9அ}$.
18. $\frac{3க-4அ}{க-அ}+\frac{க-5அ}{க-4அ}=\frac{3க-10அ}{க-நஅ}+\frac{க-3அ}{க-2அ}$.
19. $\frac{5க+4அ}{க+அ}+\frac{2க+9அ}{க+5அ}=\frac{7க+19அ}{க+3அ}$.
20. $\frac{2க+3அ}{க+2அ}+\frac{க+5அ}{க+6அ}=\frac{3க+10அ}{க+4அ}$.
21. $அக-இந=அ^2$,
    $இக-அந=இ^2$.
22. $அக-இந=ப$,
    $அக+இந=ம$.
23. $\frac{ப}{க}+\frac{ம}{ந}=அ$,
    $\frac{ம}{க}+\frac{ப}{ந}=இ$.
24. $\frac{க}{அ}+\frac{ந}{இ}=1$,
    $\frac{க}{இ}+\frac{ந}{அ}=1$.
25. $\frac{அ}{க}+\frac{இ}{ந}=1$,
    $அக+இந=2கந$.
26. $\frac{க-அ}{2}+\frac{ந-இ}{3}=அ$,

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\frac{க - அ}{2} - \frac{ந - இ}{3} = இ.$$

27. $அ(2க + ந) + இ(2க - ந) = 2அஇ,$
$அ(2க + ந) - இ(2க - ந) = அஇ.$

28. $\frac{க}{அ} + \frac{ந}{அ - இ} = அ,$

$$\frac{க}{அ - இ} - \frac{ந}{அ} = இ.$$

109. கடுமையான உத்திக் கணக்குக்களைப் பின்வருமாறு செய்யலாம் :—

உ—ம்.

1. மாணுக்கன் ஒருவன் தன் இல்லத்திலிருந்து மணிக்கு 3 மைல் வீதம் நடந்தால் 4 நிமிடம் பிந்தியும் மணிக்கு 4 மைல் வீதம் நடந்தால் 2 நிமிடம் பிந்தியுந் தன் பாடசாலை சேர்வான். அப்பாடசாலை அவன் இல்லத்திலிருந்து எத்தனை மைல் தூரம் ?

அவன் பாடசாலை அவன் இல்லத்திலிருந்து க மைல் தூரமாகுக ; மணிக்கு 3 மைல் வீதம் க மைல் தூரஞ் செல்ல எடுக்கும் நேரம் $\frac{க}{3}$ மணியாகும் ;

மணிக்கு 4 மைல் வீதம் க மைல் தூரஞ் செல்ல எடுக்கும் நேரம் $\frac{க}{4}$ மணியாகும் ;

$\therefore$ இரண்டு நேரங்களின் வித்தியாசம் $\frac{க}{3} - \frac{க}{4}$;

கணக்கின்படி, இது 2 நிமிடம், அல்லது $\frac{1}{30}$ மணிநேரம் ;

$$\therefore \frac{க}{3} - \frac{க}{4} = \frac{1}{30} ;$$

இரு பக்கங்களையும் 60 ஆற் பெருக்குக.

$\therefore 20க - 15க = 2 ;$
$\therefore 5க = 2 ;$
$\therefore க = \frac{2}{5}.$

$\therefore$ அப்பாடசாலை அவன் இல்லத்திலிருந்து $\frac{2}{5}$ மைல்தூரம்.

உ—ம்.

2. ஒரு மனிதன் 3 ஆடுகளையும் 5 மாடுகளையும் 1800 ரூபாவாக விலைக்குக் கொண்டு ஆடுகளை 10% வீதம் நட்டமாகவும் மாடுகளை 10% வீதம் நயமாகவும் விற்றுன். அவனது தேறிய நயம் 120 ரூபா ஆயின், அவன் ஒவ்வோர் ஆட்டையும் என்ன விலைக்குக் கொண்டான்.

ஆடு ஒன்றின் விலை க ரூபா ஆகுக ; மாடு ஒன்றின் விலை ந ரூபா ஆடுக.

$\therefore$ 3 ஆடுகளையும் 5 மாடுகளையும் $3க + 5ந$ ரூபாவாகக் கொள்ளலாம் ;

இது கணக்கின்படி 1800 ரூபாவாகும். .. .. (1)

$\therefore 3க + 5ந = 1800$

3 ஆடுகளையும் விற்க 10% வீதம் நட்டம் அடைந்தான்.
$\therefore$ 3 ஆடுகளின் விற்ற விலை கொள்விலையின் 90%.

$$= 3க \times \frac{90}{100} \text{ ரூபா.}$$

$$= \frac{27க}{10} \text{ ரூபா.}$$

5 மாடுகளையும் விற்க 10% வீதம் நயம் அடைந்தான்.
$\therefore$ 5 மாடுகளின் விற்ற விலை கொள்விலையின் 110%

$$= 5ந \times \frac{110}{100} \text{ ரூபா}$$

$$= \frac{11ந}{2} \text{ ரூபா.}$$

$\therefore$ 3 ஆடுகளையும் 5 மாடுகளையும் விற்ற விலை $\frac{27க}{10} + \frac{11ந}{2}$ ரூபா ;

கணக்கின்படி, இது $(1800 + 120)$ ரூபா, அல்லது 1920 ரூபா.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore \frac{27க}{10} + \frac{11ந}{2} = 1920$ ....(2)

$\therefore 27க + 55ந = 19200$ ....(3)

(1) ஐ 9ஆற் பெருக்க வருவது $27க + 45ந = 16200$; .....(4)

(3) இல் இருந்து (4) ஐக் கழிக்க வருவது $10ந = 3000$;

$\therefore ந = 3000$;

ந=300 என (1) இற் பிரதியிடுக.

$\therefore 3க + 5 \times 300 = 1800$;

$3க = 300$;

$\therefore க = 100$.

∴ ஒவ்வோராட்டின் விலை 100 ரூபா.

உ—ம்.

3. ஒரு சைக்கிளோடி அ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து மு. ப. 6 மணிக்குப் புறப்பட்டு இ என்னும் பட்டினத்தைப் பி. ப. 3 மணிக்கு அடைந்தான். வேறொரு சைக்கிளோடி இ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து மு. ப. 8 மணிக்குப் புறப் பட்டு அ என்னும் பட்டினத்தைப் பி. ப. 4 மணிக்குச் சேர்ந்தான். இருவரும் மாரு வேகத்தோடு ஓடினுராயின், அவர்கள் ஒருவரை ஒருவர் எந்நேரஞ் சந்தித்தனர்?

அவர்கள் மு. ப. 6 மணிக்குப் பின் க மணி நேரத்திற் சந்தித்தனர் எனக் கொள்வோம்.

அ இலிருந்து இ இனது தூரம் ந மைலாகுக.

∴ முதற் சைக்கிளோடி ந மைல் தூரத்தை 6 மணிநேரத் தில் ஓடினுன்.

∴ அவனது வேகம் மணிக்கு $\frac{ந}{6}$ மைலாகும்.

மு. ப. 6 மணி தொடங்கி க மணிநேரத்தில் அவன் ஓடிய தூரம் $\frac{கந}{6}$ மைலாகும்.

இனி, இரண்டாஞ் சைக்கிளோடி ந மைல் தூரத்தை 8 மணி நேரத்தில் ஓடினுன்.

∴ அவனது வேகம் மணிக்கு $\frac{ந}{8}$ மைலாகும்.

மு. ப. 8 மணி தொடங்கி $(க - 2)$ மணி நேரத்தில் அவன் ஓடிய தூரம் $\frac{(க - உ)ந}{8}$ மைலாகும்.

∴ இருவரும் ஓடிய தூரம் $\frac{கந}{6} + \frac{(க - 2)ந}{8}$ மைலாகும்.

கணக்கின்படி, இது ந மைல் தூரமாகும்.

$$\therefore \frac{கந}{6} + \frac{(க - 2)ந}{8} = ந$$

இருபக்கங்களையும் $\frac{48}{ந}$ ஆற் பெருக்குக.

$\therefore 8க + 6(க - 2) = 48$;

$8க + 6க - 12 = 48$;

$\therefore 14க = 60$;

$\therefore க = 4\frac{2}{7}$.

∴ அவர்கள் ஒருவரை ஒருவர் சந்தித்த நேரம் மு. ப. 10 மணி $17\frac{1}{7}$ நி.

பயிற்சி 17 (இ)

1. மனிதன் ஒருவன் ஒரு பட்டினத்திலிருந்து ஒரு பட்டினத்துக்கு மணிக்கு $3\frac{3}{4}$ மைல் வீதம் நடந்து தன் பிரயாணத்தை முடித்தான். அவன் மணிக்கு 4 மைல் வீதம் நடந்தானுயின் 40 நிமிடம் முந்தித்தன் பிரயாணத்தை முடிப்பன். இரு பட்டினங்களுக்கு மிடையேயுள்ள தூரம் என்ன?

2. மாணுக்கன் ஒருவன் தன் இல்லத்திலிருந்து செக்க னுக்கு 12 யார் வீதஞ் சென்ருல் 8 செக்கன் பிந்தியும் செக்கனுக்கு 15 யார் வீதஞ் சென்ருல் 2 செக்கன் முந்தி யுந் தன் பாடசாலை சேர்வன். அவனில்லத்திலிருந்து அப் பாடசாலை எவ்வளவு தூரத்திலுள்ளது?

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. ஒரு மனிதன் மணிக்கு 1 மைல் வீதம் ஓடும் ஆற்றில் ஒரு தூரத்தை ஆற்ருேட்டத் தோடொத்து நீந்தி எடுத்த நேரம் ஆற்ருேட்டத்தை எதிர்த்து நீந்த எடுத்த நேரத்தின் அரை மடங்கு. அவன் நீந்திய வேகம் என்ன?

4. கூலிக்காரன் ஒருவன் தன் சேமிப்புப் பணத்தை 2 ரூபாத்தாள்களும் 5 ரூபாத்தாள்களுமாக 56 தாள்களில் வைத்திருந்தான். அவன் 2 ரூபாத்தாள்கள் எல்லாவற்றையும் 5 ரூபாத்தாள்களாகவும் 5 ரூபாத்தாள்களெல்லாவற்றையும் 2 ரூபாத்தாள்களாகவும் மாற்றிஞுயின், அவனது பணந் தொகையளவில் வேறுபடாது. அவனிடம் உள்ள 5 ரூபாத்தாள்கள் எத்தனை?

5. மனிதன் ஒருவன் தனது 1125 ரூபா முதலில் ஒரு பகுதியை 3% வீத வட்டிக்கும் மற்றைப் பகுதியை $3\frac{1}{2}$% வீத வட்டிக்குங் கொடுத்து ஆண்டொன்றுக்கு 37 ரூபா வருமானம் பெறுகின்ருன். அவன் $3\frac{1}{2}$% வீத வட்டிக்குக் கொடுத்த பணம் எவ்வளவு?

6. பிரயாணி ஒருவன் ஒரு குறித்த தூரத்தை நடந்து முடித்தான். தான் மணிக்கு அரை மைல் வீதங் கூடுதலாக நடந்தால் 5 மணி நேர முந்தியும், மணிக்கு அரை மைல் வீதங் குறைவாக நடந்தால் 7 மணி நேரம் பிந்தியுந் தன் பிரயாணத்தை முடிக்கலாம் என்பதை உணர்ந்தான். அவனுடைய பிரயாணத்தினது தூரத்தையும் நடந்த வேகத்தையுங் காண்க.

7. மிருக வியாபாரி ஒருவன் 5 குதிரைகளையும் 8 மாடுகளையும் 9200 ரூபாவுக்கு விலையாகக் கொண்டு, குதிரைகளை 5% வீத நயமாகவும் மாடுகளை 5% வீத நட்டமாகவும் விற்க 140 ரூபா நயமடைந்தான். அவன் ஒவ்வொரு குதிரையையும் என்ன விலைக்குக் கொண்டான்?

8. ஒரு மனிதன் 840 ரூபா முதலில் ஒரு பகுதியை 3% வீத வட்டிக்கும் மற்றைப் பகுதியை 4% வீத வட்டிக்குங் கொடுத்தான். அவனது வருமானம் அவன் பணத்தின் $3\frac{3}{4}$% வீதமாயின், அவன் ஒவ்வொரு வீதத்திலுங் கொடுத்த தொகை என்ன?

9. ஒரு செவ்வகத்தினுடைய நீளம் 5 அடி குறைந்தும் அகலம் 3 அடி கூடியுமிருந்தால் அதன் பரப்பளவு 15 சதுரவடியாற் கூடும். அன்றி, அதனீளம் 5 அடி கூடியும் அகலம் 5 அடி குறைந்து மிருந்தால், அதன் பரப்பளவு 125 சதுரவடியாற் குறையும். அச் செவ்வகத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

10. ஓரறையினது நீளம் 6 அடி குறைந்தும் அதனகலம் 4 அடி கூடியுமிருப்பின், அவ்வறை பரப்பளவின் மாருது சதுரவடிவம் பெறும். அவ்வறையினுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

11. ஒரு தொகை மாம்பழங்களை ரூபாவுக்கு 8ஆக விலைக்குக் கொண்டு, அத்தொகையில் $\frac{1}{4}$ ஐத் தின்றுவிட்டு மீதியை ரூபாவுக்கு 5ஆக விற்க 2 ரூபா நயமடைந்தேன். நான் வாங்கிய பழங்கள் எத்தனை?

12. ஒரு தொகை ரூபா ஒரு தொகை மாணுக்கருக்குச் சமனுகப் பங்கிடப்பட்டன. மாணுக்கர் தொகை 10 ஆற் கூடிஞல், அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் 2 ரூபா குறைவாகப் பெறுவர். அவர்களுடைய தொகை 8 ஆற் குறைந்தால் அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் 2 ரூபா கூடுதலாகப் பெறுவர். மாணுக்கர் தொகையையும் அவர்கள் ஒவ்வொருவரும் பெற்ற பணத்தையுங் காண்க.

13. அ என்பவன் 40 யார் ஓடும் நேரத்தில் இ என்பவன் 35 யார் ஓடுவான். இ என்பவன் 5 நிமிடம் முந்தி ஓடத்தொடங்கிஞுயின், எத்தனை நிமிடங்களில் அ என்பவன் இ ஓடு தோளொடு தோளாகப் போவான்.

14. ஒரு புகைவண்டி அ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து மு.ப. 8 மணிக்குப் புறப்பட்டு இ என்னும் பட்டினத்தை மு.ப. 11 மணிக்கு அடைந்தது. வேருெரு புகைவண்டி இ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து மு.ப. 9 மணிக்குப் புறப்பட்டு அ என்னும் பட்டினத்தை மு.ப. 11 மணிக்குச் சேர்ந்தது. இருவண்டிகளும் மாரு வேகத்தோடு ஓடினவெனின் அவை ஒன்றை ஒன்று எத்தனை மணிக்குச் சந்தித்தன?

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

15. அ என்பவனும் இ என்பவனும் ஓர் ஓட்டப் போட்டியிற் பங்குபற்றினர். அ என்பவன் செக்கனுக்கு 11 அடி வீதமும் இ என்பவன் செக்கனுக்கு $8\frac{1}{4}$ அடி வீதமும் ஓடினர். இ என்பவனுக்கு $16\frac{1}{2}$ அடி முந்தி நிற்க இடங் கொடுத்தால், இருவரும் ஒருங்கு தங்குறிக்கோளை அடைவர். அப்போட்டி எத்தனை அடித் தூரம் ?

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 6

(அ)

1. $2\text{க}^3 - 3\text{க} + 1, \quad 3\text{க}^3 - 4\text{க}^2 + 1$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

2. $\text{க}^4 - 4\text{க}^2, \quad \text{க}^6 - 8, \quad \text{க}^3 + \text{க}^2$. இவற்றினுடைய பொ. ம. சி. ஐக் காண்க.

3. $\dfrac{\text{அ} + \text{இ}}{\text{அ}^2 - 4\text{இ}^2} - \dfrac{\text{அ} + 2\text{இ}}{3\text{அ}^2 - 5\text{அஇ} - 2\text{இ}^2}$. இதனைச் சுருக்கித் தருக.

4. $\dfrac{1}{\text{அக}} - \dfrac{1}{\text{இக}} = \dfrac{1}{\text{அ}^2} - \dfrac{1}{\text{இ}^2}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. ஒரு பட்டினத்திலிருந்து புறப்பட்ட புகைவண்டி ஒன்று தன் வேகத்தை மணிக்கு 10 மைல் வீதங் கூட்டி ஓடினுல் 2 நிமிடம் முந்தியும் மணிக்கு 5 மைல் வீதங் குறைத்து ஓடினுல் 2 நிமிடம் பிந்தியுந் தான் குறித்த இடத்தைச் சேரும். அதன் வேகம் என்ன ?

(ஆ)

1. $\text{க}^2 + \text{க} - 6, \ 2\text{க}^2 - 5\text{க} + 2, \ \text{க}^2 - \text{க} - 2$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

2. $8\text{க}^3 - 20\text{க}^2 + 18\text{க} - 9, \quad 8\text{க}^3 + 4\text{க}^2 - 6\text{க} + 9$. இவற்றினுடைய பொ. ம. சி. ஐக் காண்க.

3. $\dfrac{2(1 - 3\text{அ})}{\text{அ}^2 - 9} - \dfrac{2}{3 - \text{அ}} + \dfrac{5}{1 + \text{அ}}$. இதனைச் சுருக்கித் தருக.

4. $\dfrac{\text{அக} - \text{இ}}{\text{அக} + \text{இ}} = \dfrac{\text{அ}^2 - \text{இ}^2}{\text{அ}^2 + \text{இ}^2}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. ஒரு மனிதன் மணிக்கு $1\frac{1}{4}$ மைல் வீதம் ஓடும் ஆற்றில் ஒரு மைல் தூரத்தை ஆற்றேட்டத்திற் கெதிராக நீந்த எடுத்த நேரம் ஆற்றேட்டத்தோடொத்து நீந்த எடுத்த நேரத்தின் இருமடங்கு. அவனது சொந்த வேகம் என்ன ?

(இ)

1. $1 + 5\text{க} - 4\text{க}^2 - 20\text{க}^3, \quad 1 + 6\text{க} - 4\text{க}^2 - 24\text{க}^3$. இவற்றினுடைய பொ. கா . பெ., பொ. ம. சி. என்பனவற்றைக் காண்க.

2. $\dfrac{1}{\text{க} - 1} - \dfrac{1}{\text{க} + 1} + \dfrac{\text{க}^2 + 1}{\text{க}^3 + 1} - \dfrac{\text{க}^2 + 1}{\text{க}^3 - 1}$. இதனைச் சுருக்குக.

3. $\text{அ} + \dfrac{\text{அ}}{\text{இ}}(\text{க} + \text{அ}) = \text{இ} + \dfrac{\text{இ}}{\text{அ}}(\text{க} + \text{இ})$. இதனுடைய தீர்வைக் காண்க.

4. $\dfrac{\text{அ}}{2\text{க} + 3\text{ந}} = \dfrac{\text{இ}}{2\text{க} - 3\text{ந}} = \text{உ}$. இவற்றைத் தீர்க்க.

5. ஒரு செவ்வகத்தினது நீளம் 5 அடியாற் கூடினுல் அதன் பரப்பளவு 150 சதுரவடியாற் கூடும். அன்றி, அதன் அகலம் 5 அடியாற் கூடினுல் அதன் பரப்பளவு 200 சதுரவடியாற் கூடும். அச்செவ்வகத்தினுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க

(ஈ)

1. $\dfrac{2\text{க}}{1 - 2\text{க}^2}$ என்பது $2\text{க} - 4\text{க}^3 - \dfrac{6\text{க}^5}{1 - 2\text{க}^2}$ என்பதற்குச் சமன் என நிறுவுக.

2. $\text{அ}^2\text{இ}^3(\text{அ}^3 - \text{இ}^3), \ \text{அ}^3\text{இ}^2(\text{அ}^4 - \text{இ}^4), \ \text{அஇ}(\text{அ} - \text{இ})^3$. இவற்றினுடைய பொ. ம. சி. ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $\frac{\text{அ}+\text{க}}{(\text{அ}-\text{இ})(\text{அ}-\text{உ})}+\frac{\text{இ}+\text{க}}{(\text{இ}-\text{உ})(\text{இ}-\text{அ})}+\frac{\text{உ}+\text{க}}{(\text{உ}-\text{அ})(\text{உ}-\text{இ})}$. இதனைச் சுருக்குக.

4. $\frac{2}{5\text{க}-2}+\frac{3}{5\text{க}}=\frac{5}{5\text{க}-4}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. ஒரு தோட்டத்தினுடைய நீளம் 12 அடியாற் குறைந்தும் அகலம் 10 அடியாற் கூடியும் இருந்தால், அது பரப்பளவிலேமாறாது சதுரவடிவங் கொள்ளும். அத் தோட்டம் என்ன நீளவகலங்களை உடையது?

(உ)

1. $\text{க}=\frac{\text{ந}-\text{ய}}{\text{ந}+\text{ய}}$ ஆயின், ந இன் பெறுமானத்தை க, ய என்னும் இவற்றிற் காண்க.

2. $\text{க}^3-7\text{க}+6$, $\text{க}^4-6\text{க}^2+\text{க}+6$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

3. $\frac{1}{2\text{அ}-1}-\frac{1}{2\text{அ}+1}-\frac{2}{4\text{அ}^2+1}-\frac{4}{4\text{அ}^4+1}$. இதனைச் சுருக்குக.

4. $\frac{24\text{க}+29}{4\text{க}+5}-\frac{18\text{க}-7}{3\text{க}-1}=0$. இதனுடைய தீர்வைக் காண்க.

5. கூலிக்காரன் ஒருவன் ஒரு விடுதிச் சாலையிலிருந்து செக்கனுக்கு 12 யார் வீதஞ் சென்றால் 3 செக்கன் பிந்தியுஞ் செக்கனுக்கு 16 யார் வீதஞ் சென்றால் ஒரு செக்கன் முந்தியுந் தனது தொழிற்சாலையை அடைவான். அவன் வீட்டிலிருந்து அத்தொழிற்சாலை எத்தனை யார் தூரம்?

(ஊ)

1. $\frac{1}{\text{க}}=\frac{1}{\text{வ}}+\frac{1}{\text{ப}}$ ஆயின், வ இன் பெறுமானத்தை க, ப என்பனவற்றிற் காண்க.

2. $12\text{க}^3+8\text{க}^2+21\text{க}+10$, $12\text{க}^3+8\text{க}^2-19\text{க}-10$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

3. $\frac{5-3\text{க}}{2-\text{க}}+\frac{8-3\text{க}}{\text{க}-3}-\frac{2\text{க}+3}{2+\text{க}}+\frac{2\text{க}+5}{3+\text{க}}$. இதனைச் சுருக்குக.

4. $\text{அ}(\text{க}-1)+\text{இ}(\text{ந}-1)=\text{இ}(\text{க}-1)+\text{அ}(\text{ந}-1)=1$. இவற்றைத் தீர்க்க.

5. முட்டை வியாபாரி ஒருவன் ஒரு தொகை முட்டைகளை ரூபாவுக்கு 10 ஆக விலைக்கு வாங்கினான். அவற்றுள் $\frac{1}{4}$ பழுதடைந்தது. மீதியை ரூபாவுக்கு 6 ஆக விலைக்கு விற்க 9 ரூபா நயமடைந்தான். அவன் விலையாகக் கொண்ட முட்டைகள் எத்தனை?

(எ)

1. $\text{க}=\frac{2\text{அ}\text{இ}}{\text{அ}-\text{இ}}$ ஆயின், $\frac{\text{க}-\text{அ}}{\text{க}+\text{அ}}+\frac{\text{க}-\text{இ}}{\text{க}+\text{இ}}$ என்பதன் பெறுமானத்தை அ, இ என்பனவற்றிற் காண்க.

2. $2\text{க}^3+\text{க}^2-7\text{க}-6$, $6\text{க}^3-\text{க}^2-19\text{க}-6$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

3. $\frac{\text{க}^6-1}{\text{க}^5+\text{க}^2}\div\frac{\text{க}^2+\text{க}+1}{\text{க}^2-1}\times\frac{1}{(\text{க}-1)^3}$. இதனைச் சுருக்கித் தருக.

4. $\frac{\text{க}+3}{\text{க}+2}+\frac{\text{க}+9}{\text{க}+8}=\frac{2(\text{க}+6)}{\text{க}+5}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. அ என்பவன் 60 யார் ஓடும் நேரத்தில் இ என்பவன் 50 யார் ஓடுவான். இ என்பவன் 10 நிமிடம் முந்தி ஓடத்தொடங்கினானாயின், அ என்பவன் எத்தனை நிமிடங்களில் இ என்பவனோடு தோளொடு தோளாகப் போவான்?

(ஏ)

1. $\text{க}=\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ ஆயின், $\frac{\text{க}^2}{(\text{க}-1)^2}+\frac{\text{க}^2}{(\text{க}+1)^2}$ என்பதன் பெறுமானத்தை அ, இ என்பனவற்றிற் காண்க.

2. $2\text{க}^3-5\text{க}^2-4\text{க}+3$, $3\text{க}^3-13\text{க}^2+13\text{க}-3$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ., பொ. ம. சி. என்பனவற்றைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $\frac{1}{(3க+1)^2}-\frac{2}{9க^2-1}+\frac{1}{(1-3க)^2}$. இதனைச் சுருக்குக.

4. $\frac{20க-17}{4க-3}-\frac{20க-37}{4க-7}=\frac{12க-17}{4க-5}-\frac{12க-29}{4க-9}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. நிலையான நீரிலே மணிக்கு 3 மைல் வீதம் நீந்தும் ஒருவன் மாறா வேகத்தோடு ஓடும் ஓராற்றில் ஒரு தூரத்தை ஆற்றோட்டத்திற்கு எதிராக நீந்த எடுத்த நேரம் ஆற்றோட்டத்தோடு ஒத்து நீந்தும் நேரத்தின் மும்மடங்கு. அவ்வாற்றோட்டத்தின் வேகத்தைக் காண்க.

(ஐ)

1. $அ-இ=2$ ஆயின், $(அ-1)(அ+2)$ என்பதன் பெறுமானத்தை இ இற் காண்க.

2. $2க^3-3க-1$, $3க^3+2க^2+1$, $4க^3+க^2-க+2$. இவற்றினுடைய பொ. கா. பெ. ஐக் காண்க.

3. $\frac{க+ந}{(ய-க)(ய-ந)}+\frac{ந+ய}{(க-ந)(க-ய)}+\frac{ய+க}{(ந-ய)(ந-க)}$. இதனைச் சுருக்குக.

4. $\frac{2க-5அ}{க-2அ}+\frac{க-6அ}{க-5அ}=\frac{2க-9அ}{க-4அ}+\frac{க-4அ}{க-3அ}$. இதனைத் தீர்க்க.

5. ஒரு மனிதன் அ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து காலை 6 மணிக்குப் புறப்பட்டு இ என்னும் பட்டினத்தை மாலை 6 மணிக்குச் சேர்ந்தான். வேறொரு மனிதன் இ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து காலை 8 மணிக்குப் புறப்பட்டு அ என்னும் பட்டினத்தை மாலை 6 மணிக்குச் சேர்ந்தான். இருவரும் மாறா வேகத்தோடு நடந்தாராயின், அவர்கள் ஒருவரை ஒருவர் எந்நேரஞ் சந்தித்தனர்?

அத்தியாயம் 18

சார்புக்குறியீடும் மீதித்தேற்றமும்

110. சார்புக்குறியீடு: ஒரு மாறி பற்றியெழும் ஒரு கோவையின் பெறுமானம் அம்மாறியின் பெறுமானத்தைச் சார்ந்து நிற்கும். அதுபற்றி அக்கோவை அம்மாறியின் சார்பு எனப்படும். $அக^2+இக+உ$ என்பது க இனது சார்பு ஆகும். க இன் சார்பு என்பது 85-ஆம் பிரிவிற் கூறியபடி சுருக்கமாக ச (க) என்னுங் குறியீட்டினாற் காட்டப்படும். க இற்கு யாதுமொரு குறித்த பெறுமானத்தைக் கொடுக்க, அச்சார்பு அடையும் பெறுமானம் அச்சார்பில் க இன் பெறுமானத்தைப் பிரதியிட்டுக் காணலாம்:

$$ச(க)=அக^2+இக+உ\;;$$
$$க=3\ \text{ஆயின்},\ ச(3)=அ(3)^2+இ(3)+உ\;;$$
$$=9அ+3இ+உ.$$

$அக^2+இக+உ$ என்பது க இன் ஒரு சார்பு. $அக+இ$, $அக^3+இக^2+உக+எ$ என்பன க இனுடைய பிற சார்புகள். இவற்றை சா(க), சி(க) முதலியனவற்றாற் குறிக்கலாம். சார்புகளுடைய வேறுபாடுதோன்ற ச(க), சா(க), சி(க), சீ(க) முதலியனவற்றை முறையே க இனுடைய சச்சார்பு, சாச்சார்பு, சிச்சார்பு, சீச்சார்பு என்று சொல்பற்றிக் கூறலாம்.

இனி இக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம்:—

உ—ம்.

1. $ச(க)=2க^2-3க+1$ ஆயின், $ச(0)$, $ச(\frac{1}{2})$, $ச(1)$, $ச(-2)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $ச(க)=2க^2-3க+1\;;$

$$\therefore\ ச(0)=2(0)^2-3(0)+1$$
$$=0-0+1$$
$$=1.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $ச(க)=2க^2-3க+1$;

$\therefore ச(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{2})^2-3(\frac{1}{2})+1$

$=2\times\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1$

$=\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}+1$

$=0.$

(iii) $ச(க)=2க^2-3க+1$;

$\therefore ச(1)=2(1)^2-3(1)+1$

$=2\times1-3\times1+1$

$=2-3+1$

$=0.$

(iv) $ச(க)=2க^2-3க+1$;

$\therefore ச(-2)=2(-2)^2-3(-2)+1$

$=2\times4-3\times-2+1$

$=8+6+1$

$=15.$

உ—ம்.

2. $ச(க)=2க^2-3க+1$, $சி(க)=க^2+2க-3$ ஆயின், $ச(2)+சி(-3)$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$ச(க)=2க^2-3க+1$;

$\therefore ச(2)=2(2)^2-3(2)+1$

$=2\times4-6+1$

$=3.$

$சி(க)=க^2+2க-3$;

$\therefore சி(-3)=(-3)^2+2(-3)-3$

$=9-6-3$

$=0.$

$\therefore ச(2)+சி(-3)=3+0$

$=3.$

உ—ம்.

3. $ச(இ)=\frac{இ(இ+1)}{2}$ ஆயின், $ச(இ)-ச(இ-1)$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

$ச(இ)=\frac{இ(இ+1)}{2}$;

$\therefore ச(இ-1)=\frac{(இ-1)இ}{2}$;

$\therefore ச(இ)-ச(இ-1)=\frac{இ(இ+1)}{2}-\frac{(இ-1)இ}{2}$

$=\frac{இ}{2}\{(இ+1)-(இ-1)\}$

$=\frac{இ}{2}\{இ+1-இ+1\}$

$=\frac{இ}{2}\times2$

$=இ.$

பயிற்சி 18 (அ)

1. $ச(க)=க^3-3க+1$ ஆயின், $ச(2)$, $ச(-1)$, $ச(0)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

2. $ச(க)=க^2-5க-6$ ஆயின், $ச(-2)$, $ச(0)$, $ச(2)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

3. $ச(க)=அக^2+இக+உ$ ஆயின், $ச(-1)$, $ச(0)$, $ச(ப)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

4. $ச(இ)=\frac{இ(இ+1)(2இ+1)}{6}$ ஆயின், $ச(10)$ என்பதன் பெறுமானம் என்ன ?

5. $ச(இ)=\frac{இ(இ+1)}{2}$ ஆயின், $ச(இ+1)-ச(இ)$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. $ச(க)=அக^2+இக-உ$, $சி(க)=அக^2-இக-உ$ ஆயின், $ச(க)-சி(க)$, $ச(0)+சி(0)$, $3ச(-1)-2சி(-2)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

7. $ச(க)=பக^2+மக+வ$ ஆயின், $ச(அ)$, $ச(-அ)$, $ச(0)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

8\. $ச(அ)=அ(இ^2-உ^2)+இ(உ^2-அ^2)+உ(அ^2-இ^2)$ ஆயின், $ச(இ)=0$ என நிறுவுக.

9\. $ச(ப)=பம(ப-ம)+மவ(ம-வ)+வப(வ-ப)$ ஆயின், $ச(ம)=0$, $ச(வ)=0$ என நிறுவுக.

10\. $ச(க)=2க-1$, $ச'(க)=2க+1$ ஆயின், $ச'(க+1)-ச(க+1)=4$ என நிறுவுக.

111. மீதித் தேற்றம் : க என்பதைக் கொண்டுள்ள எக்கோவைகளும் க இனுடைய சார்புகளென அறிவோம். ஒரு சார்பானது வர்க்கமூலத்தை யேனும் பிற மூலங்களையே னுங் கொள்ளாதிருப்பின் அது விகிதமுறுசார்பெனப்படும். அதனிலுள்ள க இனுடைய அடுக்குக்கள் எல்லாம் முழு நேரெண்களாயின், அது முழுவெண்சார்பென்று கூறப்படும். இங்கு விகிதமுறு முழுவெண் சார்புகளே ஆளப்படும்.

$தக^3+பக^2+மக+வ$ என்னும் க இன் சார்பு அத்தன்மை யது. அதனை $க-அ$ என்பதால் வகுப்போம் :—

$$க-அ)\ தக^3+பக^2+மக+வ\ (தக^2+\overline{தஅ+ப}.க+\overline{தஅ^2+பஅ+ம}.$$
$$\underline{தக^3-தஅக^2}$$
$$(தஅ+ப)க^2+மக$$
$$\underline{(தஅ+ப)க^2-அ(தஅ+ப)க}$$
$$(தஅ^2+பஅ+ம)க+வ$$
$$\underline{(தஅ^2+பஅ+ம)க-அ(தஅ^2+பஅ+ம)}$$
$$தஅ^3+பஅ^2+மஅ+வ$$

இதனை ஆராயின், பின்வரும் உண்மை புலனுகும் :

க இனது விகிதமுறு முழுவெண் சார்பு ஒன்றை க இன்றிய மீதிபெறும் வரை க — அ ஆல் வகுத்தால் வருமீதி அ இனது அச்சார்பாகும்.

இதுவே **மீதித் தேற்றம்** எனப்படும்.

இவ்வுண்மையைப் பின்வருமாறும் நிறுவலாம் :—

$ச(க)$ என்பது க இனது ஒரு விகிதமுறு முழுவெண்சார் பெனக் கொள்வோம். அதனை $க-அ$ ஆல் க இன்றிய மீதி பெறும்வரை வகுக்க வரும் ஈவு $ச'(க)$ என்றும் மீதி ம என்றுங் கொள்வோம்.

எண்கணித முறைப்படி,

வகுக்கப்படுமெண் = வகுக்குமெண் × ஈவு + மீதி.

இதன்படி, $ச(க)=(க-அ)ச'(க)+ம$.

இங்கு $க=அ$ எனப் பிரதியிடுக.

$$\therefore ச(அ)=(அ-அ)ச'(அ)+ம$$
$$=0\times ச'(அ)+ம)$$
$$=0+ம$$
$$=ம.$$

$\therefore ச(க)$ என்பதை க இன்றிய மீதி வரும்வரை $க-அ$ ஆல் வகுத்தால், மீதி $ச(அ)$ ஆகும். அதுபோல, $ச(க)$ என்பதை க இன்றிய மீதிவரும்வரை $க+அ$ ஆல் வகுத்தால், மீதி $ச(-அ)$ ஆகும்.

இதனலே மீதித் தேற்றம் நிறுவப்பட்டவாறு காண்க. இம் மீதித் தேற்றத்திலிருந்து பின்வரும் உண்மைகள் புல னுகும் :—

(1) $ச(அ)=0$ ஆயின், $க-அ$ என்பது $ச(க)$ இன் காரணியாகும்.

(2) $ச(-அ)=0$ ஆயின், $க+அ$ என்பது $ச(க)$ இன் காரணியாகும்.

இந்த இரண்டு உண்மைகளுங் கோவைகள் சிலவற்றைக் காரணிகளாய்ப் பிரிக்கும்பொழுது மிக்க பயனளிக்கும்.

உ—ம்.

1\. மீதித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $க^3-3அக^2+3அ^2க-அ^3$ என்பதை $க-அ$ ஆல் வகுக்க வரு மீதியைக் காண்க.

$ச(க)=க^3-3அக^2+3அ^2க-அ^3$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore ச(அ)=அ^3-3அ(அ^2)+3அ^2(அ)-அ^3$$
$$=அ^3-3அ^3+3அ^3-அ^3$$
$$=0.$$

$\therefore ச(க)$ ஐ $க-அ$ ஆல் வகுக்க வருமீதி 0 ஆகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

2. $க+1$ என்பது $க^3-3க-2$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள் ஒன்று என நிறுவுக.

$ச(க)=க^3-3க-2$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore ச(-1)=(-1)^3-3(-1)-2$
$=-1+3-2$
$=0.$

$\therefore க+1$ என்பது $க^3-3க-2$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள்ஒன்று.

உ—ம்.

3. $2க^3+பக^2+மக-8$ என்பது $க^2-2க-8$ என்பதாலே மீதியின்றி வகுபடுமாயின், ப, ம என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

$க^2-2க-8=(க+2)(க-4)$;

இனி, $ச(க)=2க^3+பக^2+மக-8$ எனக் கொள்வோம்

$\therefore ச(-2)=2(-2)^3+ப(-2)^2+ம(-2)-8$
$=2(-8)+ப(4)-2ம-8$
$=-16+4ப-2ம-8$
$=4ப-2ம-24.$

$க+2$என்பது $ச(க)$ இன் காரணியாதலால்,
$ச(-2)=0.$

$\therefore 4ப-2ம-24=0$;

$\therefore 2ப-ம-12=0$; .. .. (1)

இனி $ச(4)=2(4)^3+ப(4)^2+ம(4)-8$
$=2\times64+ப\times16+4ம-8$
$=128+16ப+4ம-8$
$=16ப+4ம+120$;

$க-4$ என்பது $ச(க)$ இன் காரணியாதலால், $ச(4)=0.$

$\therefore 16ப+4ம+120=0$;

$\therefore 4ப+ம+30=0$; .. .. (2)

(1) ஐயும் (2) ஐயுங் கூட்ட நாம் பெறுவது $6ப+18=0$;

$\therefore 6ப=-18$

$\therefore ப=-3.$

$ப=-3$ என (1) இற் பிரதியிடுக.

$\therefore 2\times-3-ம-12=0$;

$\therefore -6-ம-12-=0$;

$\therefore -ம-18=0$;

$\therefore -ம=18$;

$\therefore \left.\begin{array}{l} ம=-18 \\ ப=-3 \end{array}\right\}$ விடை.

உ—ம்.

4. $4க^3-8க^2+க+3$ என்பதை மீதித் தேற்றந் துணைக்கொண்டு காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

$ச(க)=4க^3-8க^2+க+3$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore ச(1)=4(1)^3-8(1)^2+1+3$
$=4-8+1+3$
$=0.$

$\therefore (க-1)$ என்பது $ச(க)$ என்பதனுடைய காரணிகளுள் ஒன்ருகும்.

$\therefore 4க^3-8க^2+ச+3$
$=4க^2(க-1)-4க(க-1)-3(க-1)$
$=(க-1)(4க^2-4க-3)$
$=(க-1)(2க+1)(2க-3).$

பயிற்சி 18 (ஆ)

பின்வரும் வகுத்தற் கணக்குக்களில் வருமீதிகளைக் காண்க :—

1. $2க^3-3க^2+3க+2\div க-1.$
2. $3க^3-2க^2+5\div க+1.$
3. $5க^4-3க^2-1\div க-2.$
4. $4க^4-3க^3+2க^2-க+5\div க+2.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. $8க^5 + 4க^2 - 1 \div 2க - 1$.

6. $27க^3 - 9க^2 + 3க + 1 \div 3க + 1$.

வகுத்தற் செய்கையை ஆளாது பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :—

7. $க + 1$ என்பது $3க^3 - க + 2$ என்பதற்குக் காரணி.

8. $2க - 1$ என்பது $8க^4 - 6க^2 + 1$ என்பதற்குக் காரணி.

9. $3க + 1$ என்பது $3க^2 - 5க - 2$ என்பதற்குக் காரணி.

10. $க - அ$ என்பது $க^4 - 3க^3அ + 3கஅ^2 - அ^3$ என்பதற்குக் காரணி.

11. $க + 2அ$ என்பது $க^5 - 4க^3அ^2 + க^2அ^3 + 4அ^5$ என்பதற்குக் காரணி.

12. $க^9 - ந^9$ என்பதை $க - ந$ என்பது வகுக்குமென நிறுவுக.

13. $க - 2$, $க + 2$ என்பன $3க^4 - க^3 - 16க^2 + 4க + 16$ என்பதற்குக் காரணிகளாகுமெனக் காட்டுக.

14. $6க^2 + க - 1$ என்பது $18க^4 - 3க^3 + 8க^2 + 3க - 2$ என்பதை வகுக்குமெனக் காட்டுக.

15. $2க^2 - 9க + 4$ என்பது $6க^4 + பக^3 + மக^2 - 4க + 4$ என்பதை வகுக்குமெனின், ப, ம என்பன என்ன பெறுமானங்களை ஏற்று நிற்கும் ?

16. $6க^2 + 5க - 6$ என்பது $24க^4 + 20க^3 - 30க^2 - அக - இ$ என்பதை வகுக்குமெனின், அ, இ என்பன என்ன பெறுமானங்களைப் பெறும் ?

17. அ உம் இ உம் எப் பெறுமானங்களைப் பெற்ருல் $2க^4 + 3க^3 + (அ + இ)க^2 - க + (அ + 1)$ என்பது $2க^2 + க - 6$ என்பதால் வகுக்கப்படும்.

18. $(அ + இ)$ என்பது $(அ + இ)^5 - அ^5 - இ^5$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள் ஒன்றென நிறுவுக.

19. $(ப - ம)$, $(ம - வ)$, $(வ - ப)$ என்பன $ப(ம - வ)^3 + ம(வ - ப)^3 + வ(ப - ம)^3$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளெனக் காட்டுக.

20. $(க - ந)(க + ந)^3 + (ந - ய)(ந + ய)^3 + (ய - க)(ய + க)^3$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள்ளே மூன்றைக் காண்க.

21. $அ(இ - உ)^5 + இ(உ - அ)^5 + உ(அ - இ)^5$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள்ளே மூன்றைக் காண்க.

22. $அ - இ$, $இ - உ$, $உ - அ$ என்பன $அ^3(இ - உ) + இ^3(உ - அ) + உ^3(அ - இ)$ என்னுங் கோவையினுடைய மூன்று காரணிகள் எனக் காட்டுக.

பின்வருங் கோவைகளைக் காரணிகளாய்ப் பிரிக்க :—

23. $க^3 - 7க + 6$.

24. $க^3 + 4க^2 - 4க - 16$.

25. $12க^3 + 20க^2 - 3க - 5$.

26. $30க^3 - க^2 - 6க + 1$.

27. $4க^3 - 13க - 6$.

28. $24க^3 - 2க^2ந - 5கந^2 + ந^3$.

29. $க^4 - 2க^3ந - 6கந^2 - 9ந^4$.

30. $36க^4 - 13க^2ந^2 + ந^4$.

31. $அஇ(அ - இ) + இஉ(இ - உ) + உஅ(உ - அ)$.

32. $அ(இ^2 - உ^2) + இ(உ^2 - அ^2) + உ(அ^2 - இ^2)$.

33. $க^2(ந - ய) + ந^2(ய - க) + ய^2(க - ந)$.

34. $(க + ந + ய)(கந + நய + யக) - கநய$.

35. $(அ - இ)^3 + (இ - உ)^3 + (உ - அ)^3$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 19

இருபடிச் சமன்பாடுகள்

112. ஒரு சமன்பாட்டிலுள்ள தேராக்கணியத்தினுடைய அடுக்குக்கள் இரண்டின்மேற்படாமல் இருந்தால், அது இருபடிச் சமன்பாடெனப்படும். அத்தகைய சமன்பாடுகளை அ$க^2$+இக+உ$=0$ என்னும் நியம வடிவத்தில் அமைக்கலாம். அவ்வடிவச் சமன்பாடுகளுடைய தீர்வுகளைக் காணுமுறையைப் பின்வரும் உதாரணங்கள் விளக்கும் :—

உ—ம்.

1. $4க^2-100=0$. இதனுடைய தீர்வுகளைக் காண்க.

இருபக்கங்களையும் 4 ஆல் வகுக்க நாம் பெறுவது

$க^2-25=0$;

$\therefore க^2=25$;

இருபக்கங்களுக்கும் வர்க்கமுலங்காண, நாம் பெறுவன

$\pm க=\pm 5$;

இது $+க=+5$, $-க=-$ந, $+க=-5$, $-க=+5$ என்னும் நான்கு சமன்பாடுகளைத் தரும். இவற்றுள் $+க=+5$ என்பதும் $-க=-5$ என்பதும் $க=5$ என்னும் ஒரு தீர்வையையும், $+க=-5$ என்பதும் $-க=+5$ என்பதும் $க=-5$ என்னும் ஒரு தீர்வையையுந் தரும்.

ஆகையால், $\pm க=\pm 5$ என்று எழுதாது

$க=\pm 5$ என்று எழுதுதலே முறையாகும்.

$+5, -5$ என்பனவே வேண்டிய மூலங்களாகும்.

உ—ம்.

2. $(க-2)^2=3$ இதனைத் தீர்க்க.

இருபக்கங்களுக்கும் வர்க்க மூலங் காண்க.

$\therefore க-2=\pm\sqrt{3}$;

$\therefore க=2\pm\sqrt{3}$.

$\therefore 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$ என்பனவே வேண்டிய மூலங்களாகும்.

இங்கு, $2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$ என்பன விகிதமுறு மூலங்களெனப்படும்.

உறுப்பு மூன்றுமுள்ள இருபடிச் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களைக் காண்பதற்கு நாலு முறைகள் ஆளப்படும். அவை (1) காரணி முறை, (2) நிறைவர்க்க முறை, (3) சூத்திர முறை, (4) வரைப்பட முறை என்பனவாகும். இவற்றுள் வரைப்படமுறை அடுத்த அத்தியாயத்திற் கூறப்படும்.

113. காரணிமுறை : இம்முறை பின்வரும் உண்மையைச் சார்ந்து நிற்கின்றது. முடிவில் அல்லாத ஈரெண்களின் பெருக்கம் 0 ஆயின், அவ்வெண்களுள் ஒன்ருயினும் 0 ஆகும்.

உ—ம்.

1. $க^2-7க+12=0$. இதனைத் தீர்க்க.

$க^2-7க+12=0$;

$\therefore (க-3)(க-4)=0$;

$\therefore க-3=0$, அல்லது $க-4=0$;

$\therefore க=3,\ க=4$ என்பனவே வேண்டிய மூலங்களாகும்.

உ—ம்.

2. $\dfrac{3}{க-1}-\dfrac{2}{க+3}=\dfrac{6}{க}$. இதனைத் தீர்க்க.

$$\therefore \frac{3(க+3)-2(க-1)}{(க-1)(க+3)}=\frac{6}{க};$$

$$\therefore \frac{3க+9-2க+2}{க^2+2க-3}=\frac{6}{க};$$

$$\therefore \frac{க+11}{க^2+2க-3}=\frac{6}{க};$$

$$\therefore 6(க^2+2க-3)=க(க+11);$$

$$\therefore 6க^2+12க-18=க^2+11க;$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore 5க^2 + க - 18 = 0$;

$(5க - 9)(க + 2) = 0$;

$\therefore 5க - 9 = 0$, அல்லது $க + 2 = 0$;

$\therefore க = \frac{9}{5}$, $க = -2$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகளாகும்.

உ—ம்.

3. $க^2 - (அ + இ)க + அஇ = 0$. இதனைத் தீர்க்க.

$\therefore (க - அ)(க - இ) = 0$;

$\therefore க - அ = 0$, அல்லது $க - இ = 0$;

$\therefore க = அ$, $க = இ$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 19 (அ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களை எழுதுக:—

1. $(க - 2)(க - 3) = 0$.
2. $(க + 3)(க + 4) = 0$.
3. $(க + 5)(க - 6) = 0$.
4. $(க - 4)(க + 7) = 0$.
5. $(1 - க)(1 + க) = 0$.
6. $(1 - க)(க - 3) = 0$.
7. $(2க + 1)(க - 3) = 0$.
8. $(2க - 1)(3க + 1) = 0$.
9. $(3க - 4)(5க + 4) = 0$.
10. $(5க - 1)(3க + 2) = 0$.
11. $(3க - 4)(3க + 5) = 0$.
12. $(5க - 2)(5க - 3) = 0$.
13. $(2க - 3)(2க - 5) = 0$.
14. $(2க - 7)^2 = 0$.
15. $(\frac{க}{2} + 3)(3க + \frac{5}{2}) = 0$.
16. $(\frac{க}{2} - 3)(3க - \frac{7}{2}) = 0$.
17. $(க - அ)(க - \overline{அ - 1}) = 0$.

18. $(க + அ)(க - \overline{அ + 1}) = 0$.
19. $(அக - இ)(அக + இ\overline{அ - 1}) = 0$.
20. $(அக + இ)(அக - இ\overline{அ + 1}) = 0$.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :—

21. $க^2 - 8க + 15 = 0$.
22. $க^2 + 14க + 45 = 0$.
23. $க^2 - க - 6 = 0$.
24. $க^2 + 2க - 63 = 0$.
25. $2க^2 - 7க + 5 = 0$.
26. $2க^2 + 3க - 5 = 0$.
27. $10க^2 + 29க + 10 = 0$.
28. $14க^2 - 53க + 14 = 0$.
29. $12க^2 - 25க + 12 = 0$.
30. $12க^2 + 7க - 12 = 0$.
31. $2 + 5க - 25க^2 = 0$.
32. $6 + 5க - 25க^2 = 0$.
33. $49க^2 - 42க + 9 = 0$.
34. $25க^2 + 20க + 4 = 0$.
35. $6க^2 - 13க + 7 = 0$.
36. $10க^2 + க - 9 = 0$.
37. $க + 6(க^2 - 2) = 0$.
38. $2(6க^2 + 1) - 11க = 0$.
39. $20க^2 = 6 - 7க$.
40. $19க + 4 = 30க^2$.
41. $2(க - 1)^2 + 3(க - 1) + 1 = 0$.
42. $12(க + 1)^2 - 5(க + 1) - 3 = 0$.
43. $6(2க - 1)^2 + 5(2க - 1) - 6 = 0$.
44. $12(3க - 1)^2 - (3க - 1) - 20 = 0$.
45. $\frac{4க}{1 + 2க} - \frac{1}{1 - 4க^2} + 1 = 0$.
46. $\frac{3}{க - 1} - \frac{2}{க + 2} = \frac{க}{5}$.
47. $க^2 - (3 - அ)க = 3அ$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

48. $\frac{\text{க}}{3}+\frac{3}{\text{க}}=2.$

49. $\text{க}^2-\overline{2\text{அ}-1}.\text{க}+\text{அ}(\text{அ}-1)=0.$

50. $\text{க}^2-\text{க}-\text{அ}(\text{அ}-1)=0.$

114. நிறைவர்க்க முறை: இருபடிச் சமன்பாடுகளிலுள்ள இருபடிச் கோவைகள் காரணிகளாக இலேசாகப் பிரிக்கப் படாவாயின், இம்முறையே ஆளப்படும். இம்முறையில் க இல் உள்ள எல்லாவுறுப்புக்களையும் இடப்பக்கத்திற்கும் ஏனையவுறுப்புக்களை வலப்பக்கத்திற்குமாக மாற்றி க^2 என்பதன் குணகத்தால் இருபக்கங்களையும் வகுத்து 75 ஆம் பிரிவிற் கூறியபடி இடப்பக்கத்தை நிறைவர்க்க மாக்க வேண்டும். பின் இருபக்கங்களுக்கும் வர்க்கமூலங் காண வரும் ஒருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

உ—ம்.

1. $3\text{க}^2=4\text{க}+2$. இதனுடைய மூலங்களை இருதசமதானங் களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$$3\text{க}^2=4\text{க}+2\ ;$$
$$\therefore 3\text{க}^2-4\text{க}=2\ ;$$
$$\therefore \text{க}^2-\tfrac{4}{3}\text{க}=\tfrac{2}{3}\ ;$$
$$\therefore \text{க}^2-\tfrac{4}{3}\text{க}+(\tfrac{2}{3})^2=\tfrac{2}{3}+(\tfrac{2}{3})^2\ ;$$
$$\therefore (\text{க}-\tfrac{2}{3})^2=\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{9}$$
$$=\frac{10}{9}\ ;$$
$$\therefore \text{க}-\tfrac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}\ ;$$
$$\therefore \text{க}=\tfrac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$$

$$=\frac{2+\sqrt{10}}{3},\ \text{அல்லது}\ \frac{2-\sqrt{10}}{3}$$

$=1\cdot72$, அல்லது $\cdot39$. (இரு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமானவை).

உ—ம்.

2. $\frac{1}{\text{க}-3}-\frac{1}{\text{க}-2}=\tfrac{2}{3}$. இதனைத் தீர்க்க.

$$\therefore \frac{(\text{க}-2)-(\text{க}-3)}{(\text{க}-3)(\text{க}-2)}=\tfrac{2}{3}\ ;$$
$$\therefore \frac{\text{க}-2-\text{க}+3}{\text{க}^2-5\text{க}+6}=\tfrac{2}{3}\ ;$$
$$\therefore \frac{1}{\text{க}^2-5\text{க}+6}=\tfrac{2}{3}\ ;$$
$$\therefore 2(\text{க}^2-5\text{க}+6)=3\times1\ ;$$
$$\therefore 2\text{க}^2-10\text{க}+12=3\ ;$$
$$\therefore 2\text{க}^2-10\text{க}=-9\ ;$$
$$\therefore \text{க}^2-5\text{க}=-\tfrac{9}{2}\ ;$$
$$\therefore \text{க}^2-5\text{க}+(\tfrac{5}{2})^2=(\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{9}{2}$$
$$=\frac{25}{4}-\frac{9}{2}$$
$$=\frac{7}{4}.$$
$$\therefore (\text{க}-\tfrac{5}{2})^2=\tfrac{7}{4}\ ;$$
$$\therefore \text{க}-\tfrac{5}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\ ;$$
$$\therefore \text{க}=\tfrac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\ ;$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$
$$=\frac{5+\sqrt{7}}{2},\ \text{அல்லது}\ \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$=\frac{5+2\cdot645}{2}, \text{ அல்லது } \frac{5-2\cdot645}{2}$$

$$=\frac{7\cdot645}{2}, \text{ அல்லது } \frac{2\cdot355}{2}$$

$=3\cdot83$, அல்லது $1\cdot18$ (இருதசமதானங்களுக்குத் திருத்தமானவை.)

115. செவ்விய எண்வடிவத்திற் காட்ட முடியாத மூலங்கள் விகிதமுருக் கணியங்களெனப்படும். ஏனையவை விகிதமுறு கணியங்களெனப்படும்.

$\sqrt{10}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{-6}$, $\sqrt{-1}$ என்பன விகிதமுருக் கணியங்களுக்கு உதாரணங்களாகும்.

விகிதமுறுகணியங்கள் எப்பொழுதும் மெய்யானவை. விகிதமுருக்கணியம் மெய்யாய் இருக்கலாம்; அன்றிக் கற்பனையாய் இருக்கலாம்.

$\sqrt{10}$, $\sqrt{7}$ என்பன மெய்யானவை. $\sqrt{-6}$, $\sqrt{-1}$ என்பன எதிரெண்களுடைய வர்க்க மூலங்களைக் குறித்தலாற் கற்பனைக் கணியங்கள்.

பயிற்சி 19 (ஆ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளை நிறைவர்க்க முறைபற்றித் தீர்க்க :—

1. $க^2-20க+96=0.$
2. $க^2-11க-80=0.$
3. $க^2-க-132=0.$
4. $க^2=6(க+12).$
5. $2க^2=110-9க.$
6. $3க^2=156-23க.$
7. $23க=14-30க^2.$
8. $42=85க-42க^2.$
9. $3க(9க+1)=2.$
10. $3க(9க-2)=5.$

11. $72க+\frac{25}{க}-90=0.$
12. $க^2=\frac{9}{10}(1-க).$
13. $\frac{3க}{5}+\frac{5}{3க}=2.$
14. $\frac{க+2}{3க+8}=\frac{க-5}{5க+2}.$
15. $(2க-2)(3க+2)=16.$
16. $(3க-5)(க+2)+8=0.$
17. $9க(4க-3)=13.$
18. $(7க-5)(7க-6)=56.$
19. $\frac{க-1}{2க-1}-\frac{க+1}{2க+1}=\frac{6}{35}.$
20. $\frac{1}{க-1}+\frac{3}{க-2}=\frac{3}{2க}.$
21. $\frac{1}{3க-1}+\frac{1}{3க-2}=-\frac{24}{35}.$
22. $\frac{1}{3-க}-\frac{1}{4-க}=\frac{1}{20}.$
23. $\frac{6}{6-க}-\frac{5}{5-க}=\frac{1}{42}.$
24. $\frac{1}{க+4}-\frac{1}{க-6}=\frac{5}{8}.$
25. $க+\frac{2அ^2}{க}=3அ.$
26. $அ=\frac{2அ^2}{க}-க.$

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாக நிறைவர்க்கமுறைபற்றிக் காண்க :—

27. $க^2+க-1=0.$
28. $2க^2+3க-3=0.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

29. $4\text{க}^2 - 2\text{க} - 3 = 0.$

30. $2\text{க}^2 - 8\text{க} + 3 = 0.$

31. $5\text{க}^2 - \text{க} = 1.$

32. $6\text{க}^2 - 2\text{க} = 1.$

33. $7\text{க}^2 = 3\text{க} + 1.$

34. $5(\text{க}^2 - 1) = 8\text{க}.$

35. $4(\text{க}^2 - 1) = 3\text{க}.$

36. $(\text{க} - 1)(\text{க} - 2) = 5.$

37. $(1 - 3\text{க})(1 - 2\text{க}) = 6.$

38. $(3 - 2\text{க})(2 - 3\text{க}) = 7.$

39. $2\text{க} - \frac{2}{\text{க}} = 1.$

40. $3\text{க} - \frac{3}{\text{க}} = 1.$

41. $\frac{1}{\text{க}+1} + \frac{2}{\text{க}+2} = \frac{3}{2}.$

42. $\frac{2}{2\text{க}-1} - \frac{3}{3\text{க}-1} = \frac{1}{8}.$

116. சூத்திர முறை : $\text{அ}\text{க}^2 + \text{இ}\text{க} + \text{உ} = 0$ என்னும் நியம வடிவச் சமன்பாட்டினுடைய மூலங்களை நிறைவர்க்க முறைபற்றிக் காண்போம்.

$$\text{அ}\text{க}^2 + \text{இ}\text{க} + \text{உ} = 0 \;;$$

$$\therefore\ \text{அ}\text{க}^2 + \text{இ}\text{க} = -\text{உ} \;;$$

$$\therefore\ \text{க}^2 + \frac{\text{இ}}{\text{அ}}\text{க} = -\frac{\text{உ}}{\text{அ}} \;;$$

$$\therefore\ \text{க}^2 + \frac{\text{இ}}{\text{அ}}\text{க} + \left(\frac{\text{இ}}{2\text{அ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{இ}}{2\text{அ}}\right)^2 - \frac{\text{உ}}{\text{அ}}$$

$$= \frac{\text{இ}^2}{4\text{அ}^2} - \frac{\text{உ}}{\text{அ}}$$

$$= \frac{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}{4\text{அ}^2};$$

$$\therefore\ \left(\text{க} + \frac{\text{இ}}{2\text{அ}}\right)^2 = \frac{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}{4\text{அ}^2} \;;$$

$$\therefore\ \text{க} + \frac{\text{இ}}{2\text{அ}} = \pm\frac{\sqrt{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}}{2\text{அ}} \;;$$

$$\therefore\ \text{க} = -\frac{\text{இ}}{2\text{அ}} \pm \frac{\sqrt{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}}{2\text{அ}}$$

$$= \frac{-\text{இ} \pm \sqrt{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}}{2\text{அ}}$$

இதிலிருந்து ஒரு பொதுச் சூத்திரத்தைப் பெறலாம் :—

அ, இ, உ என்பன எப்பெறுமானங்களைப் பெற்றாலும் $\text{அ}\text{க}^2 + \text{இ}\text{க} + \text{உ} = 0$ ஆயின், $\text{க} = \frac{-\text{இ} \pm \sqrt{\text{இ}^2 - 4\text{அ}\text{உ}}}{2\text{அ}}$

இச் சூத்திரத்தைத் துணைக் கொண்டு இருபடிச்சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றிற்கும் மூலங்கள் காணலாம் :—

உ—ம்.

1. $3\text{க}^2 = 5\text{க} - 2.$ இதனைச் சூத்திரமுறைபற்றித் தீர்க்க.

$$3\text{க}^2 = 5\text{க} - 2 \;;$$

$$\therefore\ 3\text{க}^2 - 5\text{க} + 2 = 0 \;;$$

இங்கு $\text{அ} = 3,\ \text{இ} = -5,\ \text{உ} = 2.$

$$\therefore\ \text{க} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2 \times 3}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$= \frac{6}{6},\ \text{அல்லது}\ \frac{4}{6}$$

$$= 1,\ \text{அல்லது}\ \frac{2}{3}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

2. $2க^2 - 2க + 1 = 0$. இதனைச் சூத்திரமுறைபற்றித் தீர்க்க.

இங்கு அ$=2$, இ$=-2$, உ$=1$.

$$\therefore க = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(1)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4}$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 \times (-1)}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{4}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{2}.$$

இங்கு க இனுடைய மூலங்கள் கற்பனைக் கணியங்களாதலறிக.

பயிற்சி 19 (இ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைச் சூத்திரமுறைப்பற்றித் தீர்க்க:—

1. $12க^2 + 13க - 14 = 0$.
2. $20க^2 + 39க + 7 = 0$.
3. $5க^2 - 14க - 3 = 0$.
4. $10க^2 - 11க - 6 = 0$.
5. $10க^2 + 19க + 6 = 0$.
6. $க^2 - க - 72 = 0$.
7. $21க = 10(1 - க^2)$.
8. $11க = 4(1 - 5க^2)$.
9. $110(க^2 - 1) = 21க$.
10. $42(க^2 - 1) = 13க$.
11. $க(க - 1) = 156$.

12. $2க(2க - 1) = 72$.
13. $9க - \frac{56}{க} = 3$.
14. $25க - \frac{12}{க} = 5$.
15. $\left(1 - \frac{1}{க}\right)\left(2 - \frac{1}{க}\right) = 6$.
16. $\left(2 - \frac{3}{க}\right)\left(3 - \frac{2}{க}\right) = 14$.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளுடைய மூலங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாய்ச் சூத்திர முறை பற்றிக் காண்க :—

17. $க^2 - க - 1 = 0$.
18. $க^2 + 3க - 2 = 0$.
19. $10க^2 - 2க = 1$.
20. $5க^2 - 4க = 2$.
21. $3க^2 - 5க = 3$.
22. $2க^2 - 5க = 9$.
23. $3(க^2 - 1) = 4க$.
24. $4(க^2 - 1) = 5க$.
25. $(1 - 3க)(1 - 4க) = 5$.
26. $(2 - 3க)(1 + 4க) = 1$.
27. $5க - \frac{6}{க} = 5$.
28. $6க - \frac{7}{க} = 6$.
29. $\frac{2}{2க - 1} - \frac{1}{2க + 1} = \frac{2}{3}$.
30. $\frac{3}{3க - 1} - \frac{2}{3க + 1} = \frac{1}{3}$.

117. இரண்டின் மேற்பட்ட படிகளையுடைய சமன்பாடுகள் சிலவற்றைக் காரணி முறையாலே தீர்க்கலாம் :—

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

1. $க^4 - 13க^2 + 36 = 0$. இதனைத் தீர்க்க.

$க^4 - 13க^2 + 36 = 0$;

$\therefore (க^2 - 4)(க^2 - 9) = 0$;

$\therefore க^2 = 4$, அல்லது 9 ;

$\therefore க = \pm 2$, அல்லது ± 3.

உ—ம்.

2. $க^3 - 3க + 2 = 0$. இதனுடைய மூலங்களைக் காண்க.

இடப்பக்கத்துக் கோவையில், $க = 1$ எனப் பிரதியிடக் கோவையின் பெறுமானம் 0 ஆகின்றது.

$\therefore க - 1$ என்பது அதனுடைய காரணிகளுள் ஒன்ருகும்.

$\therefore க^2(க - 1) + க(க - 1) - 2(க - 1) = 0$;

$\therefore (க - 1)(க^2 + க - 2) = 0$;

$\therefore (க - 1)(க - 1)(க + 2) = 0$;

$\therefore க = 1$, அல்லது -2.

உ—ம்.

3. $க^2 - 4க - \dfrac{36}{க^2 - 4க} = 9$. இதனுடைய மூலங்களைக் காண்க.

$க^2 - 4க = ந$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore ந - \dfrac{36}{ந} = 9$;

இருபக்கங்களையும் ந ஆற் பெருக்குக.

$\therefore ந^2 - 36 = 9ந$.

$\therefore ந^2 - 9ந - 36 = 0$.

$\therefore (ந + 3)(ந - 12) = 0$.

$ந = க^2 - 4க$ எனப் பிரதியிடுக.

$\therefore (க^2 - 4க + 3)(க^2 - 4க - 12) = 0$;

$\therefore (க - 1)(க - 3)(க + 2)(க - 6) = 0$;

$\therefore க = 1,\ 3,\ -2$, அல்லது 6.

பயிற்சி 19 (ஈ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க :—

1. $க(க - 1)(க + 2) = 0$.
2. $(க - 2)(க + 3)(க - 4) = 0$.
3. $(2க - 1)(3க + 1)(4க - 1) = 0$.
4. $(3க + 2)(2க - 3)(க - 5) = 0$.
5. $க(க^2 + 5க + 6) = 0$.
6. $க^3 - க = 0$.
7. $க^3 + 3க^2 - 10க - 24 = 0$.
8. $12க^3 - 16க^2 - 7க + 6 = 0$.
9. $க^4 - 34க^2 + 225 = 0$.
10. $க^4 - 10க^2 + 9 = 0$.
11. $க^4 - 25க^2 + 144 = 0$.
12. $க^4 - 17க^2 + 16 = 0$.
13. $16\left(க^2 + \dfrac{1}{க^2}\right) = 257$.
14. $4\left(க^2 + \dfrac{1}{க^2}\right) = 17$.
15. $9\left(க^2 + \dfrac{1}{க^2}\right) = 82$.
16. $4க^2 + \dfrac{1}{க^2} = 5$.
17. $க^2 + \dfrac{அ^2}{க^2} = அ^2 + 1$.
18. $க^2 + \dfrac{அ^2இ^2}{க^2} = அ^2 + இ^2$.
19. $(க^2 + க)^2 + 240 = 32(க^2 + க)$.
20. $(க^2 - க)^2 + 72 = 18(க^2 - க)$.
21. $(க^2 - 4)^2 = 2(க^2 - 4) + 15$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

22. $(க^2+4)^2=13(க^2+4)-40$.

23. $க(க-5)-\frac{24}{க(க-5)}=2$.

24. $க^2-6க-\frac{112}{க(க-6)}=9$.

25. $க(க-3அ)-\frac{20அ^4}{க^2-3அக}=8அ^2$

26. $க^2+3அக+\frac{72அ^4}{க(க+3அ)}=22$.

அத்தியாயம் 20

இருபடிச் சமன்பாட்டு உத்திக்கணக்குக்கள்

118. இங்கு காணப்படும் உத்திக் கணக்குக்கள் இருபடிச் சமன்பாடுகளைத்தரும். ஒவ்வோர் இருபடிச் சமன்பாட்டிற்கும் இரு மூலங்கள் உண்டு. எனினும், அம் மூலங்கள் இரண்டும் செய்முறையளவிலே தந்த கணக்குக்களுக்குத் தீர்வுகளாகும் என்னும் நியதியில்லை. ஒன்றே பொருந்தினுல் அதனை ஏற்றுக் கொண்டு மற்றையதைத் தள்ள வேண்டும். இரண்டும் பொருந்தினுல் அவ்விரண்டையுங் கொள்ளலாம்.

உ—ம்.

1. அடுத்துவரும் இரண்டு இயற்கை எண்களுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 85 ஆயின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

அவ்வியற்கையெண்களிற் குறைந்தது க எனக் கொள்வோம் ;

ஆயின், கூடியது $(க+1)$ ஆகும் ;

∴ அவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $க^2+(க+1)^2$;

∴ கணக்கின்படி, $க^2+(க+1)^2=85$;

$\therefore க^2+க^2+2க+1=85$;

$\therefore 2க^2+2க-84=0$;

$\therefore க^2+க-42=0$;

$\therefore (க-6)(க+7)=0$;

$\therefore க=6$, அல்லது -7.

-7 என்பது இயற்கையெண்ணுகாமையின், பொருந்தாதெனத் தள்ளலாம்.

தள்ள, $க=6$ என்னு மூலமே கொள்ளப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore$ க $+1=6+1$
$=7$

$\therefore$ வேண்டிய இயற்கையெண்கள் 6,7 என்பனவாகும்.

உ—ம்.

2. ஒரு செவ்வக வயலின் சுற்றளவு 80 யார். அதன் பரப்பளவு 375 சதுர யாராயின், வயலினுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

அவ்வயலினது நீளம் க யார் ஆகுக;
அதன் சுற்றளவு 80 யார் ஆனமையின், அதன் அரைச் சுற்றளவு 40 யார் ஆகும்;
$\therefore$ அதன் அகலம் 40 $-$ க யார்;
$\therefore$ அதன் பரப்பளவு க(40 $-$ க) சதுர யார்;
$\therefore$ கணக்கின்படி, க(40 $-$ க) $=375$;
$\therefore$ 40க $-$ க$^2=375$;
$\therefore$ க$^2-40$க$+375=0$;
$\therefore$ (க -15)(க -25) $=0$;
$\therefore$ க $=15$, அல்லது 25.
$\therefore$ 40 $-$ க $=25$, அல்லது 15.
$\therefore$ அவ்வயலினுடைய நீளம் 25 அடி; அகலம் 15 அடி.

பயிற்சி 20 (அ)

1. ஒரெண்ணின் வர்க்கம் அவ்வெண்ணின் 9 மடங்கிலும் 18 ஆற் குறைவு. அவ்வெண் யாது?

2. ஒரியற்கை யெண்ணின் வர்க்கம் அவ்வெண்ணின் 9 மடங்கிலும் 252 ஆற் கூடியது. அவ்வெண் யாது?

3. அடுத்துவரும் இரண்டு இயற்கையெண்களின் பெருக்கம் 420 ஆயின், அவ்வெண்கள் யாவை?

4. அடுத்து வரும் இரண்டு ஒற்றையெண்களின் பெருக்கம் 483 ஆயின், அவ்வெண்கள் யாவை?

5. அடுத்துவரும் இரண்டு ஒற்றையெண்களுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 290 ஆயின், அவ்வெண்கள் யாவை?

6. அடுத்துவரும் இரண்டு இரட்டையெண்களுடைய வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் 44 ஆயின், அவ்வெண்கள் யாவை?

7. ஒரெண்ணின் வர்க்கம் அதன் $\frac{3}{4}$ இன் வர்க்கத்திலும் 63 ஆற் கூடியது. அவ்வெண் யாது?

8. ஒரெண்ணின் பத்தினிடத்து இலக்கம் ஒன்றினிடத்து இலக்கத்தின் வர்க்கமாகும். அவ்விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 12 ஆயின், அவ்வெண்ணைக் காண்க.

9. ஒரு செவ்வக முற்றத்தினுடைய அடுத்துள பக்கங்களின் வித்தியாசம் 8 யார். அதன் பரப்பளவு 768 சதுர யார் ஆயின், அதனுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

10. ஒரு செவ்வகத் தோட்டத்தின் சுற்றளவு 160 யார். அதன் பரப்பளவு 1536 சதுர யார். அதனுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

11. ஒரு சதுரத்தினுடைய ஒரு பக்கத்தை 3 அடியாற் கூட்டியும் ஒரு பக்கத்தை 4 அடியாற் குறைத்தும் நிற்கவருஞ் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அச்சதுரத்தின் பரப்பளவின் $\frac{1}{2}$ ஆயின், அச்சதுரம் என்ன அளவு கொண்ட பக்கங்களை உடையது?

12. ஒரு செவ்வகத்தின் மூலைவிட்டம் 15 அடி நீளமுடையது. அதன் பரப்பளவு 108 சதுரவடி. அதனுடைய பக்கங்கள் என்ன அளவின?

13. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் செம்பக்கம் 10 அங்குல நீளமானது. அதன் பரப்பளவு 24 சதுரவங்குலம். அதனுடைய பக்கங்கள் என்ன அளவின?

14. ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தினுடைய இரு பக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 28 சதம மீற்றர். அதன் பரப்பளவு 96 சதுரச் சதம மீற்றர். அதன் செம்பக்கத்தினது நீளத்தைக் காண்க.

15. 5 அங்குல நீளமுள்ள நேர் கோடொன்று இரு கூறாக்கப்படும்பொழுது, அவ்விரு கூறுகளாலாய செவ்வகம் அவ்விரு கூறுகளையும் பக்கங்களாகவுள்ள சதுரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமனுகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அக்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கூறுகளுடைய நீளங்களை 2 தசம தானத்திற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

16. 12 அங்குல நீளமுள்ள நேர் கோடொன்று இரு கூறாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அக் கூறுகளாலாய செவ்வகத்தினுடைய இருமடங்கு அக் கூறுகளினுடைய $\frac{1}{2}$ பங்குகளிலுள்ள சதுரங்களின் வித்தியாசத்திற்குச் சமனாயின், அக் கூறுகள் என்ன அளவின என்பதை 2 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

17. ஒரு சதுரத்தினுடைய ஒரு பக்கத்தை 16 அடியாற் கூட்டியும் ஒரு பக்கத்தை 2 அடியாற் கூட்டியும் நிற்க வருஞ் செவ்வகத்தின் பரப்பளவு அச்சதுரத்தின் இருமடங்காயின், அச்சதுரத்தினுடைய பக்கங்கள் என்ன அளவின என்பதை 2 தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

18. முதல் இ இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}$இ(இ + 1). எத்தனை எண்கள் சேர்ந்தாற் கூட்டுத் தொகை 210 ஆகும்.

19. வானோக்கி எறிந்த கல்லொன்று இ செக்கனில் 60இ − 16இ^2 அடி உயரத்திற்குச் செல்லுமாயின், 54 அடி உயரஞ் செல்ல எத்தனை செக்கன் எடுக்கும்?

20. இ பக்கங்கள் கொண்ட வடிவமொன்று $\frac{1}{2}$இ(இ − 3) மூலை விட்டங்கள் கொண்டுள்ளது. 230 மூலை விட்டங்கள் கொண்டுள்ள வடிவமொன்றுக்கு எத்தனை பக்கங்கள் உண்டு?

21. $\frac{1}{3}$(4க − 1)(க + 1), $\frac{1}{2}$(க + 2)(3க − 4) என்பன அடுத்து வரும் இயற்கை யெண்களாயின், அவை யாவை?

119. முற்பிரிவில் இருபடிச் சமன்பாடுகள் எண்கணிதத்திற்குங் கேந்திரகணிதத்திற்கும் பயன்படும் விதத்தைக் காட்டியுள்ளோம். இனிப் பிற இடங்களில் அவை பயன்படுமாற்றை விளக்குவோம் :—

உ—ம்.

1. ஒரு பிரயாணி ஒரு குறித்த நேரத்தில் 50 மைல் தூரஞ் சென்றனன். மணிக்கு ஒரு மைல் வீதந் தன்

வேகத்தைக் கூட்டினனாயின், $2\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்கு முன்னர்த் தான் குறித்த இடத்தை அடைவான். அவன் எத்தனை மணி நேரத்தில் அப்பிரயாணத்தைச் செய்து முடித்தான்?

அப்பிரயாணி நடந்த வேகம் மணிக்கு க மைல் வீதமெனக் கொள்வோம்; மணிக்கு க மைல் வீதம் 50 மைல் செல்ல அவன் எடுத்த நேரம் $\frac{50}{க}$ மணி நேரமாகும்;

∴ மணிக்கு க + 1 மைல் வீதம் 50 மைல் செல்ல, அவன் எடுக்கும் நேரம் $\frac{50}{க+1}$ மணி நேரமாகும்.

இவற்றின் வித்தியாசம் $\frac{50}{க} - \frac{50}{க+1}$ மணி நேரமாகும்;

∴ கணக்கின்படி, $\frac{50}{க} - \frac{50}{க+1} = 2\frac{1}{2}$;

$$\therefore \frac{50(க+1) - 50க}{க(க+1)} = \frac{5}{2};$$

$$\therefore \frac{50க + 50 - 50க}{க(க+1)} = \frac{5}{2};$$

$$\therefore \frac{50}{க^2 + க} = \frac{5}{2};$$

$$\therefore 5(க^2 + க) = 2 \times 50;$$

$$\therefore க^2 + க = 20;$$

$$\therefore க^2 + க - 20 = 0;$$

$$\therefore (க - 4)(க + 5) = 0;$$

$$\therefore க = 4, \text{ அல்லது } -5.$$

வேகம் மணிக்கு − 5 மைல் வீதமென்பது தந்த கணக்குக்குப் பொருந்தாதாகையால், க = − 5 என்பதைத் தள்ளலாம்.

∴ க = 4 என்பதே கொள்ளப்படும்.

$$\therefore \frac{50}{க} = \frac{50}{4} = 12\frac{1}{2}.$$

∴ அவன் எடுத்தது $12\frac{1}{2}$ மணி நேரமாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

2. ஒரு மனிதன் ஒரு பொருளை 24 ரூபாவாக விற்கக் கொள்விலையின் ரூபாத் தொகையளவினதாகிய நூற்று வீதம் நட்ட மடைந்தான். அப்பொருளின் கொள்விலை என்ன ?

அப்பொருளின் கொள்விலை க ரூபா ஆகுக ;

∴ அவனது நட்டம் $\text{க} - 24$ ரூபா ;

கணக்கின்படி, இது கொள்விலையின் க% ;

$\therefore \text{க} - 24 = \text{க}$ இன் க%

$$= \text{க} \times \frac{\text{க}}{100}$$

$$= \frac{\text{க}^2}{100} ;$$

$\therefore 100\text{க} - 2400 = \text{க}^2$;

$\therefore \text{க}^2 - 100\text{க} + 2400 = 0$;

$\therefore (\text{க} - 40)(\text{க} - 60) = 0$;

$\therefore \text{க} = 40$, அல்லது 60.

∴ அப்பொருளின் கொள்விலை ரூபா 40, அல்லது ரூபா 60.

உ—ம்.

3. இரு நீர்நிரப்பிகளுள் ஒன்று மற்றையதிலும் 10 மணி நேரங் குறைவாகவும் இரண்டிலும் $1\frac{1}{4}$ மணிநேரங் கூடுதலாகவும் ஒரு நீர்தாங்கியை நிரப்புமெனின், அந் நிரப்பிகள் அந் நீர்தாங்கியைத் தனித்தனி எத்தனை மணி நேரத்திலே நிரப்பும் ?

ஒரு நீர்நிரப்பி ஒரு நீர்தாங்கியை க மணி நேரத்திலே நிரப்புமெனக் கொள்வோம் ;

∴ மற்றை நீர்நிரப்பி அந் நீர்தாங்கியை $\text{க} + 10$ மணி நேரத்திலே நிரப்பும் ;

∴ முதலாம் நீர்நிரப்பி ஒரு மணி நேரத்திலே நிரப்புவது நீர்தாங்கியின் $\frac{1}{\text{க}}$;

∴ இரண்டாம் .. .. $\frac{1}{\text{க} + 10}$;

∴ இரு நீர்நிரப்பிகளுஞ் சேர்ந்து .. .. .. $\frac{1}{\text{க}} + \frac{1}{\text{க} + 10}$

$$= \frac{2\text{க} + 10}{\text{க}(\text{க} + 10)} ;$$

∴ இரு நீர்நிரப்பிகளுஞ் சேர்ந்து அந்நீர்தாங்கியை $\frac{\text{க}(\text{க} + 10)}{2\text{க} + 10}$ மணிநேரத்திலே நிரப்பும் ;

கணக்கின்படி, இது க மணிநேரத்திலும் $1\frac{1}{4}$ மணிநேரத் தாற் குறைவு ;

$$\therefore \text{க} - \frac{\text{க}(\text{க} + 10)}{2\text{க} + 10} = 1\frac{1}{4} ;$$

$$\therefore \frac{\text{க}(2\text{க} + 10) - \text{க}(\text{க} + 10)}{2\text{க} + 10} = \frac{5}{4} ;$$

$$\therefore \frac{2\text{க}^2 + 10\text{க} - \text{க}^2 - 10\text{க}}{2\text{க} + 10} = \frac{5}{4} ;$$

$$\therefore \frac{\text{க}^2}{2\text{க} + 10} = \frac{5}{4} ;$$

$\therefore 4\text{க}^2 = 5(2\text{க} + 10)$

$= 10\text{க} + 50$;

$\therefore 4\text{க}^2 - 10\text{க} - 50 = 0$;

$\therefore 2\text{க}^2 - 5\text{க} - 25 = 0$;

$\therefore (\text{க} - 5)(2\text{க} + 5) = 0$;

$\therefore \text{க} = 5$, அல்லது $-\frac{5}{2}$.

$-\frac{5}{2}$ மணிநேரம் என்பது கணக்கொடு பொருந்தாதாகையால், $\text{க} = -\frac{5}{2}$ என்பதைத் தள்ளலாம்.

∴ க = 5 என்பதே கொள்ளப்படும்.

$\therefore \text{க} + 10 = 15$.

∴ முதலாம் நீர்நிரப்பி 5 மணிநேரத்திலும், மற்றையது 15 மணிநேரத்திலும் அந்நீர்தாங்கியை நிரப்பும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 20 (ஆ)

1. ஒரு தொகை பிள்ளைகளுக்கு 144 ரூபாவைச் சமனுகப் பகுத்துக் கொடுத்தேன். பிள்ளைகளுடைய தொகை 2 ஆற் குறைந்தால் ஒவ்வொரு பிள்ளைக்கும் 6 ரூபா கூடுதலாகக்கொடுக்கலாம். பிள்ளைகளினது தொகை என்ன?

2. ஒரு தொகை பிள்ளைகளுக்கு 240 ரூபாவைச் சமனுகப் பகுத்துக் கொடுத்தேன். பிள்ளைகளுடைய தொகை 10 ஆற் கூடினுல் ஒவ்வொரு பிள்ளையும் 2 ரூபா குறைவாகப் பெறும். பிள்ளைகளினது தொகை என்ன?

3. ஒரு மனிதன் ஒரு பொருளை 24 ரூபாவாக விற்கக் கொள்விலையின் ரூபாத் தொகையளவான நூற்று வீதம் நயமடைந்தான். அப்பொருளின் கொள்விலை என்ன?

4. ஒரு மனிதன் ஒரு பொருளை 16 ரூபாவாக விற்கக் கொள்விலையின் ரூபாத் தொகையளவான நூற்று வீதம் நட்டமடைந்தான். அப்பொருளின் கொள்விலை என்ன?

5. நான் ஓரினப்பந்தில் ஒரு தொகையை 72 ரூபா விற்கு விலையாகக் கொண்டேன். மலிவான பிறிதோரினத்தில் ஒன்று 2 ரூபா வீதங் குறைவாகக் கொண்டேனுயின், எனது பணத்திற்கு 6 பந்து கூடுதலாகக் கிடைக்கும். ஒவ்வொரு பந்தின் கொள்விலை என்ன?

6. இரு நீர்நிரப்பிகள் ஒன்று சேர்ந்து ஒரு நீர்தாங்கியை $6\frac{2}{3}$ நிமிடங்களிலே நிரப்பும். ஒரு நீர்நிரப்பி அந்நீர்தாங்கியை நிரப்ப மற்றையதிலும் 3 நிமிடங்கள் கூடுதலாக எடுக்கும். ஒவ்வொரு நீர்நிரப்பியுந் தனித்தனி எத்தனை நிமிடங்களில் அந்நீர்தாங்கியை நிரப்பும்?

7. ஒரு நீர்நிரப்பியும் ஒருநீர்போக்கியும் ஒருங்கு ஒரு நீர்தாங்கியை 48 நிமிடங்களிலே நிரப்பும். அந்நீர் நிரப்பி அந்நீர்தாங்கியை நிரப்பும் நேரத்திலும் அந்நீர் போக்கி அந்நீர்தாங்கி கொள்ளும் நீரைப் போக்கும் நேரம் 4 நிமிடங்களாற் கூடியது. அந்நீர்நிரப்பி அந்நீர்தாங்கியை எத்தனை நிமிடங்களிலே நிரப்பும்?

8. ஒரு சைக்கிளோடி 20 மைல் தூரத்தை ஒரு வேகத்தோடு ஓடி முடிக்கின்ருன். மணிக்கு 2 மைல் வீதங் கூடுதலாக ஓடினுனெனின் $\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்கு முன் குறித்த இடத்தை அடைவான். அவனது வேகம் என்ன?

9. ஒரு பிரயாணி 15 மைல் தூரத்தை ஒரு வேகத்தோடு நடக்கின்ருன். மணிக்கு 2 மைல் வீதங் குறைவாக நடந்தானுயின், 2 மணி நேரம் பிந்திக் குறித்த இடத்தை அடைவான். அவனது வேகம் என்ன?

10. ஒரு பாய்க் கப்பல் 2400 மைல் ஓடுகிறது. மணிக்கு 2 மைல் வீதங் குறைவாக ஓடினுல் அத்தூரஞ் செல்ல $2\frac{1}{2}$ நாள்கள் கூடுதலாக எடுக்கும். அது எத்தனை நாள்களில் அத்தூரத்தை ஓடிமுடிக்கும்?

11. வள்ளக்காரன் ஒருவன் தன் வள்ளத்திலே நீரோட்டத்திற்கு எதிராக 8 மைல் சென்று திரும்பித்தான் புறப்பட்ட இடத்திற்குவர 5 மணி நேரம் எடுக்கின்ருன். நீரோட்டத்தின் வேகம் மணிக்கு 3 மைல் வீதமெனின், நிலையான நீரில் அவனது வேகம் என்ன?

12. மணிக்கு 6 மைல் வீதம் நிலையான நீரிலே நீந்தும் ஒருவன் ஓர் ஆற்றிற்கு எதிராக நீந்தி 4 மைல் தூரஞ் சென்றதும் நீரால் அள்ளப்படத் தன்னை விட்டனன். நீந்தத் தொடங்கி 4 மணிநேரஞ் சென்றதுந் தான் புறப்பட்ட இடத்தைத் தாண்டி 2 மைல் தூரத்திற்கப்பால் இருப்பதைக் கண்டான். அவ் வாற்ருேட்டத்தின் வேகம் என்ன?

13. 11 அடிச் சுற்றுள்ள வண்டிச்சில்லு ஒன்று ஒவ்வொரு சுற்றுச் சுற்ற ஒரு செக்கன் கூடுதலாக எடுக்குமெனின், வண்டியின் வேகம் மணிக்கு $3\frac{3}{4}$ மைல் வீதங் குறையும். அவ்வண்டியின் வேகம் என்ன?

14. 36 அடி நீளமும் 24 அடி அகலமுமுள்ள புற்றரையொன்றைச் சுற்றி ஒரேயகலமான வழியொன்று விடப்பட்டுள்ளது. அவ்வழியும் புற்றரையும் பரப்பளவிற் சமனுயின், அவ்வழியின் அகலம் என்ன?

15. ஒரு செவ்வகப் புற்றரையைச் சுற்றி 6 அடி அகலமான வழியொன்று விடப்பட்டுள்ளது. அப் புற்றரையின் பரப்பளவு 1280 சதுரவடி; அவ்வழியின் பரப்பளவு 1152 சதுரவடி. அப்புற்றரையினுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

16. ஒரு தொகை பணகத்வட்டிதித்ன். இராண்டுக்கு 36 ரூபா. வட்டி ஒரு நூற்று வீதங் குறைந்தால், அவ்வட்டியைப் பெறுதற்கு இன்னும் 300 ரூபா கூடுதலாக முதலிட வேண்டும். முன்னர் எத்தொகை முதலிடப்பட்டது?

17. ஒரு தொகை பணத்தின் வட்டி ஓராண்டுக்கு 48 ரூபா. வட்டி ஒரு நூற்று வீதங் கூடிற்ருயின், அவ்வட்டியைப் பெறுதற்கு 240 ரூபா குறைவாக முதலிடலாம். முன்னர் எத்தொகை முதலிடப்பட்டது?

18. ஒரு மனிதன் தனது பணத்தை 4% பங்குமுதலிலே முதலீடு செய்தான். செய்யும்போது பங்குமுதலின் பெறுமானம் 15 ரூபா வீதங் கூடிற்ருயின், தனது பணத்திற்கு $\frac{8}{9}$% வீதம் வருமானங் குறைவாகப் பெறுவான். அப்பங்கு முதலை என்ன வீதங் கொண்டான்?

19. ஒரு மனிதன் தன் பணத்தை 3% சரக்குமுதலிலே முதலீடு செய்தான். செய்தபோது சரக்குமுதலின் பெறுமானம் 15 ரூபா வீதங் குறைந்ததாயின் தன் பணத்திற்கு 1% வீதம் வருமானங் கூடுதலாகப் பெறுவான். என்ன வீதம் அச்சரக்கு முதலைக் கொண்டான்?

20. ஒரு மனிதனின் வயதை ஆண்டிற் குறிக்குமெண்ணின் பத்தினிடத்து இலக்கம் ஒன்றினிடத்து இலக்கத்தின் வர்க்கம். அவ்விலக்கங்களின் வித்தியாசம் 6. அவனுடைய வயது என்ன?

அத்தியாயம் 21

இருபடிச் சார்பின் வரைப்படம்

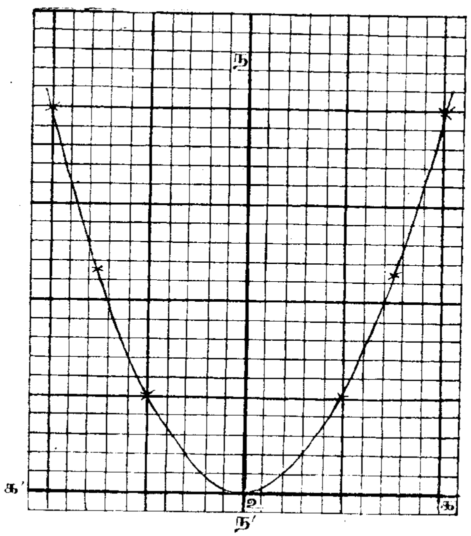
120. அக^2 + இக + உ என்னும் நியம வடிவத்தில் எழுதத்தக்க இருபடிச் சார்புகளுடைய வரைப்படங்கள் வரையுமுறையை ஆராயமுன், அச்சார்புகளுள் இலேசானதை ஆராய்வோம். அது க^2 என்பதே. ஆகலான், முதற்கண் அதன் வரைப்படத்தை வரைந்து அதனுலே எண்கள் சிலவற்றினுடைய வர்க்கங்களையும் வர்க்கமூலங்களையுங் காண்போம்.

உ—ம்.

1. ந=க^2 என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்திலிருந்து $(1\cdot4)^2$, $\sqrt{3}$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

க, ந என்னும் இவற்றினுடைய ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓர் அட்டவணையிற் குறிப்போம்:—

க	−2	−1·5	−1	−·5	0	·5	1	1·5	2
ந	4	2·25	1	·25	0	·25	1	2·25	4



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே அதன் அடியிற் கஉக' என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுக. அதற்குச் செங்குத்தாய் உ, இற்கூடாக நஉந' என்னும் நிலையச்சைக் கீறுக. கிடையச்சிலும் நிலையச்சிலும் அரை அங்குலத்தை ஓர் அலகுக்கு வகைக் குறியாகக் கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள புள்ளி நிலைகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளெல்லாம் ஓர் ஒழுங்கான வளைகோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். அவ்வளைகோட்டைச் செவ்விதாக வரைக. அது பரவளைவு எனப்படும். உ என்னும் புள்ளி அதன் உச்சியாகும்.

(i) ந$=$க^2 என்னுஞ் சமன்பாட்டில் க$=1\cdot4$ எனப் பிரதியிட, ந$=(1\cdot4)^2$ என்பது பெறப்படும். வரைப்படத்திலிருந்து, க$=1\cdot4$ ஆயின், ந$=1.96$ என்பதைப் பெறுவோம்.

$\therefore (1\cdot4)^2=1.96$.

(ii) ந$=$க^2 என்பது தரப்பட்டது.

$\therefore$ க$^2=$ந;

$\therefore$ க$=\sqrt{\text{ந}}$.

இச்சமன்பாட்டில் ந$=3$ எனப் பிரதியிட, க$=\sqrt{3}$ என்பது பெறப்படும்.

வரைப்படத்தின்படி, ந$=3$ ஆயின், க$=+\sqrt{1\cdot73}$.

$\therefore \sqrt{3}=\pm1\cdot73$.

121. ந$=$க^2 என்பதன் வரைப்படம் முழுவதுங் கிடையச்சிற்கு மேலாயும் நிலையச்சிற்குச் சமச்சீராயும் இருப்பதைக் காண்க.

அதுபோல, ந$=-$க^2 என்பதன் வரைப்படும் முழுவதுங் கிடையச்சிற்குக் கீழாயும் நிலையச்சிற்குச் சமச்சீராயும் உள்ளது என்பதை வரைப்படம் வரைந்து காண்க.

இவ்வரைப்படங்களில் எண்ணளவில், க இனுடைய பெறுமானங் கூடக்கூட ந இனுடைய பெறுமானம் விரைவாய்க் கூடுதலை நோக்குக.

122. ந$=$அக^2 என்னும் வடிவத்தில் அமைக்கக் கூடிய எச்சமன்பாடும் நிலையச்சிற்குச் சமச்சீரான ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும். க அச்சு அப்பரவளைவுக்கு உச்சித்தொடுகோடாகும். அ என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயின், அப்பரவளைவு நிலையச்சுப் பக்கமாகக் குத்தாய் எழும்பும். அன்றி, அது ஒரு பின்னமாயின், அப்பரவளைவு நிலையச்சிற்கு வலப்புறமும் இடப்புறமும் விரிந்து தட்டையாயிருக்கும். அ என்பது ஒரெதிரெண்ணுயின், அப்பரவளைவு கிடையச்சிற்குக் கீழே எண்ணளவில் அ இன் பெறுமானத்தின்படி முற்கூறியவாறு குத்தாயோ தட்டையாயோ வரும்.

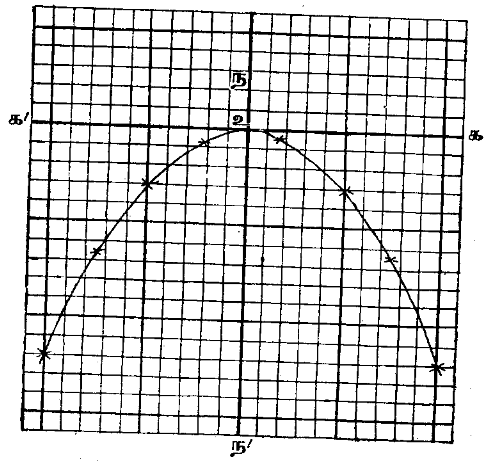
நிலையச்சுப் பக்கமாய்க் குத்தாய் எழும்பும் வரைப்படங்களை வரைதற்கு ந இன் வகைக் குறியை க இன் வகைக் குறியின் ஏற்றதொரு பின்னமாகக் கொள்ள வேண்டும். அவ்வாறு கொண்டு வரைந்தால், செய்முறையளவிலே நல்ல வளைவுகளைப் பெறலாம். ஆனால், புள்ளி நிலை காணும்போது வகைக்குறி வேறுபாட்டிற் கருத்து இருத்தல் வேண்டும்.

உ—ம்.

ந$=-6$க^2 என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்திலிருந்து $\sqrt{\frac{1}{6}}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

க, ந என்னும் இவற்றினுடைய ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓர் அட்டவணையிற் குறிப்போம்.

க	-2	$-1\cdot5$	-1	$-\cdot5$	0	$\cdot5$	1	$1\cdot5$	2
ந	-24	-13.5	-6	$-1\cdot5$	0	$-1\cdot5$	-6	$-13\cdot5$	-24



Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே அதனுடைய நுனிப் பக்கத்தில் கஉக' என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுக. அதற்குச் செங்குத்தாய் உ இற்கு ஊடாக நஉந' என்னும் நிலையச்சைக் கீறுக. கிடையச்சில் அரையங்குலமும் நிலையச்சில் ·05 அங்குலமும் ஓரலகுக்கு வகைக் குறியாகக்கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகள் எல்லாம் ஓர் ஒழுங்கான வளைகோட்டில் அமைவதைக் காணலாம். அவ்வளைகோட்டைச் செவ்விதாக வரைக. அதுவே $ந = -6க^2$ என்பதன் வரைப்படம். அது ஒரு பரவளைவாதலறிக.

$ந = -6க^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில் $ந = -1$ எனப் பிரதியிட $-6க^2 = -1$ என்பது பெறப்படும்.

$\therefore\ க^2 = \frac{1}{6}$.

$\therefore\ க = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

வரைப்படத்திலிருந்து, $ந = -1$ ஆயின் $க = \pm\cdot 41$ என்பதைப் பெறுவோம்.

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\cdot 41$.

123. இருபடிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வு: இப்பிரிவில் $அக^2 + இக + உ$ என்னும் வடிவத்தில் அமைக்கத்தக்க சார்புகளுடைய வரைப்படங்களை வரையு முறையையும், வரைப்படங்கள் வாயிலாக $அக^2 + இக + உ = 0$ என்னும் வடிவங்கொள்ளுஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கு முறையையும் ஆராய்வோம்.

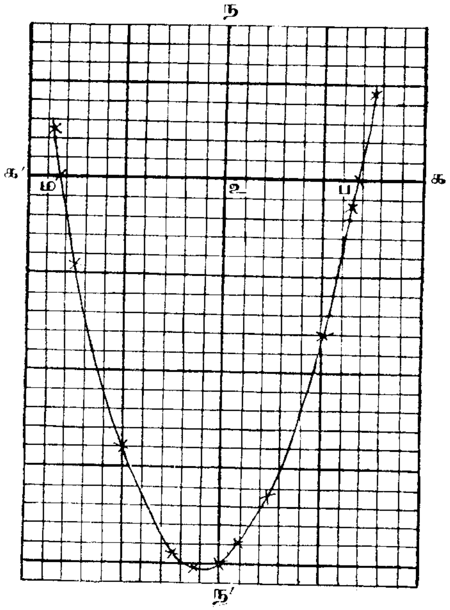
உ—ம்.

1. $9க^2 + 3க - 20$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படம் வாயிலாக $9க^2 + 3க - 20 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$ந = 9க^2 + 3க - 20$ எனக் கொள்வோம்.

க என்பதற்குக் குறித்த பெறுமானங்களைக் கொடுக்க ந பெறும் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓரட்டவணையிற் குறிப்போம் :—

க	-1·75	-1·5	-1	-·5	-·25	0	·25	·5	1	1·25	1.5
ந	2·31	-4·25	-14	-19·25	-20·19	-20	-18·7	-16·25	-8	-2·19	4.75



கஉக' என்னுங் கிடையச்சை வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே கீறுக. அக்கிடையச்சிற்குச் செங்குத்தாய் நஉந' என்னும் நிலையச்சைக் கீறுக.

கிடையச்சில் அரையங்குலம் ஓரலகுக்கும் நிலையச்சில் ·1 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக் குறியாகக் கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளூடாகச் செல்லும் பரவளைவை அழுத்தமாக வரைக. இதுவே $9க^2 + 3க - 20$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படமாகும்.

இவ்வரைப்படம் க அச்சை ப இலும் ம இலும் வெட்டுகின்றதெனக் கொள்வோம்.

இப்புள்ளிகளில் க இனுடைய பெறுமானங்கள் 1.3, $-1\cdot 7$ என்பன என்றும் ந இனது பெறுமானம் 0 என்றும் வரைப்படத்திலிருந்து அறிவோம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore\ 9க^2+3க-20=0$ ஆயின், $க=1\cdot3$, அல்லது $-1\cdot7$ ஆகும்.

$\therefore$ வேண்டிய தீர்வுகள் $க=1\cdot3$, $க=-1\cdot7$ என்பனவே.

உ.—ம்.

2. $ந=2க^2$, $ந=10-க$ என்னும் இவற்றினுடைய வரைப்படங்களை வரைக. அவ்வரைப்படங்கள் வாயிலாக, $2க^2+க-10=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$ந=2க^2 \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

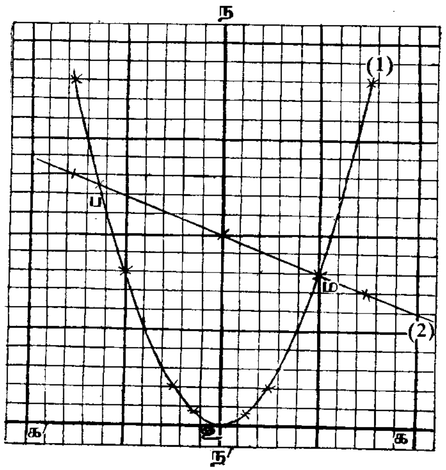
க இற்குக் குறித்த பெறுமானங்களைக் கொடுக்க ந பெறும் பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓரட்டவணையிற் குறிப்போம் :—

க	−3	−2	−1	−·5	0	·5	1	2	3
ந	18	8	2	·5	0	·5	2	8	18

$$ந=10-க \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

க உம் ந உம் பெறும் ஒத்த பெறுமானங்களைப் பின்வரும் அட்டவணையிற் காணலாம் :—

க	−3	0	3
ந	13	10	7



வரைப்படத் தாளுக்குக் குறுக்கே கஉக′ என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுக. அதற்குச் செங்குத்தாய் நஉந′ என்னும் நிலையச்சைக் கீறுக.

கிடையச்சில் ·25 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் நிலையச்சில் ·1 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக் குறியாகக்கொண்டு அட்டவணைகளில் உள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறித்து இரு வரைப்படங்களையும் வரைக. அப்படங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் புள்ளிகள் ப உம் ம உம் ஆகுக. படத்திலிருந்து, ப இன் கிடைத்தூரம் $-2\frac{1}{2}$ என்றும் ம இன் கிடைத்தூரம் 2 என்றும் அறியலாம்.

$\therefore$ $க=-2\frac{1}{2}$, $க=2$ என்பனவே $2க^2+க-10=0$ என்பதனுடைய தீர்வுகளாகும். இதனை நிறுவுவோம் :—

ப, ம என்னும் புள்ளிகளுடைய கிடைநிலைத்தூரங்கள் $ந=2க^2$ என்பதற்கும் $ந=10-க$ என்பதற்கும் உண்மையாகும்.

$\therefore$ ப, ம என்னும் புள்ளிகளுடைய கிடைத்தூரங்கள் $2க^2=10-க$ என்பதற்கு உண்மையாகும். $2க^2=10-க$ என்னுஞ் சமன்பாடும் $2க^2+க-10=0$ என்னுஞ் சமன்பாடும் ஒன்ருகும்.

$\therefore$ ப, ம என்னும் புள்ளிகளுடைய கிடைத் தூரங்கள் $2க^2+க-10=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை மெய்ப்பிக்கும்.

$\therefore$ $க=-2\cdot5$, $க=2$ என்பனவே $2க^2+க-10=0$ என்பதற்குத் தீர்வுகளாகும்

உ.—ம்.

3. $2+3க-9க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படத்தைத் துணைக்கொண்டு $36க^2-11க-4=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$$36க^2-11க-4=-4(2+3க-9க^2)+4+க=0.$$

$$\therefore\ 4(2+3க-9க^2)=4+க.$$

$$\therefore\ 2+3க-9க^2=1+\frac{க}{4}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

∴ $ந=2+3க-9க^2$, $ந=1+\frac{க}{4}$ என்னும் வரைப்படங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் புள்ளிகளுடைய கிடைத்தூரங்களே $36க^2-11க-4$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகளாகும்.

∴ அப்படங்களை வரைவோம் :

$ந=2+3க-9க^2$. .. .. (1)

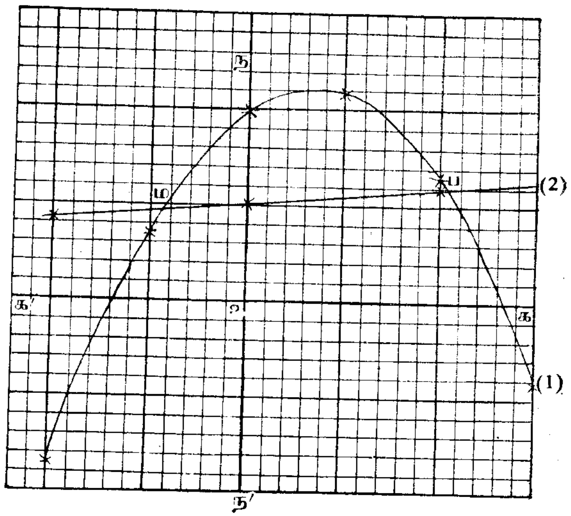
க உம் ந உம் பெறும் ஒத்த பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு :—

க	−·5	−·25	0	·25	·5	·75
ந	−1·75	·69	2	2·19	1·25	−·81

$ந=1+\frac{க}{4}$. .. .. (2)

க உம் ந உம் பெறும் ஒத்த பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு :—

க	−·5	0	·5
ந	·88	1	1·25



வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே கஉக′ என்னுங் கிடையச்சையும் அதற்குச் செங்குத்தாய் நஉந′ என்னும் நிலையச்சையுங் கீறுக.

க அச்சில் 2 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் ந அச்சில் அரையங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக்குறியாகக் கொண்டு இரு வரைப்படங்களையும் வரைக.

அப்படங்கள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டும் புள்ளிகள் ப, ம என்பனவாகும்.

அவற்றினுடைய கிடைத் தூரங்கள் ·52, −·21 என்பன.

∴ க=·52, க=−·21 என்பனவே $36க^2-11க-4=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகளாகும்.

124. வரைப்படங்கள் வரையும் மாணுக்கர் பின்வருவனவற்றைக் கருத்தில் வைத்தல் வேண்டும் :—

(1) வரைப்படம் க அச்சை வெட்டும் புள்ளியினுடைய கிடைத்தூரத்தைக் காணுதற்கு ந=0 என்றும் அப்படம் ந அச்சை வெட்டும் புள்ளியினுடைய நிலைத்தூரத்தைக் காணுதற்கு க=0 என்றும் பிரதியிடுக.

(2) $ந=அக^2+இக+உ$ என்பதன் வரைப்படத்தை க=ப, க=−ம என்னும் நோக்குக்களுக்குள் வரைக என்று நோக்குத் தரவில்லையாயின், ந=0 ஆகுமாறு க பெறும் பெறுமானங்களை அடக்கி நிற்கும் நோக்குக்களுக்குள் அவ்வரைப்படத்தை வரைக.

(3) யாதும் ஒரு சமன்பாட்டைத் தந்து அதன் வரைப்படத்தை இன்ன வகைக்குறிகொண்டு வரைக என்று கூறவில்லையாயின், வரைப்படம் ஏறத்தாழ வரைப்படத்தாள் முழுவதுங் கொள்ளுமாறும், எளிதாகக் கிடைநிலைத் தூரங்களைக் காணுமாறும் வகைக்குறியைத் தெரிந்தெடுத்தல் வேண்டும்.

(4) ஒவ்வொரு வரைப்படத்திலுமுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியினுடைய கிடைநிலைத்தூரங்களும் அவ்வவ்வரைப்படத்தின் சமன்பாட்டை மெய்ப்பிக்கும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(5) இரு சமன்பாடுகளுடைய தீர்வுகளை அச்சமன்பாட்டு வரைப்படங்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிகளுடைய கிடைநிலைத்தூரங்கள் கொண்டு காணலாம்.

பயிற்சி 21 (அ)

1. $ந=க^2$ என்பதன் வரைப்படத்தைத் தக்க அளவுத்திட்டங் கொண்டு வரைக. அப்படத்திலிருந்து $\sqrt{7}$ என்பதன் பெறுமானத்தை 2 தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

2. $(1\cdot 3)^2$ என்பதன் பெறுமானத்தை வரைப்பட மூலங் காண்க.

3. $ந=3க^2$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைந்து, அப்படந்துணைக் கொண்டு $\sqrt{2}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

4. $ந=-4க^2$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படந்துணைக் கொண்டு $\frac{1}{\sqrt{2}}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

5. $ந=2க^2$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $2க^2+3க-9=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

6. $ந=2க^2$, $ந=க+6$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுடைய வரைப்படங்களை வரைக. அப்படங்கள் வாயிலாக $2க^2-க-6=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

7. $க=1$, $க=-1\cdot 5$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $ந=9க^2+6க-8$ என்பதன் வரைப்படத்தைப் பெரிய அளவுத்திட்டங் கொண்டு வரைக. அப்படம் வாயிலாக $9க^2+6க-8=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

8. தக்க அளவுத்திட்டங் கொண்டு $க=\cdot 25$, $க=-\cdot 25$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $15க^2+2க-1$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைந்து, அவ்வரைப்படந் துணைக் கொண்டு $15க^2=1-2க$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

9. $க=2\cdot 5$, $க=-2$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $4க^2-5க-6$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படந் துணைக் கொண்டு $5க=2(2க^2-3)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

10. $க=2$, $க=-2$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $6க^2-க-14$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அப் படம்வாயிலாக $6க^2=க+15$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

11. $க=-\frac{1}{2}$, $க=3\frac{1}{2}$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $ந=\frac{1}{4}(3+12க-4க^2)$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைந்து, அப்படந் துணைக்கொண்டு $4க^2=3(1+4க)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

12. $ந=(3+க)(2-க)$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படந்துணைக்கொண்டு $(3+க)(2-க)$ என்பதை 3 இற்குச் சமனுக்கும் க இனுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்படமூலந் தீர்க்க :—

13. $12க^2-11க-15=0$.

14. $6+2க-3க^2=0$.

15. $க^2+2க-4=0$.

16. $3-3க-க^2=0$.

17. $5க^2-9க-6=0$.

18. $9க^2-9க+2=0$.

19. $9க^2-60க+91=0$.

20. $5-3க-3க^2=0$.

125. சார்புகளுடைய உயர்வுப் பெறுமானங்களும் இழிவுப் பெறுமானங்களும் :—

சார்புகளுடைய உயர்வுப் பெறுமானங்களும் இழிவுப் பெறுமானங்களும் அச்சார்புகளுடைய திரும்பு பெறுமானங்களெனப்படும். ஒரு சார்பின் வரைப்படந் தனது திரும்பு பெறுமானம் பெறும் புள்ளியில் அதுவரை சென்ற திசையை விட்டு வேறொரு திசையைப் பற்றும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஓர் இருபடிச் சார்பினது திரும்பு பெறுமானத்தை அறிமுறையாலும் வரைப்பட முறையாலும் எளிதாகக் காணலாம்.

அறிமுறையால் ஒரு சார்பினது திரும்பு பெறுமானத்தைக் காணும்போது பின்வரும் உண்மைகள் இரண்டும் பயன்படும் :

(1) ஒரு நிறைவர்க்கம் நேரெண்ணுகுமன்றி எதிரெண்ணுகாது.

(2) ஒரு நிறைவர்க்கத்தினுடைய பெறுமானங்களுட் சிறியது பூச்சியமாகும்.

இந்த இரண்டு உண்மைகளேயும் பயன்படுத்திச் சில சார்புகளுடைய திரும்பு பெறுமானங்களை அட்சரகணித முறை பற்றிக் காண்போம் :—

உ—ம்.

1. $2+3க-9க^2$ என்பதனுடைய திரும்பு பெறுமானத்தை அட்சரகணிதமுறையாற் காண்க.

$ந=2+3க-9க^2$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore ந=-9(க^2-\tfrac{1}{3}க-\tfrac{2}{9})$$
$$=-9\left\{க^2-\tfrac{1}{3}க+(\tfrac{1}{6})^2-\tfrac{1}{36}-\tfrac{2}{9}\right\}$$
$$=-9\left\{(க-\tfrac{1}{6})^2-\tfrac{1}{4}\right\}$$
$$=\tfrac{9}{4}-9(க-\tfrac{1}{6})^2.$$

இங்கு $(க-\frac{1}{6})^2$ என்பது பெறும் பெறுமானங் குறையக் குறைய ந என்பது பெறும் பெறுமானங் கூடிக்கூடி வரும்.

$\therefore (க-\frac{1}{6})^2$ என்பது தான் பெறும் பெறுமானங்களுட் சிறியதைப் பெற ந என்பது தான் பெறும் பெறுமானங்களுட் பெரியதைப் பெறும்.

ஆனல், $(க-\frac{1}{6})^2$ என்பது ஒரு நிறைவர்க்கமாதலால் அது பெறும் பெறுமானங்களுட் சிறியது 0 ஆகும்.

$\therefore$ ந இனுடைய பெறுமானங்களுட் பெரியது $\frac{9}{4}-9\times 0$
$$=\tfrac{9}{4}-0$$
$$=\tfrac{9}{4}.$$

$\therefore$ தந்த சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் $2\frac{1}{4}$ என்பதே.

உ—ம்.

2. $4க^2+3க-10$ என்பதனுடைய திரும்பு பெறுமானத்தை அட்சரகணிதமுறையாற் காண்க.

$ந=4க^2+3க-10$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore ந=4(க^2+\tfrac{3}{4}க-\tfrac{5}{2})$$
$$=4\left\{க^2+\tfrac{3}{4}க+(\tfrac{3}{8})^2-\tfrac{9}{64}-\tfrac{5}{2}\right\}$$
$$=4\left\{(க+\tfrac{3}{8})^2-\tfrac{169}{64}\right\}$$
$$=4(க+\tfrac{3}{8})^2-\tfrac{169}{16};$$

இங்கு $(க+\frac{3}{8})^2$ என்பது பெறும் பெறுமானங் குறையக் குறைய ந என்பது பெறும் பெறுமானமுங் குறைந்து குறைந்து வரும்.

$\therefore (க+\frac{3}{8})^2$ என்பது தான் பெறும் பெறுமானங்களுட் சிறியதைப் பெற ந என்பதுந் தான் பெறும் பெறுமானங்களுட் சிறியதைப் பெறும்.

ஆனல், $(க+\frac{3}{8})^2$ என்பது ஒரு நிறைவர்க்கமாதலின், அது பெறும் பெறுமானங்களுட் சிறியது 0 ஆகும்.

$\therefore$ ந இனுடைய பெறுமானங்களுட் சிறியது
$$4\times 0-\frac{169}{16}=0-10\frac{9}{16}=-10\frac{9}{16}.$$

$\therefore$ தந்த சார்பினுடைய இழிவுப் பெறுமானம் $-10\frac{9}{16}$.

126. ஒரு சார்பினுடைய உயர்வுப் பெறுமானத்தையேனும் இழிவுப் பெறுமானத்தையேனும் வரைப்படம் வாயிலாகக் காணும்போது, அச்சார்பினது திரும்பு புள்ளிக்கு அருகில் உள்ள புள்ளிகள் பலவற்றினுடைய நிலைகளைக் குறித்தல் வேண்டும். அப்புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் வரைப்படப்பகுதியை மிக்க கவனத்தோடு வரைதல் வேண்டும்.

இங்கு, மேலே தந்த சார்புகளுடைய வரைப்படங்களை வரைந்து, அப்படங்கள் வாயிலாக அச்சார்புகளுடைய தன்மைகளை ஆராய்வோம் :

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

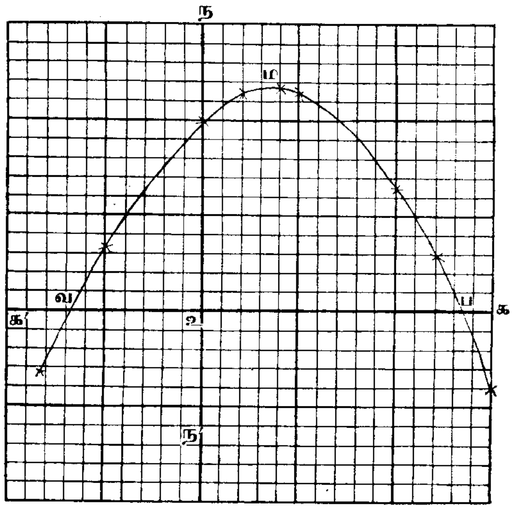
உ—ம்.

1. $2 + 3\text{க} - 9\text{க}^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அச்சார்பின் பெறுமானங்களுள் எது உயர்ந்ததென்று காண்க. அச்சார்பின் பெறுமானம் நேர்க்கணியமாதற்கு க இன் பெறுமானம் எந்நோக்குக்களுக் கிடையில் இருக்க வேண்டுமென்றும் அவ்வரைப்படம் வாயிலாகக் காண்க.

$\text{ந} = 2 + 3\text{க} - 9\text{க}^2$ எனக் கொள்வோம்.

க இற்குக் குறித்த பெறுமானங்களைக் கொடுக்க ந பெறும் பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓரட்டவணையிற் குறிப்போம் :

க	−·4	−·25	0	·1	·2	·25	·5	·6	·75
ந	−·64	·69	2	2·2	2 24	2 19	1·25	·56	−·81



வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே கஉக' என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுவோம். அக்கிடையச்சிற்குச் செங்குத்தாய் உ இற் கூடாக நஉந' என்னும் நிலையச்சையுங் கீறுவோம்.

க அச்சில் 2 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் ந அச்சில் அரையங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக் குறியாகக் கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறித்து அப்புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் வளைகோட்டை அழுத்தமாக வரைவோம். அதுவே வேண்டிய வரைப்படமாகும்.

அவ்வரைப்படம் க அச்சை வ, ப என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது என்றும் அதன் உச்சி ம என்றுங் கொள்வோம்.

படத்திலிருந்து, வ இன் கிடைத்தூரம் −·33 என்றும் ப இன் கிடைத்தூரம் ·67 என்றும் ம இனுடைய கிடைநிலைத்தூரங்கள் (·17, 2·25) என்றுங் காணலாம்.

படத்தின்படி, க ஆனது −·5 தொடங்கி ·17 வரைக்கும் படிப்படியாகக் கூட, ந ஆனது −1·75 தொடங்கி 2·25 வரைக்கும் படிப்படியாகக் கூடுவதையும், பின்னர் க ஆனது ·17 தொடங்கி ·75 வரைக்கும் படிப்படியாகக் கூட, ந ஆனது 2·25 தொடங்கி −·81 வரைக்கும் படிப்படியாகக் குறைவதையுங் காணலாம்.

ஆகவே, க = −·5, க = ·75 என்னும் நோக்குக்களுக்குள் அச்சார்பினுடைய பெறுமானங்களுட் பெரியது 2·25 என்பது தெளிவு.

அச்சார்பின் பெறுமானம் நேர்க்கணியமாதற்கு க ஆனது −·33, ·67 என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையில் யாதுமொன்றைப் பெறவேண்டுமென்பதுந் தெளிவு.

உ—ம்.

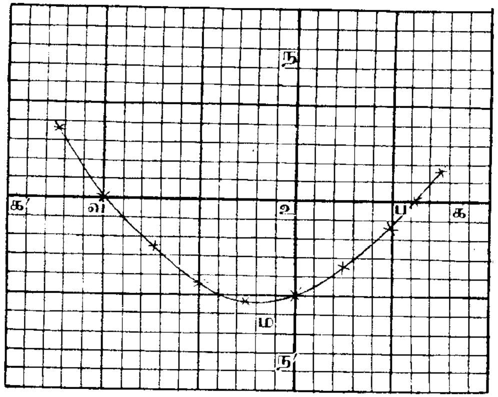
2. $4\text{க}^2 + 3\text{க} - 10$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைந்து, அப்படந்துணைக்கொண்டு அச்சார்பினுடைய இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அச்சார்பின் பெறுமானம் எதிர்க்கணியமாதற்கு க இன் பெறுமானம் எந்நோக்குக்களுக் கிடையில் இருக்க வேண்டு மென்றும் அவ்வரைப்படம் வாயிலாக்க் காண்க.

$\text{ந} = 4\text{க}^2 + 3\text{க} - 10$ எனக் கொள்வோம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க பெறுங் குறித்த பெறுமானங்களுக்கு ந பெறும் ஒத்த பெறுமானங்கள் பின்வருமாறு :—

க	$-2\cdot5$	-2	$-1\cdot5$	-1	$-\cdot5$	0	$\cdot5$	1	$1\cdot5$
ந	$7\cdot5$	0	$-5\cdot5$	-9	$-10\cdot5$	-10	$-7\cdot5$	-3	$3\cdot5$



வரைப்படத்தாளுக்குக் குறுக்கே கஉக′ என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுவோம். அக்கிடையச்சிற்குச் செங்குத்தாய் நஉந′ என்னும் நிலையச்சையுங் கீறுவோம்.

க அச்சில் அரையங்குலம் ஓரலகுக்கும் ந அச்சில் $\cdot05$ அங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக்குறியாகக் கொண்டு அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறித்து, அப்புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் வளைகோட்டை அழுத்தமாக வரைவோம். அதுவே வேண்டிய வரைப்படமாகும். அவ்வரைப்படம் க அச்சை வ, ப என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றது என்றும் அதன் உச்சி ம என்றுங் கொள்வோம்.

படத்திலிருந்து, வ இன் கிடைத்தூரம் -2 என்றும் ப இன் கிடைத்தூரம் $1\cdot25$ என்றும் ம இனது நிலைத்தூரம் $-10\cdot56$ என்றுங் காணலாம்.

படத்திலிருந்து, அச்சார்பினுடைய இழிவுப் பெறுமானம் $-10\cdot56$ என்பது புலனாகும். அச்சார்பின் பெறுமானம் எதிர்க்கணியமாதற்கு க ஆனது -2, 1.25 என்னும் பெறுமானங்களுக்கிடையில் யாதுமொன்றைப் பெறலாம் என்பதும் புலனாகும்.

127. வளைகோட்டின் சாய்வு :

யாதுமொரு வளைகோட்டின் சாய்வை அக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிற் காண்பதற்கு அப்புள்ளிக்கூடாக அவ்வளைகோட்டிற்கு ஒரு தொடுகோடு வரையவேண்டும். அதன்பின் அத் தொடுகோடு வரைப் படத்தாளிலுள்ள எவ்வெச் சிறு சதுரங்களுடைய மூலைகளுக் கூடாகச் செல்லுகின்றதெனக் கண்டு, அவற்றுள் ஒன்றுக்கொன்று தூரமான இரு புள்ளிகளைக் குறிக்க. அப்புள்ளிகளிலிருந்து ஒன்றையொன்று சந்திக்கும் இரு கோடுகளை ஈரச்சுக்களுக்குஞ் சமாந்தரமாய் வரைய வேண்டும்.

ந அச்சிற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோட்டிற்கும் க அச்சிற்குச் சமாந்தரமான நேர்கோட்டிற்குமுள்ள விகிதமே எண்ணளவில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வைக் குறிக்கும். அட்சரகணித விகிதத்தைக் காண்பதற்கு அத்தொடுகோட்டிற்கும் க அச்சின் வலப்பக்கத்திற்கு மிடையில் மேலுள்ள கோணங் கூர்ங்கோணமாயின் பெற்ற விகிதத்திற்கு + என்னுங் குறியீட்டையும், விரிகோணமாயின் பெற்ற விகிதத்திற்கு − என்னுங் குறியீட்டையும் இடுக.

உ—ம்.

$ந = 9க^2 - 6க - 35$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைந்து $க = 1\cdot5$ என்னும் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

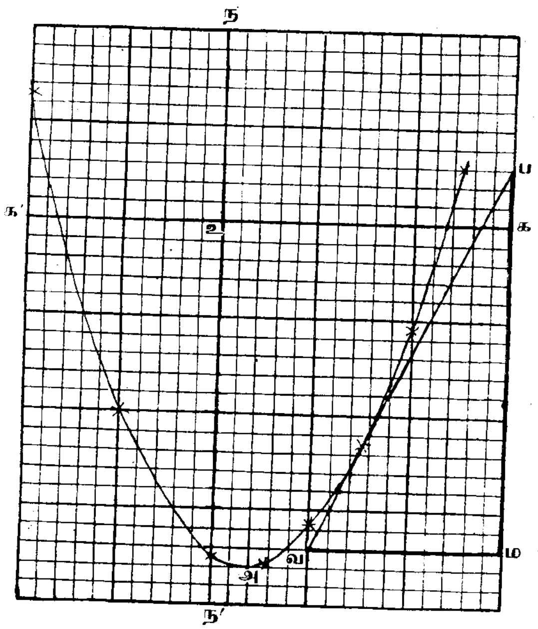
ந இழிவுப் பெறுமானத்தைப் பெற க என்ன பெறுமானத்தைப் பெறும் என்பதையுங் காண்க.

$ந = 9க^2 - 6க - 35.$

க இற்குக் குறித்த பெறுமானங்களைக் கொடுக்க ந பெறும் பெறுமானங்களைக் கணித்து ஓரட்டவணையிற் குறிப்போம் :

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க	−2	−1·5	−1	−·5	0	·5	1	1·5	2	2·5
ந	13	−5·75	−20	−29·75	−35	−35·75	−32	−23·75	−11	6·25



வரைப்படத் தாளுக்குக் குறுக்கே கஉக' என்னுங் கிடையச்சைக் கீறுவோம். அக்கிடையச்சிற்குச் செங்குத்தாய் உ இற் கூடாக நஉந' என்னும் நிலையச்சையுங் கீறுவோம்.

க அச்சில் அரையங்குலம் ஓரலகுக்கும் ந அச்சில் ·05 அங்குலம் ஓரலகுக்கும் வகைக்குறியாகக் கொண்டு. அட்டவணையிலுள்ள புள்ளிநிலைகளைக் குறித்து, அப்புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் பரவளைவை அழுத்தமாக வரைவோம். அதுவே வேண்டிய வரைப்படமாகும்.

அவ்வளைகோட்டில், க=1·5 என்னும் புள்ளி த ஆகுக. அதன் உச்சி அ ஆகுக. த என்னும் புள்ளிக்கூடாக அவ்வளைகோட்டிற்கு ஒரு தொடுகோடு கீறுவோம். அது வரைப்படத்தாளில் ஒன்றுக்கொன்று தூரமான ப, வ என்னுஞ் சிறுசதுரமூலைகளுக் கூடாகச் செல்வதைக் காணலாம். ப ஊடாக பம என்னும் நேர்கோட்டையும் வ ஊடாக வம என்னும் நேர்கோட்டையும் முறையே நிலையச்சிற்குங் கிடையச்சிற்குஞ் சமாந்தரமாய்க் கீறுவோம்.

வரைப்படத்தின்படி, பம = 36, வம = 1·7.

∴ எண்ணளவில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வு $\frac{36}{1\cdot 7}$ என்பதே. வப என்னுந் தொடுகோட்டிற்கும் க அச்சின் வலப்பக்கத்திற்கும் இடையில் மேலுள்ள கோணங் கூர்ங்கோணமாதலின், அவ்விகிதம் + என்னுங் குறியீட்டைப் பொருந்தும்.

க=1·5 என்னும் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வு $\frac{36}{1\cdot 7}$; அதாவது 21. இனி, வரைப்படத்தின்படி அ இனுடைய கிடைநிலைத்தூரங்கள் (3·3, −36) ஆகும்.

∴ ந என்பது இழிவுப் பெறுமானமாகிய −36 ஐப் பெற க என்பது 3·3 என்னும் பெறுமானத்தைப் பெறும்.

பயிற்சி 21 (ஆ)

1. வரைப்பட முறையாலும் அட்சரகணித முறையாலும் (4 − க)(1 + க) என்னுஞ் சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அவ்வரைப் படத்தினது திரும்பு புள்ளியினுடைய கிடைநிலைத் தூரங்களையுங் காண்க.

2. வரைப் படமுறையாலும் அட்சரகணித முறையாலும் $2க^2+3க+2$ என்னுஞ் சார்பினுடைய இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அவ்வரைப் படத்தினது திரும்பு புள்ளியின் கிடைத் தூரத்தையுங் காண்க.

3. க இனுடைய பெறுமானங்களுள் எதற்கு $3க - 3 - க^2$ என்னுஞ் சார்பு உயர்வுப் பெறுமானத்தைப் பெறுமென்று வரைப்படமூலங் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. க இனுடைய பெறுமானங்களுள் எதற்கு $2க^2 + 3க - 1$ என்னுஞ் சார்பு இழிவுப் பெறுமானத்தைப் பெறுமென்று வரைப்படமூலங் காண்க.

5. $6 - க - 12க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்திலிருந்து அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

6. எந்நோக்குக்களுக் கிடையில் க கிடந்தால் $5 + 7க - 6க^2$ என்னுஞ் சார்பு நேர்க்கணியங்களைப் பெறுமானங்களாகப் பெறுமென்று வரைப்படமூலங் காண்க.

7. $க^2 + க - 6$ என்னுஞ் சார்பு -3 தொடங்கி $+2$ வரையுமுள்ள க இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் எதிர்க்கணியங்களையும், அந்நோக்குக்களுக்குப் புறத்தேயுள்ள பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் நேர்க்கணியங்களையும் பெறுமானமாகப் பெறுமென்று வரைப்படமூலங் காட்டுக.

8. க இனுடைய மெய்ப் பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் $க^2 - 3க + 5$ என்பதன் பெறுமானம் நேர்க்கணியமாகும் என்பதை வரைப்படமூலங் காட்டுக.

9. $ந = (க - 1)(க + 2)$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படம் வாயிலாக $(க - 1)(க + 2)$ என்னுஞ் சார்பினுடைய இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

10. $2க^2 + க - 6$ என்னுஞ் சார்பினுடைய வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்தில் $க = -1$ என்னும் புள்ளியில், அதன் சாய்வைக் காண்க.

11. $6 - க - 2க^2$ என்னுஞ் சார்பினுடைய வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்தில் $க = 1$ என்னும் புள்ளியில் அதன் சாய்வைக் காண்க.

12. $ந = 6க^2 + 5க - 3$ என்னுஞ் சமன் பாட்டின் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்தில், $க = -\cdot 5$ என்னும் புள்ளியில் அதன் சாய்வைக் காண்க. அப்படந் துணைக்கொண்டு $4க^2 + 3க - 1 = 0$ என்னுஞ் சமன் பாட்டினுடைய தீர்வுகளையுங் காண்க.

13. $ந = 6 + 5க - 6க^2$, $ந = \frac{1}{5}(3 - 2க)$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுடைய வரைப்படங்களை வரைந்து, அப்படங்கள் மூலம் $10க^2 - 9க - 9 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க. $க = \cdot 5$ என்னும் புள்ளியில் $6 + 5க - 6க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப் படத்தின் சாய்வைக் காண்க.

14. $4க^2 + க - 3$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைந்து அதனுடைய இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. அப்படத்தில் $க = -\cdot 6$ என்னும் புள்ளியில் அதன் சாய்வையுங் காண்க.

15. $ந = 2க^2 + க + 1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படந் துணைக்கொண்டு $2க^2 + க + 1 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகள் மெய்க்கணியங்களாகாவென நிறுவுக. ந இனது இழிவுப் பெறுமானத்திற்கு ஒத்த க இனது பெறுமானத்தைக் காண்க.

16. எப்பெறுமானங்களுக்கிடையில் க கிடந்தால் $3 - 4க - 3க^2$ என்னுஞ் சார்பின் பெறுமானம் நேர்க்கணியமாகுமென்று வரைப்படமூலங் காண்க. அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தையுங் காண்க.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 7

(அ)

1. $ச(க) = 2க^3 - 3க^2 - க + 1$ ஆயின், $ச(-2)$, $ச(0)$, $ச(அ)$ என்னும் இவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

2. $2க^3 - க^2 - 13க - 6$. இதனை மீதித் தேற்றந் துணைக்கொண்டு காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $12க^2 - 7க - 12 = 0$. இதற்குத் தீர்வு காண்க.

4. ஒரு தொகை பிள்ளைகளுக்கு 432 ரூபாவைச் சமனுகப் பகுத்துக் கொடுத்தேன். பிள்ளைகளுடைய தொகை 4 ஆற் குறைந்தால் ஒவ்வொரு பிள்ளையும் 9 ரூபா கூடுதலாகப் பெறும். பிள்ளைகளினது தொகை என்ன ?

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. தக்க அளவுத்திட்டங் கொண்டு $க=1$, $க=-1\frac{1}{2}$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $9க^2+6க-8$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அவ்வரைப்படம் வாயிலாக $9க^2=2(4-3க)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ஆ)

1. $ச(அ)=அஇ(அ-இ)+இஉ(இ-உ)+உஅ(உ-அ)$ ஆயின், $ச(இ)=0$ என நிறுவுக.

2. $3க^3-க^2-8க-4$. இதனை மீதித் தேற்றந் துணைக்கொண்டு காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $24க^2-13க=2$. இதனுடைய மூலங்களை நிறைவர்க்கமுறையாற் காண்க.

4. நான் ஓரினப் பொருளில் ஒரு தொகையை 84 ரூபாவுக்கு விலையாகக் கொண்டேன். மலிவான பிறிதோரினத்தில் ஒன்று ஒரு ரூபா வீதங் குறைவாகக் கொண்டேனுயின், எனது பணத்திற்கு 2 பொருள் கூடுதலாகக் கிடைக்கும். ஒவ்வொரு பொருளின் கொள்விலை என்ன ?

5. $க=1$, $க=-2$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $ந=\frac{1}{2}(10-9க-9க^2)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படந் துணைக்கொண்டு $9(க^2+க)=10$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(இ)

1. $ச(இ)=\left\{\frac{இ(இ+1)}{2}\right\}^2$ ஆயின், $ச(5)$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $12க^3+16க^2-3க-4$. இதனை மீதித் தேற்றந் துணைக்கொண்டு காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $11க^2-7க+1=0$. இதனுடைய மூலங்களைச் சூத்திர முறைபற்றிக் காண்க.

4. ஒரு செவ்வகத் தோட்டத்தைச் சுற்றி 4 அடியகல வழியொன்று விடப்பட்டுள்ளது. அத்தோட்டத்தின் பரப்பளவு 2400 சதுரவடி ; அவ்வழியின் பரப்பளவு 864 சதுரவடி. அத்தோட்டத்தினுடைய நீளவகலங்களைக் காண்க.

5. $ந=(2+க)(1+க)$ என்பதன் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படந் துணைக்கொண்டு $(2+க)(1+க)$ என்பதை 3 இற்குச் சமனுக்கும் க இனுடைய பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ஈ)

1. $2க^4-3க^3-2க^2-க+1$ என்பதை $க-2$ என்பதால் வகுக்க வருமீதியைக் காண்க.

2. $க(க-1)(க-2)+2(க+4)$. இதனைக் காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $6க^2-5க=2$. இதனுடைய மூலங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாய் நிறைவர்க்க முறையாற் காண்க.

4. சைக்கிளோடி ஒருவன் 24 மைல் தூரத்தை ஒரு வேகத்தோடு ஓடி முடிக்கின்முன். மணிக்கு 2 மைல் வீதங் கூடுதலாக ஓடினுனெனின் ஒரு மணி நேரத்திற்கு முன் குறித்த இடத்தை அடைவான். அவனது வேகமென்ன?

5. $ந=2க^2$, $ந=1-க$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளுடைய வரைப்படங்களை ஒரே அளவுத் திட்டங் கொண்டு மாட்டேற்றச்சுச் சோடி ஒன்று பற்றி வரைக. அப்படங்கள் வாயிலாக $க(2க+1)=1$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(உ)

1. $3க^4-2க^3+3க^2-க-2$ என்பதை $க+2$ என்பதால் வகுக்க வருமீதியைக் காண்க.

2. $(க+1)(க+2)(க+3)-4(க+5)$. இதனைக் காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $\frac{1}{3க-2}+\frac{1}{3க-1}=\frac{1}{2க+1}$. இதனுடைய மூலங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாய்க் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. 32 அங்குல நீளமுள்ள நேர்கோடு ஒன்று இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. அக் கூறுகளாலாய செவ்வகத்தின் இருமடங்கு பரப்பளவில் அக்கோட்டின் அரைப் பங்கிலுள்ள சதுரத்திற்குச் சமனுயின், அந்நேர்கோட்டினுடைய கூறுகள் ஒவ்வொன்றும் எத்தனை அங்குலம்? (விடை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாய் இருத்தல் வேண்டும்).

5. $(5 - 3க)(3 + க)$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்திலிருந்து அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(ஊ)

1. $ச(க) = 3க^2 - 2க + 3$, $சி(க) = 2க^2 - 3க - 2$ ஆயின், $2ச(அ) - 3சி(அ) = 5அ + 12$ என நிறுவுக.

2. $க + 3$ என்பது $க^4 + 3க^3 - 2க^2 - 4க + 6$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளில் ஒன்றெனக் காட்டுக.

3. $\frac{2க}{க+1} - \frac{3}{1-க^2} - 5 = 0$. இதனுடைய மூலங்களைக் காண்க.

4. ஒரு தொட்டியை ஒரு நீர்நிரப்பியும் ஒரு நீர்போக்கியும் ஒருங்கு 60 நிமிடங்களிலே நிரப்பும். அந்நீர்நிரப்பி அத்தொட்டியை நிரப்பும் நேரத்திலும் அந்நீர்போக்கி அத்தொட்டி கொள்ளும் நீரைப் போக்கும் நேரம் 3 நிமிடங்களாற் கூடியது. அந்நீர்நிரப்பி அத்தொட்டியை எத்தனை நிமிடங்களிலே நிரப்பும்?

5. $12 + க - 6க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைக. $க = -\cdot 25$ என்னும் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வைக் காண்க.

(எ)

1. $ச(க) = க - ந$, $சி(க) = க^2ந - கந^2$ ஆயின்,
$\{ச(க)\}^3 = க^3 - ந^3 - 3சி(க)$ என நிறுவுக.

2. $அ^2 - அஇ + இ^2 = 0$ ஆயின், $அக^2 - 2இ^2க - இ^3$ என்பது $க + அ$ என்பதாலே மீதியின்றி வகுக்கப்படுமென நிறுவுக.

3. $(க^2 - 2அக)^2 + 24அ^4 = 11அ^2க(க - 2அ)$. இதனைத் தீர்க்க.

4. ஒரு தொகை பணத்தை வட்டிக்குக் கொடுத்து 288 ரூபாவை ஆண்டு வருமானமாகப் பெற்றேன். வட்டி இரண்டு நூற்று வீதங் கூடிற்றுயின் அவ்வருமானத்தைப் பெற 1200 ரூபா குறைவாக முதலிடலாம். முன்னர் முதலிட்ட தொகை என்ன?

5. ஒரு மாட்டேற்றச்சுச் சோடிபற்றி $க = 3$, $க = -2$ என்னும் நோக்குக்களுக்குள் $6க^2 - 5க = 25$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தை வரைக. அவ் வரைப்படத்திலிருந்து $6க^2 - 5க + 25$ என்னுஞ் சார்பினது இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க. $க = \frac{1}{2}$ என்னும் புள்ளியில் அவ்வளைகோட்டின் சாய்வையுங் காண்க.

(ஏ)

1. $3க + 2$ என்பது $6க^3 + க^2 - 4அக - 20$ என்னுங் கோவையினுடைய காரணிகளுள் ஒன்றுயின், அ இனது பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. $(அ + இ + உ)^3 - அ^3 - இ^3 - உ^3$. இதனைக் காரணிகளாய்ப் பிரிக்க.

3. $9\left(\frac{க^2}{அ^2} + \frac{அ^2}{க^2}\right) = 82$. இதனைத் தீர்க்க.

4. நிலையான நீரிலே மணிக்கு $4\frac{1}{2}$ மைல் வீதம் நீந்தும் ஒருவன் ஆற்றோட்டத்திற்கு எதிராக 4 மைல் தூரம் நீந்தியதுந் திரும்பித் தான் புறப்பட்ட இடத்திற்கு நீந்திச் சென்றனன். அவன் எல்லாமாக எடுத்தது 2 மணி நேரமாயின், அவ்வாற்றோட்டத்தின் வேகம் என்ன?

5. $ந = 25க^2 + 5க - 12$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வரைப்படத்தை வரைக. அப்படத்தில், $க = -\cdot 2$ என்னும் புள்ளியில் அப்படத்தின் சாய்வைக் காண்க. அப்படந் துணைக்கொண்டு $12 = 5க(1 + 5க)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினுடைய தீர்வுகளையுங் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ஐ)

1. $12க^4 - (2அ + இ)க^3 - 125க^2 - (2அ - இ)க + 20$ என்னுங் கோவை $2க - 5$, $3க + 1$ என்பனவற்ருல் மீதியின்றி வகுக்கப்படுமெனின், அ, இ என்பன எப்பெறுமானங்களைப் பெறும்?

2. $அ + இ + உ = 0$ ஆயின், $அ^3 + இ^3 + உ^3 = 3அஇஉ$ என நிறுவுக.

3. $க^2 - 2அக + \frac{3அ^4}{க(2அ - க)} = 2அ^2$. இதனைத் தீர்க்க.

4. ஒரு வியாபாரி தன் பணத்தை 4% பங்குமுதலிலே முதலீடு செய்தான். செய்தபொழுது அப்பங்குமுதலின் பெறுமானம் 15 ரூபா வீதங் குறைந்ததாயின், தன் பணத்திற்கு $1\frac{1}{3}\%$ வீதம் வருமானங் கூடுதலாகப் பெறுவான். என்ன வீதம் அப்பங்குமுதலைக் கொண்டான்?

5. $35 - 6க - 9க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை வரைந்து அதனுடைய திரும்பு பெறுமானத்தைக் காண்க. க இன் பெறுமானம் எந்நோக்குக்களுக்குள் இருந்தால் அச்சார்பின் பெறுமானம் நேர்க்கணியமாகுமென்று அப்படம் வாயிலாகக் காண்க.

அத்தியாயம் 22

குறிகாட்டிக் கொள்கையும் விகிதமுருமூலங்களும்

குறிகாட்டிக் கொள்கை.

128. அ என்பது ஒரு முழுவெண்ணுயின், $க^{அ} = க \times க \times க \ldots$ அ காரணிகள் வரைக்கும் என வரைவிலக்கணங் கூறிஞேம்.

அதன்படி, அ, இ என்பன முழுவெண்களாயிருந்தால்,

(i) $க^{அ} \times க^{இ} = க^{அ + இ}$,

(ii) $க^{அ} \div க^{இ} = க^{அ - இ}$,

(iii) $(க^{அ})^{இ} = க^{அஇ}$,

(iv) $(கந)^{இ} = க^{இ}ந^{இ}$,

என்னும் நான்கு தேற்றங்கள் உண்மையாகுமென நிறுவுவோம்.

129. தேற்றம் I. அ, இ என்பன நேர் முழுவெண்களாயின், $க^{அ} \times க^{இ} = க^{அ + இ}$ என நிறுவல்.

வரைவிலக்கணத்தின்படி,

$க^{அ} = க \times க \times க \times \ldots\ldots\ldots$ அ காரணிகள் வரைக்கும்;

$க^{இ} = க \times க \times க \times \ldots\ldots\ldots$ இ காரணிகள் வரைக்கும்;

ஆகவே, $க^{அ} \times க^{இ} = (க \times க \times க \times \ldots$ அ காரணிகள் வரைக்கும்$) \times (க \times க \times க \times \ldots\ldots$ இ காரணிகள் வரைக்கும்$)$

$= க \times க \times க \times \ldots\ldots (அ + இ)$ காரணிகள் வரைக்கும்

$= க^{அ + இ}$, வரை விலக்கணத்தின்படி.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ என்பதும் ஒரு நேர் முழுவெண்ணுயின்,

$$க^{அ} \times க^{இ} \times க^{உ} = க^{அ+இ+உ}$$

அதுபோல, $க^{அ} \times க^{இ} \times க^{உ} \times க^{எ} \times \ldots = க^{அ+இ+உ+எ+\ldots}$

130. தேற்றம் II. அ, இ என்பன நேர்முழுவெண்களாயிருக்க, அ > இ ஆயின், $க^{அ} \div க^{இ} = க^{அ-இ}$ என நிறுவல்.

வரைவிலக்கணத்தின்படி,

$$க^{அ} = க \times க \times க \times \ldots \text{ அ காரணிகள் வரைக்கும்;}$$

$$க^{இ} = க \times க \times க \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்;}$$

ஆகவே, $\dfrac{க^{அ}}{க^{இ}} = \dfrac{க \times க \times க \times \ldots \text{ அ காரணிகள் வரைக்கும்}}{க \times க \times க \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்}}$.

அ > இ ஆதலால், மேலுள்ள பின்னத்தின் பகுதியிலுள்ள இ காரணிகளுந் தொகுதியிலுள்ள இ காரணிகளோடு வெட்டப்பட அ − இ காரணிகள் விடப்படும்.

$$\therefore க^{அ} \div க^{இ} = க \times க \times க \times \quad (அ - இ) \text{ காரணிகள் வரைக்கும்.}$$

$= க^{அ-இ}$, வரைவிலக்கணத்தின்படி.

அதுபோல, இ > அ ஆயின், $க^{அ} \div க^{இ} = \dfrac{1}{க^{இ-அ}}$ ஆகும்.

131. தேற்றம் III. அ, இ என்பன நேர்முழுவெண்களாயின், $(க^{அ})^{இ} = க^{அஇ}$ என நிறுவல்.

$$(க^{அ})^{இ} = க^{அ} \times க^{அ} \times க^{அ} \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்}$$

$$= க^{அ+அ+அ+\ldots \text{ இ உறுப்புக்கள் வரைக்கும்}}$$

$$= க^{அஇ}$$

132. தேற்றம் iv. இ என்பது ஒரு நேர்முழுவெண்ணுயின் $(கந)^{இ} = க^{இ}ந^{இ}$ என நிறுவல்.

வரைவிலக்கணத்தின்படி,

$$(கந)^{இ} = கந \times கந \times கந \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்}$$

$$= (க \times க \times க \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்}) \times (ந \times ந \times ந \times \ldots \text{ இ காரணிகள் வரைக்கும்})$$

$$= க^{இ} \times ந^{இ}$$

$$= க^{இ}ந^{இ}.$$

133. குறிகாட்டிகளெல்லாம் நேர்முழுவெண்களாகக் கொள்ளப்பட்டே இம்முடிபுகள் பெறப்பட்டன. எனினும், குறிகாட்டி $க^{\frac{ப}{ம}}$ என்பதிற்போன்று பின்னவடிவத்திலுள்ளனவற்றையும் $க^{0}$ என்பதிற் போன்று பூச்சிய வடிவத்திலுள்ளனவற்றையும் $க^{-இ}$ என்பதிற் போன்று எதிரெண் வடிவத்திலுள்ளனவற்றையும் வழங்கல் பயன்படும்; வழங்கும்போது நேர்முழுவெண்களுக்கு ஒரு விதியும், பின்னங்கள், பூச்சியம், எதிரெண்கள் என்பனவற்றிற்கு வேறு விதியும் விதித்தல் இசைவாகாது; இசைவாகும் பொருட்டு அ, இ என்பன எவ்வெண்களாயிருந்தாலும், மேலே தந்த நான்குவிதிகளும் உண்மையெனக் கொள்வோம்.

134. ப, ம என்பன நேர்முழுவெண்களாயின், $அ^{\frac{ப}{ம}}$ என்பதற்குப் பொருள் காணல்.

$க^{அ} \times க^{இ} = க^{அ+இ}$ என்பது அ, இ என்பனவற்றினுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் உண்மை எனக் கொள்வதால், அ, இ என்பனவற்றை $\dfrac{ம}{ப}$ என்பதால் இடம்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பெயர்க்க நாம் பெறுவது

$$க^{\frac{ப}{ம}} \times க^{\frac{ப}{ம}} = க^{\frac{ப}{ம}+\frac{ப}{ம}} = க^{\frac{2ப}{ம}}$$

அதுபோல, மூன்று காரணிகளுக்குத் தொடர்ந்து செல்ல,

$$க^{\frac{ப}{ம}} \times க^{\frac{ப}{ம}} \times க^{\frac{ப}{ம}} = க^{\frac{3ப}{ம}}$$

இவ்வாறு ம காரணிகளுக்குத் தொடர்ந்து செல்ல,

$$க^{\frac{ப}{ம}} \times க^{\frac{ப}{ம}} \times க^{\frac{ப}{ம}} \times \quad \ldots \text{ ம காரணிகள்} = க^{\frac{ப}{ம}\cdot ம}$$

அதாவது, $\left(க^{\frac{ப}{ம}}\right)^{ம} = க^{ப}$

ம ஆம் மூலத்தை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$க^{\frac{ப}{ம}} = \sqrt[ம]{க^{ப}}$$

135. க என்பது பூச்சிய மன்றெனின், க° என்பதற்குப் பொருள் காணல்.

$க^{அ} \times க^{இ} = க^{அ+இ}$ என்பது அ, இ என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்களெல்லாவற்றிற்கும் உண்மையெனக் கொள்வதால், அ என்பதை 0 ஆல் இடம் பெயர்க்க, நாம் பெறுவது

$$க^{\circ} \times க^{இ} = க^{\circ+இ} = க^{இ}$$

$$\therefore\ க^{\circ} = \frac{க^{இ}}{க^{இ}}$$

$$= 1.$$

ஆகவே, பூச்சியத்தைக் குறிகாட்டியாகப் பெற்ற எவ்வெண்ணும் 1 க்குச் சமன்.

136. $க^{-இ}$ என்பதற்குப் பொருள் காணல்.

$க^{அ} \times க^{இ} = க^{அ+இ}$ என்பது அ, இ என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்கள் யாவற்றிற்கும் உண்மை எனக் கொள்வதால் அ என்பதை $-இ$ என்பதால் இடம் பெயர்க்க, நாம்பெறுவது.

$$க^{-இ} \times க^{இ} = க^{-இ+இ} = க^{\circ} =$$

$$\therefore\ க^{-இ} = \frac{1}{க^{இ}}.$$

அதுபோல, $க^{இ} = \frac{1}{க^{-இ}}$.

137. மேற்கூறியவற்றைப் பயன்படுத்தும் உதாரணங்கள் பின்வருமாறு :

உ---ம்.

1. பின் வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க;

(i) $அ^{\frac{1}{3}} \times அ^{\frac{1}{4}}$, (ii) $125^{\frac{1}{3}}$, (iii) $க^{\frac{3}{4}} \div க^{-\frac{1}{4}}$.

(i) $அ^{\frac{1}{3}} \times அ^{\frac{1}{4}} = அ^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$.

$$= அ^{\frac{7}{12}}.$$

(ii) $125^{\frac{1}{3}} = \left(5^{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$= 5^{3\times\frac{1}{3}}$$

$$= 5^{1}$$

$$= 5.$$

(iii) $க^{\frac{3}{4}} \div க^{-\frac{1}{4}} = க^{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})}$

$$= க^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}$$

$$= க^{1}$$

$$= க.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

2. பின்வருவனவற்றை நேர்க்குறிகாட்டியோடு எழுதுக:

(i) $3x^{-\frac{2}{3}}$, (ii) $\frac{4அ^{-2}க^{3}}{5ந^{4}இ^{-5}}$.

(i) $3x^{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$.

(ii) $\frac{4அ^{-2}க^{3}}{5ந^{4}இ^{-5}} = \frac{4இ^{5}க^{3}}{5அ^{2}ந^{4}}$.

உ—ம்.

3. பின்வருவதை மூலக்குறிக்குக் கீழ்பட்ட குறிகாட்டியோடு எழுதுக: $க^{-\frac{3}{5}}\div 3அ^{-\frac{1}{2}}$.

$$\frac{க^{-\frac{3}{5}}}{3அ^{-\frac{1}{2}}}=\frac{அ^{\frac{1}{2}}}{3க^{\frac{3}{5}}}=\frac{\sqrt{அ}}{3\sqrt[5]{க^{3}}}.$$

பயிற்சி 22 (அ)

1. பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களை எழுதுக:—

(i). $அ^{\frac{1}{2}}\times அ^{\frac{1}{3}}$, (ii). $இ^{\frac{3}{4}}\times இ^{-\frac{2}{3}}$, (iii). $க^{\frac{4}{5}}\div க^{-\frac{1}{5}}$,

(iv). $ந^{-\frac{2}{5}}\div ந^{-\frac{1}{2}}$.

2. பின்வருவனவற்றை முழுவெண்வடிவிலே தருக:—

(i). $8^{\frac{1}{3}}$, (ii). $81^{\frac{1}{4}}$, (iii). $256^{\frac{1}{8}}$, (iv). $(-216)^{\frac{1}{3}}$.

3. பின்வருவனவற்றை மூலக்குறியின்றி எழுதுக:—

(i). $\sqrt{அ^{3}}$, (ii). $\sqrt[3]{-8இ^{2}}$, (iii). $\sqrt[4]{16க^{2}}$,

(vi). $\sqrt[3]{-64ந^{-4}}$.

4. பின்வருவனவற்றை மூலக்குறியோடு எழுதுக:—

(i). $அ^{\frac{2}{3}}$, (ii). $இ^{-\frac{3}{4}}$, (iii). $ப^{\frac{4}{5}}$, (iv). $ம^{-\frac{5}{6}}$.

5. $1296^{\frac{3}{4}}=4^{\frac{3}{2}}\times 243^{\frac{3}{5}}$ எனக் காட்டுக.

6. $\sqrt[3]{-64அ^{12}இ^{3}}=-4அ^{4}\sqrt[4]{இ^{4}}$ என நிறுவுக.

பின்வருவனவற்றை நேர்க்குறிகாட்டியோடு எழுதுக:-

7. $3அ^{-\frac{1}{3}}$.

8. $4அ^{-\frac{3}{4}}$.

9. $2அ^{-2}இ^{3}$.

10. $5அ^{-3}இ^{-4}$

11. $\frac{1}{5க^{-2}}$.

12. $\frac{1}{6க^{-\frac{1}{3}}}$.

13. $\frac{3அ^{-2}இ^{3}}{4க^{2}ந^{-3}}$.

14. $\frac{3அ^{-2}க^{3}}{7இ^{-3}ந^{2}}$.

15. $3க^{\frac{1}{2}}\times 5ந^{-1}$

16. $அ^{-2}க^{-3}\div 4த$.

17. $\frac{1}{\sqrt[3]{க^{-1}}}$.

18. $\frac{3}{\sqrt[3]{த^{-2}}}$.

பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

19. $2அ^{\frac{1}{3}}\times 3அ^{-\frac{1}{4}}$.

20. $3அ^{\frac{1}{4}}\div 4அ^{-\frac{1}{5}}$.

21. $அ^{-\frac{1}{2}}\div 6அ^{-\frac{2}{3}}$.

22. $\frac{4க^{-1}}{க^{-\frac{1}{4}}}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

23. $\dfrac{ந}{ந^{-1}}$.

24. $2க^{-அ} \div க^{-இ}$

25. $2க^{-இ} \times 3க^{அ}$

26. $3\left(க^{-1}ந^{-2}\right)^{3}$

27. $\dfrac{\left(க^{-\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{3}}\right)^{3}}{6}$

28. $243^{\frac{1}{5}}$.

29. $(512)^{-\frac{1}{3}}$.

30. $(-1728)^{-\frac{1}{3}}$

138. **குறிகாட்டி விதிகள்** பொதுமைப்பாடடைந்துள்ளன என்று நாம் கொள்ளுவதால், பெருக்கல் முதலாய செய்கைகளெல்லாம் பின்னவெதிரெண் குறிகாட்டிகளோடு கூடிய கோவைகளுக்கும் பொருந்தும் :—

உ—ம்.

1. $2க^{-\frac{1}{2}}+1$ என்பதை $2க^{\frac{1}{2}}-1$ என்பதாற் பெருக்குக.

இவற்றை க இன் இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதிப் பெருக்குவோம் :

$$\begin{array}{l} 1+2க^{-\frac{1}{2}} \\ \underline{2க^{\frac{1}{2}}-1} \\ 2க^{\frac{1}{2}}+4 \\ \underline{\quad -1-2க^{-\frac{1}{2}}} \\ 2க^{\frac{1}{2}}+3-2க^{-\frac{1}{2}} \end{array}$$

உ—ம்

2. $4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}+16க+ந^{-1}$ என்பதை $4க^{\frac{1}{2}}+ந^{-\frac{1}{2}}-2க^{\frac{1}{4}}ந^{-\frac{1}{4}}$ என்பதால் வகுக்க.

இவற்றை க இன் இறங்கடுக்கு வரிசையில் எழுதிவகுப் போம்.

$$\begin{array}{l} 4க^{\frac{1}{2}}-2க^{\frac{1}{4}}ந^{-\frac{1}{4}}+ந^{-\frac{1}{2}}\Big)\,16க+4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}+ந^{-1}\Big(4க^{\frac{1}{2}}+2க^{-\frac{1}{4}}ந^{\frac{1}{4}}+ந^{-\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad \underline{16க-8க^{\frac{3}{4}}ந^{-\frac{1}{4}}+4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}} \\ \qquad\qquad\quad 8க^{\frac{3}{4}}ந^{-\frac{1}{4}} \\ \qquad\qquad\quad \underline{8க^{\frac{3}{4}}ந^{-\frac{1}{4}}-4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}+2க^{\frac{1}{4}}ந^{-\frac{3}{4}}} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}-2க^{\frac{1}{4}}ந^{-\frac{3}{4}}+ந^{-1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{4க^{\frac{1}{2}}ந^{-\frac{1}{2}}-2க^{\frac{1}{1}}ந^{-\frac{3}{4}}+ந^{-1}} \end{array}$$

உ—ம்.

3. $\left(\dfrac{க^{3}}{ய^{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\dfrac{ய^{3}}{ந^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \left(\dfrac{க^{-2}}{நய^{-3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$ என்பதைச் சுருக்கி நேர்முழுவெண் குறிகாட்டிகளோடு தருக.

$$\left(\frac{க^{3}}{ய^{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{ய^{3}}{ந^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{க^{-2}}{நய^{-3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{க^{\frac{3}{2}}}{ய^{2}} \times \frac{ய}{ந^{-\frac{1}{3}}} \div \frac{க^{\frac{2}{3}}}{ந^{-\frac{1}{3}}ய}$$

$$=\frac{க^{\frac{3}{2}}}{ய^{2}} \times யந^{+\frac{1}{3}} \div \frac{க^{\frac{2}{3}}ந^{\frac{1}{3}}}{ய}$$

$$=\frac{க^{\frac{3}{2}}}{ய^{2}} \times யந^{\frac{1}{3}} \times \frac{ய}{க^{\frac{2}{3}}ந^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{க^{\frac{3}{2}}}{க^{\frac{2}{3}}}$$

$$=க^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}$$

$$=க^{\frac{5}{6}}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்

4. $\dfrac{4\cdot 2^{இ} - 3\cdot 2^{இ-1}}{2^{இ-1} - 2^{இ-2}}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{4\cdot 2^{இ} - 3\cdot 2^{இ-1}}{2^{இ-1} - 2^{இ-2}}$$

$$=\frac{2^{இ-1}(4\cdot 2-3)}{2^{இ-2}(2-1)}$$

$$=2^{(இ-1)-(இ-2)}\quad\frac{8-3}{1}$$

$$=2\cdot 5$$

$$=10.$$

பயிற்சி 22 (ஆ)

பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க:—

1. $\left(க^{\frac{1}{3}}+ந^{\frac{1}{3}}\right)\left(க^{\frac{1}{3}}-ந^{\frac{1}{3}}\right)$.

2. $\left(க^{-\frac{2}{3}}+1\right)\left(க^{-\frac{2}{3}}-1\right)$.

3. $\left(2க^{\frac{1}{2}}-1\right)^{2}$.

4. $\left(அ^{\frac{1}{2}}+2\right)\left(அ^{\frac{1}{2}}-3\right)$.

5. $\left(3அ^{\frac{1}{2}}-2இ^{\frac{1}{3}}\right)\left(2அ^{\frac{1}{2}}+3இ^{\frac{1}{3}}\right)$.

6. $\left(4அ^{\frac{2}{3}}-1\right)\div\left(2அ^{\frac{1}{3}}+1\right)$.

7. $க+க^{\frac{1}{3}}+க^{-\frac{1}{3}}$ என்பதை $க^{\frac{1}{3}}-க^{-\frac{1}{3}}$ என்பதாற் பெருக்குக.

8. $க^{\frac{2}{3}}-2க^{\frac{1}{3}}ந+4ந^{2}$, $க^{\frac{2}{3}}+2க^{\frac{1}{3}}ந+4ந^{2}$ என்பனவற்றின் பெருக்கத்தைக் காண்க.

9. $18ப^{-3}+3+7ப^{-1}$ என்பதை $1+3ப^{-1}$ என்பதால் வகுக்க.

10. $8ப+27ம-வ+18பமவ$ என்பதை $2ப^{\frac{1}{3}}+3ம^{\frac{1}{3}}-வ^{\frac{1}{3}}$ என்பதால் வகுக்க.

11. $6+4ப+5ப^{\frac{1}{3}}+ப^{-\frac{1}{3}}-12ப^{\frac{2}{3}}$ என்பதன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

பின்வருவனவற்றைச் சுருக்கி நேர்க்குறிகாட்டிகளோடு தருக:

12. $\left[\left(அ^{-2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{4}}$.

13. $\left\{\left(அ^{-\frac{1}{5}}\right)^{10}\right\}^{\frac{3}{2}}$.

14. $\left(க^{\frac{1}{3}}\right)^{2}\times\left(க^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{3}}$

15. $\left(2க^{-\frac{1}{3}}\right)^{4}\times\left(-27க^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

16. $\left(\dfrac{27க^{3}}{ந^{-3}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

17. $\left(\dfrac{4க^{2}}{9ந^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

18. $\left(\dfrac{ப^{3}}{ம^{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\dfrac{வ^{2}}{ம^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}}\div\dfrac{ப^{-\frac{3}{2}}}{மவ^{-\frac{2}{3}}}$.

19. $\left(\dfrac{ப^{\frac{2}{3}}}{ம^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\times\left(\dfrac{வ^{-\frac{3}{4}}}{ப^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\div\dfrac{ப^{\frac{5}{6}}வ^{-\frac{1}{2}}}{ம^{-\frac{1}{4}}}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

20. $\left\{\sqrt[3]{\left(\text{க}^{-\frac{3}{4}}\text{ந}^{\frac{1}{2}}\right)^{2}}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$

21. $\sqrt[4]{\text{க}^{-1}\sqrt{\text{ந}^{4}}} \div \sqrt{\text{ந}\sqrt[4]{\text{க}}}.$

22. $\left(\frac{\left(\text{ப}^{-\frac{1}{3}}\text{க}^{\frac{2}{3}}\right)^{2}}{\text{க}^{-1}\text{ப}}\right)^{2} \div \sqrt[3]{\left(\text{ப}^{-1}\text{க}^{2}\right)^{5}}.$

23. $\left(\frac{\text{அ}^{-\frac{1}{2}}\text{க}^{\frac{2}{3}}}{\text{க}^{-\frac{1}{2}}\text{அ}^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}} \div \sqrt{\left(\text{அ}^{-1}\text{க}\right)^{\frac{7}{4}}}.$

24. $\sqrt{(\text{அ}+\text{இ})^{3}} \times (\text{அ}+\text{இ})^{-\frac{1}{2}}$

25. $\frac{(\text{அ}-\text{இ})^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\text{அ}-\text{இ})^{-1}}}.$

26. $\left\{(\text{க}-\text{ந})^{-2}\right\}^{\text{இ}} \div \left\{(\text{க}+\text{ந})^{\text{இ}}\right\}^{2}.$

27. $\left\{\frac{\sqrt{\text{க}}}{\sqrt[4]{\text{ந}^{-1}}} \cdot \left(\frac{\text{ந}^{\frac{1}{2}}}{\text{க}^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{\text{க}^{-\frac{1}{2}}}{\text{ந}^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-1}\right\}^{6}.$

28. $\frac{\text{க}-27\text{ந}}{\text{க}^{\frac{2}{3}}+3\text{க}^{\frac{1}{3}}\text{ந}^{\frac{1}{3}}+9\text{ந}^{\frac{2}{3}}}.$

29. $\frac{6\text{க}-13\sqrt{\text{கந}}+6\text{ந}}{6\text{க}+5\sqrt{\text{கந}}-6\text{ந}}.$

30. $\frac{4\text{க}-6\sqrt{\text{க}}}{2\text{க}-\sqrt{\text{க}}-3}.$

31. $\frac{\sqrt[3]{\text{க}^{2}}-4\sqrt[3]{\text{க}^{-2}}}{\sqrt[3]{\text{க}^{2}}-4+4\sqrt[3]{\text{க}^{-2}}}.$

32. $\frac{2^{\text{இ}-1}}{2^{\text{இ}(\text{இ}-1)}} \div \frac{4^{\text{இ}-1}}{\left(2^{\text{இ}+1}\right)^{\text{இ}-1}}.$

33. $\frac{3^{\text{இ}}\times\left(3^{\text{இ}-1}\right)^{\text{இ}}}{9\times3^{\text{இ}-1}} \div \frac{\left(3^{\text{இ}-1}\right)^{\text{இ}+1}}{6.3^{\text{இ}-1}}.$

34. $\frac{5.3^{\text{இ}}-9.3^{\text{இ}-2}}{3^{\text{இ}}-3^{\text{இ}-1}}.$

35. $\frac{4.2^{\text{இ}}-8.2^{\text{இ}-3}}{4.2^{\text{இ}}+8.2^{\text{இ}-3}}.$

விகிதமுறு மூலங்கள்

139. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ என்பனபோன்ற எண்களுடைய பெறுமானங்களை வேண்டிய யாதுமொரு தசம தானத் தொகைக்குத் திருத்தமாகக் காணலாமன்றி இரு முழுவெண்களின் விகிதமாகச் செம்மையாக உரைத்தல் இயலாது ; ஆகவே, அவை **விகிதமுறு வெண்கள்** எனப்படும்; ப, ம என்பன முழுவெண்களாயின், $\frac{\text{ப}}{\text{ம}}$ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தத்தக்க எண்களெல்லாம் **விகிதமுறுமெண்கள்** எனப்படும். யாதுமொரு விகிதமுறுமெண்ணின் மூலம் விகிதமுருதாயின், அது **விகிதமுருமூலம்** எனப்படும் ; $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ என்பன விகிதமுருமூலங்களுக்கு உதாரணங்களாகும்: எனினும், $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{27}$ என்பன விகிதமுருமூலங்களாகா.

ஒரு விகிதமுரு மூலத்தின் வரிசை அதன் மூலக்குறியாற் காட்டப்படும் ; $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ என்பன முறையே இரண்டாம் மூன்றும் வரிசைகளுடையன எனலாம் ; இரண்டாம் வரிசையிலுள்ளனவே பெரும்பான்மையாக நிகழ்வன. அவை **இருபடி விகிதமுரு மூலங்கள்** எனப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு விகிதமுறுங்கணியம் வேண்டிய யாதுமொரு வரிசையுடைய விகிதமுறா வடிவில் உணர்த்தப்படலாம்; உதாரணமாக, $2=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[\text{இ}]{2^{\text{இ}}}$. யாதுமொரு வரிசையிலுள்ள ஒரு விகிதமுறா மூலம் வேறொரு வரிசையிலுள்ள ஒன்றாக மாற்றப்படலாம்.

உ—ம்.

1. $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{5^2}$;

2. $\sqrt[\text{இ}]{\text{க}}=\text{க}^{\frac{1}{\text{இ}}}=\text{க}^{\frac{\text{அ}}{\text{அஇ}}}=\sqrt[\text{அஇ}]{\text{க}^{\text{அ}}}$.

140. ஒரு விகிதமுறு மூலத்தை இரு காரணிகளாகப் பிரிக்குமிடத்து ஒரு காரணி விகிதமுறு கணியமாயும் ஒரு காரணி விகிதமுறா மூலமாயும் வருமாயின், அவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட விகிதமுறாமூலந் தனது எளிய வடிவத்தில் இருக்கின்றதெனப்படும்.

உ—ம்.

$$\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}.$$

ஒரு விகிதமுறா மூலத்தின் விகிதமுறு காரணி மூலக் குறிக்குக் கீழ்க் கொண்டுவரப்படலாம்.

உ—ம்.

$$5\sqrt{2}=\sqrt{25\times 2}=\sqrt{50}.$$

141. ஒவ்வோரெண்ணிற்கும் இரண்டு வர்க்க மூலங்கள் உண்டு ; உதாரணமாக 4 இற்கு 2, -2 என்னும் இரண்டு வர்க்க மூலங்கள் உண்டு. எனினும், $\sqrt{4}$ என்பது $+2$ என்பதையே குறிப்பதாகக் கொள்ளப்படும்.

142. விகிதமுறா மூலங்கள் ஒரே விகிதமுறாக்காரணியோடு உணர்த்தப்படத்தக்கனவாயின், அவை ஒத்த மூலங்கள் என்றும், அவ்வாறு உணர்த்தப்படாவாயின் அவை ஒவ்வாத மூலங்கள் என்றுங் கூறப்படும். $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$ என்பன ஒத்த மூலங்களுக்கும் $3\sqrt{3}$, $6\sqrt{5}$ என்பன ஒவ்வாத மூலங்களுக்கும் உதாரணங்களாகும்.

விகிதமுறா மூலங்கள் கூட்டப்படுமிடத்து, ஒத்தன எளிய வடிவத்திற் கொண்டுவரப்படத் தம்முட் சேர்ந்து நிற்கும்; ஒவ்வாதன அவ்வாறு கொண்டுவரப்படத் தம்முட் சேராது நிற்கும்.

உ—ம்.

1. $3\sqrt{20}$, $5\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{4}{5}}$. இவற்றைக் கூட்டுக.

$$3\sqrt{20}+5\sqrt{5}+\sqrt{\frac{4}{5}}$$
$$=3\sqrt{4\times 5}+5\sqrt{5}+\sqrt{\frac{4}{25}\times 5}$$
$$=6\sqrt{5}+5\sqrt{5}+\frac{2}{5}\sqrt{5}$$
$$=\left(6+5+\frac{2}{5}\right)\sqrt{5}$$
$$=\frac{57}{5}\sqrt{5}.$$

உ—ம்.

2. $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{12}$ என்பனவற்றைக் கூட்டுக.

$$3\sqrt{2}+5\sqrt{12}$$
$$=3\sqrt{2}+5\sqrt{4\times 3}$$
$$=3\sqrt{2}+10\sqrt{3}.$$

143. இரண்டு விகிதமுறா மூலங்களின் பெருக்கத்தைக் காண்பதற்கு அம்மூலங்கள் ஒரே வரிசையை யுடையனவாயின், விகிதமுறு காரணிகளையும் விகிதமுறாக்காரணிகளையுந் தனித்தனி பெருக்குக ; அவை வேறு வேறு வரிசையையுடையனவாயின், அவற்றைப் பொதுமடங்குகளுட் சிறிய வரிசைக்குளாக்கிப் பெருக்குக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

1. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ என்பனவற்றின் பெருக்கத்தைக் காண்க.

$$4\sqrt{3}\times5\sqrt{3}$$
$$=4\times5\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$$
$$=20\times3$$
$$=60.$$

உ—ம்.

2. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt[3]{3}$ என்பனவற்றின் பெருக்கத்தைக் காண்க.

$$4\sqrt{3}\times5\sqrt[3]{3}$$
$$=4\times5\times\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}$$
$$=4\times5\times\sqrt[6]{3^3}\times\sqrt[6]{3^2}$$
$$=20\sqrt[6]{27}\times\sqrt[6]{9}$$
$$=20\sqrt[6]{243}.$$

144. விகிதமுறா வெண்களைத் தம் பகுதிகளாக உள்ள பின்னங்கள் கொண்ட ஒரு கோவையைச் சுருக்குதற்கண் அப் பின்னங்களுடைய பகுதிகளை விகிதமுறுமெண்களாக்கிச் செல்லுதல் அச்செய்கையை எளிதாக்கும்.

உ—ம்.

$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{6}}$. இதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}-\frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{3}-\frac{6\sqrt{6}}{6}$$
$$=\frac{9\sqrt{2}+10\sqrt{3}-6\sqrt{6}}{6}$$

இங்கு, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ என்பன முறையே $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ என்பனவற்றை விகிதமுறச்செய்யுங் காரணிகள் ஆதல் அறிக.

பயிற்சி 22 (இ)

பின்வருவனவற்றை முழுவெண்களுடைய வர்க்கமூலங்களாக்குக:

1. $8\sqrt{2}$. 2. $2\sqrt{8}$. 3. $2\sqrt{3}$.
4. $3\sqrt{3}$. 5. $4\sqrt{5}$. 6. $3\sqrt{7}$.
7. $2\sqrt{11}$. 8. $4\sqrt{9}$.

பின்வருவனவற்றை விகிதமுறு பகுதிகளுள்ளன வாக்குக:

9. $\frac{5}{\sqrt{2}}$. 10. $\frac{8}{\sqrt{3}}$. 11. $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$.
12. $\frac{3}{\sqrt{3}-1}$. 13. $\frac{3}{3-\sqrt{2}}$. 14. $\frac{4}{2+\sqrt{3}}$.
15. $\frac{1}{\text{அ}-\sqrt{\text{இ}}}$. 16. $\frac{\text{அ}}{2\text{அ}+\sqrt{3}\,\text{இ}}$.

பின்வருவனவற்றை ஏறுவரிசையில் ஒழுங்கு படுத்துக:

17. $5\sqrt{8}$, $4\sqrt{18}$, $2\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$.
18. $7\sqrt{12}$, $4\sqrt{27}$, $2\sqrt{48}$, $\sqrt{108}$.
19. $6\sqrt{20}$, $4\sqrt{36}$, $3\sqrt{48}$, $2\sqrt{72}$.
20. $6\sqrt{180}$, $4\sqrt{243}$, $3\sqrt{288}$, $3\sqrt{576}$.

பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக:

21. $5\sqrt{2}\times2\sqrt{2}$. 22. $5\sqrt{6}\times2\sqrt{24}$.
23. $2\sqrt{5}\times\sqrt{20}$. 24. $2\sqrt[3]{2}\times3\sqrt[3]{4}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

25. $5\sqrt[3]{3}\times 2\sqrt[3]{9}$.

26. $\dfrac{5\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[3]{16}}$.

27. $\dfrac{3\sqrt[3]{9}}{8\sqrt[3]{243}}$.

28. $\sqrt{\text{அஇ}^3}\times \text{அ}\sqrt{\text{அஇ}}$.

29. $\sqrt[3]{54\text{அஇ}^3}$.

30. $\dfrac{\text{க}}{\text{ந}^2}\sqrt{\dfrac{2\text{ந}^3}{\text{க}}}$.

31. $\dfrac{\text{அ}}{3\text{க}}\sqrt[3]{\dfrac{27\text{க}^2}{\text{அ}^2}}\div\dfrac{1}{\sqrt[3]{\text{க}}}$.

32. $\dfrac{2\sqrt{\text{அ}}\times 3\sqrt{\text{அ}}}{\text{இ}}\div\dfrac{1}{3\sqrt{\text{இ}}\times 2\sqrt{\text{இ}}}$.

33. $\sqrt{72}+\sqrt{18}-\sqrt{128}$.

34. $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}$.

35. $\sqrt[3]{192}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{81}$.

36. $3\text{அ}^2\sqrt{\text{க}}+2\text{அ}\sqrt{\text{அ}^2\text{க}}-\text{அ}^2\sqrt{25\text{க}}$.

37. $\sqrt{9\text{அ}^3\text{க}^3}-\text{அ}\sqrt{16\text{அக}^3}+\text{க}\sqrt{\text{அ}^3\text{க}}$.

38. $\sqrt[3]{8\text{அ}^5\text{க}^5}-5\text{அ}\sqrt[3]{\text{அ}^2\text{க}^5}+3\text{க}\sqrt[3]{\text{அ}^5\text{க}^2}$.

145. ஈருறுப்புக்களையுடைய இருபடி விகிதமுரு மூலங்கள் ஈருறுப்பிருபடி விகிதமுரு மூலங்களெனப்படும். அத்தகைய மூலங்கள் இரண்டு குறிபற்றியே வேறுபடின், அவை ஒன்றுக்கொன்று இணை எனப்படும். இரண்டு இணை விகிதமுரு மூலங்களின் பெருக்கம் என்றும் விகிதமுறும்; இவ்வண்ணம் $\sqrt{\text{க}}-\sqrt{\text{ந}}$ என்பது $\sqrt{\text{க}}+\sqrt{\text{ந}}$ என்பதற்கு இணையாகும்; அவற்றின் பெருக்கம் க — ந ஆதல் அறிக.

146. ஈருறுப்பிருபடி விகிதமுரு மூலமொன்றைத் தன் பகுதியாயுள்ள ஒரு பின்னத்தைச் சுருக்குதற்கு அப்பகுதியின் இணையாலே அதனுடைய பகுதியையுந் தொகுதியையும் பெருக்கி அப்பகுதியை விகிதமுறுமெண்ணுக்கிச் செல்லல் பயன் விளைவிக்கும்.

உ—ம்.

1. $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ என்பதனைச் சுருக்குக.

$$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\,(2\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4\cdot 3-4\sqrt{6}+2}{4\cdot 3-2}$$

$$=\frac{14-4\sqrt{6}}{10}$$

$$=\frac{7-2\sqrt{6}}{5}.$$

உ—ம்.

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{\text{அ}}-\sqrt{\text{அ}+1}}$ என்பதை விகிதமுறு பகுதியுடையதாக்குக.

$$\frac{1}{1+\sqrt{\text{அ}}-\sqrt{\text{அ}+1}}=\frac{1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1}}{(1+\sqrt{\text{அ}}-\sqrt{\text{அ}+1})\,(1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1}}{(1+\sqrt{\text{அ}})^2-(\text{அ}+1)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1}}{(1+2\sqrt{\text{அ}}+\text{அ})-(\text{அ}+1)}$$

$$=\frac{1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1}}{2\sqrt{\text{அ}}}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{அ}}(1+\sqrt{\text{அ}}+\sqrt{\text{அ}+1})}{2\text{அ}}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{அ}}+\text{அ}+\sqrt{\text{அ}(\text{அ}+1)}}{2\text{அ}}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 22 (ஈ)

பின்வருவனவற்றினுடைய வர்க்கங்களைக் காண்க.

1. $\sqrt{\text{அ}+1}+\sqrt{\text{அ}-1}$.
2. $\sqrt{1-2\text{அ}}+\sqrt{1+2\text{அ}}$.
3. $\sqrt{3\text{க}-\text{ந}}-\sqrt{2(\text{க}-2\text{ந})}$.
4. $\sqrt{\text{க}+\text{ந}}-\sqrt{\text{க}-\text{ந}}$.

பின்வருவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

5. $1\div(5-2\sqrt{6})$.
6. $1\div(8-3\sqrt{7})$.
7. $(7+4\sqrt{3})\div(7-4\sqrt{3})$.
8. $(2-\sqrt{3})\div(2+\sqrt{3})$.
9. $\sqrt{\text{க}}(3\sqrt{\text{கந}}-\text{ந})\div(3\text{க}-\sqrt{\text{கந}})$.
10. $\left(\frac{1}{\text{அ}-\sqrt{\text{அஇ}}}+\frac{1}{\sqrt{\text{அஇ}}+\text{இ}}\right)\div\frac{1}{\sqrt{\text{அஇ}}}$.

பின்வருவனவற்றை விகிதமுறு பகுதிகளுள்ளன ஆக்குக.

11. $\frac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.
12. $\frac{5}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$.
13. $\frac{2\sqrt{\text{அ}}}{5-2\sqrt{\text{அ}}}$.
14. $\frac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$.
15. $\frac{1}{\sqrt{\text{அ}}-2\sqrt{\text{இ}}}$.
16. $\frac{2\sqrt{\text{அ}}+3\sqrt{\text{இ}}}{2\sqrt{\text{அ}}-3\sqrt{\text{இ}}}$.

17. $\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.
18. $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக.

19. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.
20. $\frac{5}{\sqrt{3}+1}+\frac{6}{\sqrt{3}-1}$.
21. $\frac{2\sqrt{\text{க}}+3}{2\sqrt{\text{க}}-3}-\frac{2\sqrt{\text{க}}-3}{2\sqrt{\text{க}}+3}$.
22. $\left(\sqrt{\text{க}}+\frac{1}{\sqrt{\text{க}}}\right)\div\left(\sqrt{\text{க}}-\frac{1}{\sqrt{\text{க}}}\right)$.

$\sqrt{2}=1\cdot414$, $\sqrt{3}=1\cdot732$, $\sqrt{5}=2\cdot236$ எனத் தரப்பட்டால், பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

23. $\frac{4\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}+1}$.
24. $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3+\sqrt{2}}$.
25. $\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$.
26. $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{4+\sqrt{2}}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 23.

மடக்கைக் கொள்கையும் மடக்கைகளுடைய பிரயோகங்களும்

மடக்கைக் கொள்கை

147. ப என்பது அ இன் க ஆம் அடுக்கு என்பதை $ப=அ^{க}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாற் காட்டலாம் ; இச்சமன்பாடுபற்றி க இற்கு வேறு வேறு பெறுமானங்கள் கொடுக்க, ப பெறும் ஒத்த பெறுமானங்கள் கணிக்கப்படலாம். உதாரணமாக, க இற்கு 1, 2, 3... என்னும் பெறுமானங்கள் கொடுக்க, ப பெறும் ஒத்த பெறுமானங்கள் அ, $அ^{2}$, $அ^{3}$ ... என்பனவாகும். இங்கு ப இன் பெறுமானத்தை க பற்றி அறிகின்றோம் ; மறுதலையாக க இன் பெறுமானத்தை ப பற்றி அறிய ஒரு சமன்பாடு வேண்டும். எனின், க ஆனது ப இற்குச் சமனாகும்படி அ என்னும் எண் உயர்த்தப்பட வேண்டிய அடுக்குக் குறி என்று கூறலாம். க என்னுங் குறிகாட்டியை ப இன் மடக்கை என்றும் அ என்பதை அம் மடக்கையின் அடி என்றுங் கொண்டால், க ஆனது அ என்னும் அடிக்கு ப இன் மடக்கை எனலாம். இதனை

$க=மட_{அ}\,ப$ என எழுதலாம்.

இச்சமன்பாடு க இன் பெறுமானத்தை ப இலே தருதல் காண்க. ஆயின், $ப=அ^{க}$ என்பதும் $க=மட_{அ}\,ப$ என்பதும் க, ப என்பனவற்றுள் ஒன்றோடு ஒன்று கொள்ளுந் தொடர்பைக் காட்டும். எனவே, அ என்பது 2 இற்குச் சமனெனக் கொண்டால் அடுக்குக் குறியீடு பற்றி $2^{1}=2, 2^{2}=4, 2^{3}=8$ ...... என்று எழுதப்படுவன வற்றை மடக்கைக் குறியீடுபற்றி $மட_{2}2=1$, $மட_{2}4=2$. $மட_{2}8=3$ .... என எழுதலாம்.

வ.இ. தந்த ஓரடிக்குத் தந்த ஒரெண்ணின் மடக்கையானது அவ்வெண்ணுக்குச் சமனாகும்படி அவ்வடி உயர்த்தப்பட வேண்டிய குறிகாட்டியாகும்.

148. பின்வரும் மேற் கோளுரைகள் இரண்டும் யாதுமொரு குறித்த அடியைச் சாராது எல்லா மடக்கைகளுக்கும் பொருந்தும் :

(1) எவ்வடிக்கும் 1 இன் மடக்கை பூச்சியமாகும்.

அ இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும், $அ^{\circ}=1$.

∴ அ என்பது எப்பெறுமானத்தைப் பெற்றாலும் $மட_{அ}1=0$.

(2) எவ்வடிக்கும் அவ்வடியின் மடக்கை 1 ஆகும்.

அ இனுடைய எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் $அ^{1}=அ$.

∴ அ என்பது எப்பெறுமானத்தைப் பெற்றாலும், $மட_{அ}அ=1$.

இனி, மடக்கைகளைப்பற்றிய நான்கு தேற்றங்களை நிறுவுவோம் :

149. தேற்றம் I. $மட_{அ}பம = மட_{அ}ப + மட_{அ}ம$ என நிறுவுதல்.

$ப=அ^{க}$ ஆயும் $ம=அ^{ந}$ ஆயும் இருக்க.

ஆயின், $க=மட_{அ}ப$, $ந=மட_{அ}ம$.

இனி, $பம=அ^{க}\times அ^{ந}$

$=அ^{க+ந}$

$\therefore மட_{அ}பம=க+ந$

$=மட_{அ}ப+மட_{அ}ம$.

அதுபோல, $மட_{அ}பமய = மட_{அ}ப+மட_{அ}ம+மட_{அ}ய$.

இதனைப் பின்வருமாறு சொல்பற்றி உரைக்கலாம் :

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு பெருக்கத்தின் மடக்கை அதனுடைய காரணிகளினுடைய மடக்கைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன்.

150. தேற்றம் II. $மட_{அ}\frac{ப}{ம} = மட_{அ}ப - மட_{அ}ம$ என நிறுவுதல்.

$ப = அ^{க}$ ஆயும் $ம = அ^{ந}$ ஆயும் இருக்க.

எனின், $க = மட_{அ}ப$, $ந = மட_{அ}ம$.

$$இனி, \frac{ப}{ம} = \frac{அ^{க}}{அ^{ந}}$$

$$= அ^{க - ந}$$

$$\therefore மட_{அ}\frac{ப}{ம} = க - ந$$

$$= மட_{அ}ப - மட_{அ}ம.$$

இதனைப் பின்வருமாறு சொல்பற்றி உரைக்கலாம் :

ஒரு பின்னத்தின் மடக்கை அதனுடைய தொகுதியின் மடக்கையிலிருந்து அதன் பகுதியின் மடக்கையைக் கழிக்க வரும் மீதிக்குச் சமன்.

151. தேற்றம் III. $மட_{அ}ப^{வ} = வ\ மட_{அ}ப$ என நிறுவுதல்.

$ப = அ^{க}$ ஆகுக.

$\therefore க = மட_{அ}ப.$

$$இனி, ப^{வ} = (அ^{க})^{வ}$$

$$= அ^{வக}$$

$$\therefore மட_{அ}ப^{வ} = வக$$

$$= வ.\ மட_{அ}ப.$$

இதனைப் பின்வருமாறு சொல்பற்றி உரைக்கலாம் :

ஓரெண்ணின் வ ஆம் அடுக்கின் மடக்கை அவ்வெண்ணின் மடக்கையை வ ஆற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்திற்குச் சமன்.

152. தேற்றம் IV. $ப = 10^{மட\ ப}$ என நிறுவல்.

$க = மட_{10}ப$ ஆகுக.

இதனை அடுக்குக் குறிவடிவத்தில் எழுத நாம் பெறுவது

$$ப = 10^{க};$$

ஆகவே, $ப = 10^{மடப}$

153. தேற்றம் V. $மட_{இ}ப = \frac{மட_{அ}ப}{மட_{அ}இ}$ என நிறுவல்.

$க = மட_{இ}ப$ ஆகுக.

$$\therefore இ^{க} = ப.$$

$$\therefore மட_{அ}இ^{க} = மட_{அ}ப.$$

$$\therefore க.\ மட_{அ}இ = மட_{அ}ப.$$

$$\therefore க = \frac{மட_{அ}ப}{மட_{அ}இ}.$$

$$\therefore மட_{இ}ப = \frac{மட_{அ}ப}{மட_{அ}இ}.$$

கி. தே. இதன்கண் ப = அ எனப் பிரதியிடுவோம் ;

எனின், $மட_{இ}அ = \frac{மட_{அ}அ}{மட_{அ}இ} = \frac{1}{மட_{அ}இ}.$

$$\therefore மட_{இ}அ.\ மட_{அ}இ = 1.$$

அதுபோல, $மட_{இ}அ.\ மட_{உ}இ.\ மட_{அ}உ = 1.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(முதன் முதலாக மடக்கைக் கொள்கையைக் கற்போர் இத்தேற்றத்தை விலக்கிக் கற்கலாம்.)

154. அடி 10 ஆயுள்ள மடக்கைகள் **பொது மடக்கைகள்** எனப்படும். பொதுமடக்கைகளில் அடி குறிக்கப்படும் வழக்கம் இல்லை. மட$_{10}5$, மட$_{10}8$ என்பன மட 5, மட 8 என்றே எழுதப்படும். முந்திய பிரிவுகளிலுள்ள முதன் மூன்று தேற்றங்களைப் பயன்படுத்தும் உதாரணங்கள் பின்வருமாறு :

உ—ம்

1. $3^4=81$ என்பதை மடக்கை வடிவத்தில் எழுதுக.
   வேண்டிய வடிவம் மட$_3 81=4$.

உ—ம்.

2. மட 648, மட$\sqrt[3]{324}$ என்பனவற்றை மட 2, மட 3 என்பனவற்றில் உணர்த்துக.

(i) மட 648 = மட $2^3\cdot3^4$ = மட 2^3 + மட 3^4 = 3 மட 2 + 4 மட 3.

(ii) மட$\sqrt[3]{324}$ = மட $(324)^{\frac{1}{3}}$ = மட $(2^2.3^4)^{\frac{1}{3}}$ = மட$2^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{4}{3}}$
= மட $2^{\frac{2}{3}}$ + மட $3^{\frac{4}{3}}$ = $\frac{2}{3}$ மட 2 + $\frac{4}{3}$ மட 3.

உ—ம்.

3. மட$\frac{3}{14}$ + மட$\frac{21}{4}$ = மட 3 − 3 மட 2 என நிறுவுக.

மட$\frac{3}{14}$ + மட$\frac{21}{4}$ = மட$\frac{3}{14}\times\frac{21}{4}$
= மட $\frac{9}{8}$
= மட9 − மட8
= மட3^2 − மட2^3
= 2 மட3 − 3 மட2.

பயிற்சி 23 (அ)

பின்வருவனவற்றை மடக்கை வடிவத்தில் எழுதுக :

1. $2^6=64$. 2. $3^5=243$. 3. $4^4=256$. 4. $5^3=125$.

பின்வருவனவற்றை மடக்கைக் குறியீடின்றி எழுதுக :

5. மட$_2 256=8$. 6. மட$_3 729=6$.

7. மட$_{\text{அ}}$ப = ம. 8. ப = மட$_{\text{இ}}$ம.

9. பின்வருவனவற்றை மட2, மட3, மட5 என்பனவற்றில் உணர்த்துக :
   மட 450 ; மட$\frac{72}{125}$.

10. மட2 = ·3010, மட3 = ·4771 ஆயின், மட$\sqrt[4]{768}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

பின்வருவனவற்றை மடஅ, மடஇ, மடஉ என்பனவற்றில் உணர்த்துக.

11. மட$\frac{\text{அ}}{\text{இஉ}}$. 12. மட$\frac{\text{அ}^2}{\text{இஉ}^2}$.

13. மட $\frac{\sqrt{\text{அ}}}{\text{இ}\sqrt{\text{உ}}}$. 14. மட $\frac{\sqrt[3]{\text{அ}}\cdot\sqrt[4]{\text{உ}}}{\sqrt{\text{இ}^3}}$.

15. மட$(144)^{\frac{1}{3}}\times\sqrt{192}=\frac{13}{3}$மட2 + $\frac{7}{6}$மட3 எனக்காட்டுக.

16. மட$\frac{8}{9}$ − மட$\frac{4}{27}$ = மட2 + மட3 என நிறுவுக.

17. 2மட3 + மட$\frac{8}{33}$ + மட$\frac{11}{24}$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

18. மட$\frac{11}{52}$ − மட$\frac{33}{13}$ + மட12 என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

155. பொதுமடக்கைகள். பின்வருஞ் சமன்பாடுகள் அடுக்குக் குறிவடிவத்திலும் ஒத்த மடக்கை வடிவத்திலுந் தரப்பட்டுள்ளன :

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$10^4=10000$	மட $10000=4.$
$10^3=1000$	மட $1000=3.$
$10^2=100$	மட $100=2.$
$10^1=10$	மட $10=1.$
$10^0=1$	மட $1=0.$
$10^{-1}=\frac{1}{10}=\cdot1$	மட $\cdot1$ $-1.$
$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\cdot01$	மட $\cdot01=-2.$
$10^{-3}=\frac{1}{10^3}=\cdot001$	மட $\cdot001=-3.$
$10^{-4}=\frac{1}{10^4}=\cdot0001$	மட $\cdot0001=-4.$

இவற்றை ஆராயப் பின்வரும் உண்மைகள் பெறப்படும்.

(i) எண்கள் படிப்படியாகக் குறைய மடக்கைகளும் படிப்படியாகக் குறையும் ;

(ii) 1 இலும் பெரிய எண்களுடைய மடக்கைகளானவை நேர்க்குறியுடையன ;

(iii) 1 இலுஞ் சிறிய எண்களுடைய மடக்கைகள் எதிர்க் குறியுடையன ;

(iv) 1 இனுடைய மடக்கை பூச்சியமாகும்.

(v) 10 இனுடைய மடங்குகளுடைய மடக்கைகளெல் லாம் முழுவெண்கள் ;

(vii) பிற வெண்களுடைய மடக்கைகள் ஒரு பகுதி முழு வெண்ணும் ஒரு பகுதி பின்னமாயும் இருக்கும்.

ஒரு மடக்கையின் முழுவெண்பகுதியை முழுவெண் என்றும் பின்னப்பகுதியைத் தசமக்கூட்டு என்றுங் கூறு வோம். ஆயின், மடக்கை வடிவத்திலே தரப்பட்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து பின்வருவன பெறப்படும்:—

10000, 1000 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளன வற்றின் மடக்கை$=3+$ தசமக்கூட்டு ;

1000, 100 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளன வற்றின் மடக்கை$=2+$ தசமக்கூட்டு ;

100, 10 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளனவற்றின் மடக்கை$=1+$ தசமக்கூட்டு ;

10, 1 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளனவற்றின் மடக்கை$=0+$ தசமக்கூட்டு ;

1, ·1 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளனவற்றின் மடக்கை$=-1+$ தசமக்கூட்டு ;

·1, ·01 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளனவற்றின் மடக்கை$=-2+$ தசமக்கூட்டு ;

·01, ·001 என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளனவற்றின் மடக்கை$=-3+$ தசமக்கூட்டு.

இவற்றை ஆராய, மடக்கைகளின் முழுவெண் பகுதி களைப் பற்றிய இரு விதிகள் பெறப்படும்.

விதி I. **ஒன்றிலும் பெரிய ஓரெண்ணினது மடக்கையின் முழு வெண்ணனது நேராயுந் தசமப் புள்ளிக்கு முற்கிடக்கும் இலக்கத் தொகையிலும் ஒன்ருற் குறைவாயும் இருக்கும்.**

உ—ம். மட 286 இன் முழுவெண் 2; மட 1·86 இன் முழுவெண் 0.

விதி II. **ஒன்றிலுஞ் சிறிய ஓரெண்ணினது மடக்கையின் முழு வெண்ணனது எதிராயுந் தசமப் புள்ளிக்குப் பின்னல் உடனே யுள்ள பூச்சியத் தொகையிலும் எண்ணளவில் ஒன்ருற் பெரிதாயும் இருக்கும்.**

உ—ம். மட·807 இன் முழுவெண் -1; மட ·0568 இன் முழுவெண் -2.

156. இங்கு, தசமக் கூட்டுக்களைப் பற்றிய ஒருண்மையை ஒருதாரணம் பற்றி ஆராய்வோம் :—

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

மட $8\cdot524=0\cdot9306$ ஆயின், மட 8524, மட $852\cdot4$, மட $\cdot8524$, மட $\cdot008524$ என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க.

மட $8524=$ மட $10^3\times8\cdot524=$ மட 10^3+ மட $8\cdot524=3+0\cdot9306$;

மட $852\cdot4=$ மட $10^2\times8\cdot524=$ மட 10^2+ மட $8\cdot524=2+0\cdot9306$;

மட $\cdot8524=$ மட $10^{\ 1}\times8\cdot524=$ மட $10^{\ 1}+$ மட $8\cdot524=-1+0\cdot9306$;

மட $\cdot008524=$ மட $10^{\ 3}\times8\cdot524=$ மட $10^{\ 3}+$ மட $8\cdot524=-3+0\cdot9306$.

இதிலிருந்து ஒரு விதி பெறப்படும்.

ஒரே யிலக்கத் தொடருள்ள எண்களெல்லாவற்றினுடைய மடக்கைகளுக்கும் ஒரே தசமக் கூட்டு வரும்படி செய்யலாம் ; அவ்வாறுசெய்ய, முழுவெண் பகுதி நேராய் அல்லது எதிராய் அல்லது பூச்சியமாய் வரும்.

157. மடக்கைக் கணக்குக்கள் செய்யுமிடத்து முழுவதும் எதிர்க்குறியோடு பொருந்திய மடக்கைகள் சிலவேளைகளில் வரும்; அவ்வாறுவந்தால், தசமக்கூட்டை நேர்க்குறியோடு பொருந்தச் செய்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, $-2\cdot5869$ என்பது ஒரெண்ணின் மடக்கை என்க. இங்கு, முழுவெண்ணுந் தசமக் கூட்டும் எதிர்க்குறியோடு பொருந்தியுள்ளன. அம்மடக்கை $(-2)+(-\cdot5869)$ என்பதற்குச் சமன்; தசமக் கூட்டிற்கு 1 ஐக் கூட்டி முழுவெண்ணிலிருந்து 1 ஐக் கழித்தால், எம் முடிபு $(-2-1)+(1-\cdot5869)$, அதாவது $-3+\cdot4131$ ஆகும். இதனை $\bar{3}\cdot4131$ என்று எழுதுதல் வழக்கு. இங்கு மூன்றுக்கு மேலுள்ள கோடு **பிரிகோடு** எனப்படும்.

மடக்கைகளுடைய முழுவெண் பகுதி எதிர்க்குறியோடுந் தசமக்கூட்டு நேர்க்குறியோடும் பொருந்தியுள்ள எண்களைக் கூட்டன் முதலாய செய்கைகளுக்குட்படுத்து முறையைப் பின்வரும் உதாரணங்கள் விளக்கும் :

உ—ம்.

1. $\bar{3}\cdot8678$ ஒடு $\bar{1}\cdot7651$ என்பதைக் கூட்ட வருங் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து $\bar{5}\cdot3157$ என்பதைக் கழிக்க:

$$\begin{array}{r}\bar{3}\cdot8678\\ \bar{1}\cdot7631\\ \hline \bar{3}\cdot6309\\ \bar{5}\cdot3157\\ \hline 2\cdot3152\end{array}$$

தசம தானங்களைக் கூட்டியபின் கொண்டு செல்லும் இலக்கம் 1 ஆகும்; இவ்வண்ணம் முழுவெண்பகுதி $-3-1+1$, அதாவது -3 ஆகும். அது $\bar{3}$ என எழுதப்படும். இனி, தசம தானங்களைக் கழித்த பின் -3 இலிருந்து -5 ஐக் கழிக்க வேண்டும்; கழிக்க முழுவெண் $-3-(-5)$, அதாவது 2 ஆகும். ஆயின், விடை $2\cdot3152$ ஆகும்.

உ—ம்.

2. $\bar{2}\cdot3068$ என்பதை 5 ஆற் பெருக்க வரும் பெருக்கத்தை 4 ஆல் வகுக்க.

$$\begin{array}{rl} & \bar{2}\cdot3068\\ & 5\\ \hline 4 \,| & \bar{9}\cdot5340\\ \hline & \bar{3}\cdot8835\end{array}$$

இங்கு 3 ஐ 5 ஆற் பெருக்குமிடத்துக் கொண்டு செல்லும் இலக்கம் 1 ஆகும்; ஆகவே, முழுவெண்பகுதி $-2\times5+1$, அதாவது -9 ஆகும். அது $\bar{9}$ என எழுதப்படும். இனி, -9 என்பதை 4 ஆல் வகுத்தல் இயலாது. முழுவெண் பகுதியாகிய -9 என்பதற்கு -3 ஐக் கூட்ட, அது -12 ஆகும்; அதனை 4 ஆல் வகுக்க -3 ஈவாக வரும்; முழுவெண்பகுதிக்கு -3 ஐக் கூட்டியமையால், தசமக் கூட்டிற்கு 3 ஐக் கூட்டவேண்டும்; அவ்வாறு செய்ய அது $3\cdot5340$ ஆகும்; அதனை 4 ஆல் வகுக்க ஈவு $\cdot8835$ ஆகும்; ஆகவே, வேண்டிய விடை $\bar{3}\cdot8835$ ஆகும்.

பயிற்சி 23 (ஆ)

1. பின்வரும் எண்களுடைய முழுவெண்பகுதிகளை உளவாராய்வு மாத்திரையாற் காண்க:

2756, $283\cdot4$, $\cdot6$, $45\cdot62$, $\cdot000812$, $1\cdot567$.

2. $56\cdot68$ என்பதன் மடக்கை $1\cdot7534$ ஆயின், பின்வரும் எண்களுடைய மடக்கைகளை எழுதுக:

$\cdot5668$, $566\cdot8$, $\cdot05668$, $\cdot0005668$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $\bar{2}\cdot 9631$ ஒடு $1\cdot 8671$ ஐக் கூட்ட வருங் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து $2\cdot 6150$ என்பதைக் கழிக்க.

4. $\bar{3}\cdot 0751$ இலிருந்து $5\cdot 6781$ ஐக் கழிக்க வருமீதியோடு $\bar{2}\cdot 5631$ ஐக் கூட்டுக.

5. $\bar{2}\cdot 7862$, $3\cdot 1863$ என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து $\bar{5}\cdot 6781$, $\bar{1}\cdot 4321$ என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் கழிக்க.

பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைக் காண்க:

6. $\bar{5}\cdot 6714\times 4$.

7. $\bar{2}\cdot 6532\div 4$.

8. $\bar{3}\cdot 0678\div 5$.

9. $\bar{4}\cdot 2351\times 5$.

10. $\bar{1}\cdot 0763\div 3$.

11. $\bar{2}\cdot 9163\times 4$.

12. $\bar{1}\cdot 0567+\bar{2}\cdot 9783$.

13. $0\cdot 5678-\bar{1}\cdot 7639$.

14. $\frac{3}{4}(\bar{2}\cdot 9803)$.

15. $\frac{2}{5}(\bar{2}\cdot 9108)$.

16. $\bar{1}\cdot 6231-\bar{3}\cdot 8674$.

17. $0\cdot 6241-0\cdot 8923$.

18. $\frac{4}{5}(\bar{1}\cdot 8245)$.

19. $\bar{2}\cdot 3841+3\cdot 4156$.

20. $\frac{5}{6}\times\bar{2}\cdot 7192$.

நாலிலக்க வட்டவணையைப் பயன் படுத்துமுறை

158. இம்முறையை உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

பின்வருவது மடக்கையட்டவணையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு பகுதி:

எண்	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	விகிதியாசம் 1 2 3	4 5 6	7 8 9
80													
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83													

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

1. பின்வருவனவற்றினுடைய மடக்கைகளைக் காண்க. 82, 820, ·82, ·0082.

இடப்பக்க நிரலிலுள்ள 82 இற்கு நேரே கிடையில் 0 இனது நிரலில் 9138 என்பதைக் காண்கின்றோம். இதற்குத் தசமப் புள்ளியை முன்னிறுத்த வருவது 8, 2 என்பனவற்றைப் பொருளுடைய இலக்கங்களாகக் கொண்ட எல்லா வெண்களுக்குமுரிய மடக்கைகளினுடைய தசமக் கூட்டாகும்.

எனின், மடக்கை முழுவெண்களை முன்னிறுத்த நாம் பெறுவன

மட $82=1\cdot9138$, மட $820=2\cdot9138$, மட $\cdot82=\bar{1}\cdot9138$, மட $\cdot0082=\bar{3}\cdot9138$ என்பன.

உ—ம்.

2. பின்வருவனவற்றைக் காண்க: மட $8\cdot25$, மட 8250, மட $.000825$.

இடப்பக்க நிரலிலுள்ள 82 இற்கு நேரே கிடையில் 5 இனது நிரலில் 9165 என்பதைக் காண்கின்றோம். இதற்குத் தசமப்புள்ளியை முன்னிறுத்த வருவது 8, 2, 5 என்பனவற்றைப் பொருளுடைய இலக்கங்களாகக் கொண்ட எல்லா வெண்களுக்குமுரிய மடக்கைகளினுடைய தசமக் கூட்டாகும்.

எனின், மடக்கை முழுவெண்களை முன்னிறுத்த நாம் பெறுவன

மட $8\cdot25=0\cdot9165$, மட $8250=3\cdot9165$, மட $\cdot000825=\bar{4}\cdot9165$ என்பன.

உ—ம்.

3. பின்வருவனவற்றைக் காண்க: மட 8256, மட $\cdot8256$, மட $\cdot08256$.

இடப்பக்க நிரலிலுள்ள 82 இற்கு நேரேகிடையில் 5 இனது நிரலில் 9165 ஐயும், 6 என்னும் வித்தியாசத்தினது நிரலில் 3 ஐயுங் காண்கின்றோம். இரண்டையுங் கூட்ட $9165+3$, அதாவது 9168 என்பதைப் பெறுவோம். இதற்குத் தசமப் புள்ளியை முன்னிறுத்தப் பெறுவது 8, 2, 5, 6 என்பனவற்றைப் பொருளுடைய இலக்கங்களாகக் கொண்ட எல்லா வெண்களுக்குமுரிய மடக்கைகளினுடைய தசமக் கூட்டாகும்.

எனின், மடக்கை முழுவெண்களை முன்னிறுத்த நாம் பெறுவன

மட $8256=3\cdot9168$, மட $\cdot8256=\bar{1}\cdot9168$, மட $\cdot08256=\bar{2}\cdot9168$ என்பன.

159. தந்தவொரு மடக்கைக்கு ஒத்த எண் அதன் **முரண் மடக்கை** எனப்படும். முந்திய உதாரணத்தில், முரண் மட $3\cdot9168=8256$, முரண்மட $\bar{2}\cdot9168=\cdot08256$. தந்தவொரு மடக்கையின் முரண்மடக்கையைக் காண்பதற்கு மடக்கையட்டவணையையே பயன்படுத்தலாம். இதனை உதாரணத்தால் விளக்குவோம்.

உ—ம்.

1. முரண்மட $2\cdot9127$, முரண்மட $\bar{3}\cdot9127$ என்பனவற்றைக் காண்க.

தந்த மடக்கைகளுடைய முழுவெண்கள் அட்டவணையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எண்களினுடைய தசமப்புள்ளியையே நிலைநாட்டும் என்பதை மனத்திற் கொண்டு 9127, அல்லது அதனிலுஞ் சிறிது குறைந்தவொன்று மடக்கையட்டவணையில் இல்லையென்றும் அதனிலும் 5 ஆற் குறைந்த 9122 என்பது இடப்பக்க நிரலிலுள்ள 81 இற்கு நேரேகிடையில் 7 இனது நிரலில் இருக்கின்றதென்றும் அக்குறைவாகிய 5 தானும் 81 இற்கு நேரேகிடையில் 9 என்னும் வித்தியாசத்தினது நிரலில் இருக்கின்றதென்றுங் காண்கின்றோம். ஆயின், $\cdot9127$ என்பது 8, 1, 7, 9 என்பனவற்றைப் பொருளுடைய இலக்கங்களாகக் கொண்ட எல்லா வெண்களுக்குமுரிய மடக்கைகளினுடைய தசமக் கூட்டாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

எனின், தசமப்புள்ளியை அதற்கு முன்னிறுத்த நாம் பெறுவன

முரண்மட $2\cdot9127=817\cdot9$, முரண்மட $\bar{3}\cdot9127=\cdot008179$ என்பன. முரண்மடக்கைகளானவை முரண்மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்துதலாலுங் காணப்படலாம். அவ்வழி சிறந்ததன்று. வேண்டுவோருக்காக அவ்வட்டவணையும் இந்நூலிற் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது.

160. மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்தி எவ்வாறு கணக்குக்கள் செய்யலாம் என்பதை இங்கு விளக்குவோம்.

உ—ம்.

1. $12\cdot78\times\cdot005832$ என்பதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

க என்பது வேண்டிய பெறுமானம் ஆகுக.

$\therefore \text{க}=12\cdot78\times\cdot005832.$

$\therefore \text{மட க}=\text{மட } 12\cdot78\times\cdot005832$

$=\text{மட } 12\cdot78+\text{மட } \cdot005832$

$=1\cdot1065+\bar{3}\cdot7658$

$=\bar{2}\cdot8723.$

$\therefore \text{க}=\text{முரண்மட } \bar{2}\cdot8723$

$=\cdot07451.$

வேறொருவழி: $\text{ப}=10^{\text{மட ப}}$ என்னுந் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியும் இக் கணக்கைச் செய்யலாம்.

$12\cdot78\times\cdot005832$

$=10^{\text{மட}12\cdot78}\times10^{\text{மட}\cdot005832}$

$=10^{\text{மட}12\cdot78+\text{மட}\cdot005832}$

$=10^{1\cdot1065+\bar{3}\cdot7658}$

$=10^{\bar{2}\cdot8723}$

$=\cdot07451.$

உ—ம்.

2. $\dfrac{\sqrt{2\cdot856}\times\sqrt[3]{\cdot0006423}}{\sqrt[3]{582\cdot4}}$. இதனைச் சுருக்குக.

$\text{க}=\dfrac{\sqrt{2\cdot856}\times\sqrt[3]{\cdot0006423}}{\sqrt[3]{582\cdot4}}$ ஆகுக.

$\therefore \text{மட க}=\frac{1}{2}\text{ மட } 2\cdot856+\frac{1}{3}\text{ மட } \cdot0006423-\frac{1}{3}\text{ மட } 582\cdot4$

$=\frac{1}{2}\times0\cdot4557+\frac{1}{3}\times\bar{4}\cdot8077-\frac{1}{3}\times2\cdot7652$

$=0\cdot2279+\bar{2}\cdot9359-0\cdot9217$

$=\bar{2}\cdot2421.$

$\therefore \text{க}=\cdot01746.$

$3\,|\,\bar{4}\cdot8077$
$\bar{2}\cdot9359$

$\cdot2279$
$\bar{2}\cdot9359$
$\bar{1}\cdot1638$
$0\cdot9217$
$\bar{2}\cdot2421$

வேறுவழி: $\dfrac{\sqrt{2\cdot856}\times\sqrt[3]{\cdot0006423}}{\sqrt[3]{582\cdot4}}$

$=\dfrac{10^{\frac{1}{2}\text{மட}2\cdot856}\times10^{\frac{1}{3}\text{மட}\cdot0006423}}{10^{\frac{1}{3}\text{மட}582\cdot4}}$

$=10^{\frac{1}{2}\text{மட}2\cdot856+\frac{1}{3}\text{மட}\cdot0006423-\frac{1}{3}\text{மட}582\cdot4}$

$=10^{0\cdot2279+\bar{2}\cdot9359-0\cdot9217}$

$=10^{\bar{2}\cdot2421}$

$=\cdot01746.$

உ—ம்.

3. $\dfrac{\sqrt[3]{4\cdot674}-\sqrt[2]{\cdot005845}}{\sqrt[3]{4\cdot674}+\sqrt[2]{\cdot005845}}$. இதனைச் சுருக்குக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\text{ந} = \sqrt[3]{4\cdot674}$ ஆகுக; $\text{ய} = \sqrt[2]{\cdot005845}$ ஆகுக.

தந்த பின்னம் க ஆகுக. ஆயின், $\text{க} = \frac{\text{ந} - \text{ய}}{\text{ந} + \text{ய}}$ ஆகும்.

$\text{ந} = \sqrt[3]{4\cdot674}$ $\qquad$ $\text{ய} = \sqrt[2]{\cdot005845}$.

$\therefore \text{மட ந} = \frac{1}{3}\text{மட}\, 4\cdot674$ $\qquad$ $\therefore \text{மட ய} = \frac{1}{2}\text{மட}\cdot005845$

$= \frac{1}{3} \times 0\cdot6697$ $\qquad$ $= \frac{1}{2} \times \bar{3}\cdot7668$

$= 0\cdot2232.$ $\qquad$ $= \bar{2}\cdot8834.$

$\therefore \text{ந} = \text{முரண்மட}\, 0\cdot2232$ $\qquad$ $\therefore \text{ய} = \text{முரண் மட}\, \bar{2}\cdot8834$

$= 1\cdot672.$ $\qquad$ $= \cdot07645.$

$$\therefore \text{க} = \frac{\text{ந} - \text{ய}}{\text{ந} + \text{ய}}$$

$$= \frac{1\cdot672 - \cdot07645}{1\cdot672 + \cdot07645}$$

$$= \frac{1\cdot596}{1\cdot748}.$$

$\therefore \text{மட க} = \text{மட}\, 1\cdot596 - \text{மட}\, 1\cdot748$ $\qquad$ $0\cdot2031$

$= 0\cdot2031 - 0\cdot2425$ $\qquad$ $0\cdot2425$

$= \bar{1}\cdot9606.$ $\qquad$ $\bar{1}.9606$

$\therefore \text{க} = \text{முரண் மட}\, \bar{1}\cdot9606$

$= \cdot9131.$

வேறுவழி:

$$\frac{\sqrt[3]{4\cdot674} - \sqrt[2]{\cdot005845}}{\sqrt[3]{4.674} + \sqrt[2]{.005845}}$$

$$= \frac{10^{\frac{1}{3}\text{மட}\, 4\cdot674} - 10^{\frac{1}{2}\text{மட}\cdot005845}}{10^{\frac{1}{3}\text{மட}\, 4\cdot674} + 10^{\frac{1}{2}\text{மட}\cdot005845}}$$

$$= \frac{10^{\frac{1}{3}\times0\cdot6697} - 10^{\frac{1}{2}\times\bar{3}.7668}}{10^{\frac{1}{3}\times0\cdot6697} + 10^{\frac{1}{2}\times\bar{3}\cdot7668}}$$

$$= \frac{10^{0\cdot2232} - 10^{\bar{2}\cdot8834}}{10^{0\cdot2232} + 10^{\bar{2}\cdot8834}}$$

$$= \frac{1\cdot672 - \cdot07645}{1\cdot672 + \cdot07645}$$

$$= \frac{1\cdot596}{1\cdot748}$$

$$= \frac{10^{\text{மட}\, 1\cdot596}}{10^{\text{மட}\, 1\cdot748}}$$

$$= 10^{\text{மட}\, 1.596 - \text{மட}\, 1\cdot748}$$

$$= 10^{0\cdot2031 - 0\cdot2425}$$

$$= 10^{\bar{1}\cdot9606}$$

$$= \cdot9131.$$

உ—ம்.

4. $2^{\text{க}}.3^{1-\text{க}} = 18$ ஆயின், க இன் பெறுமானத்தை 2 தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

$$2^{\text{க}}.3^{1-\text{க}} = 18$$

$$\therefore \text{மட}\, 2^{\text{க}}.3^{1-\text{க}} = \text{மட}\, 3^2.2.$$

$$\therefore \text{க மட}\, 2 + (1 - \text{க})\ \text{மட}\, 3 = 2\,\text{மட}\, 3 + \text{மட}\, 2.$$

$$\therefore \text{க மட}\, 2 + \ \text{மட}\, 3 - \text{கமட}\, 3 = 2\,\text{மட}\, 3 + \text{மட}\, 2.$$

$$\therefore -\text{க மட}\, 3 + \text{க மட}\, 2 = \text{மட}\, 3 + \text{மட}\, 2.$$

$$-\text{க}(\text{மட}\, 3 - \text{மட}\, 2) = \text{மட}\, 3 + \text{மட}\, 2.$$

$$\therefore \text{க} = -\frac{\text{மட}\, 3 + \text{மட}\, 2}{\text{மட}\, 3 - \text{மட}\, 2}$$

$$= -\frac{0\cdot4771 + 0\cdot3010}{0\cdot4771 - 0\cdot3010}$$

$$= -\frac{\cdot7781}{\cdot1761}$$

$= -$ ந என்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \text{ந} = \frac{\cdot 7781}{\cdot 1761}.$$

$$\therefore \text{மடந} = \text{மட}\cdot 7781 - \text{மட}\cdot 1761.$$
$$= \bar{1}\cdot 8911 - \bar{1}\cdot 2457$$
$$= 0\cdot 6454.$$
$$\therefore \text{ந} = \text{முரண்மட } 0\cdot 6454$$
$$= 4\cdot 42.$$
$$\therefore \text{க} = -4\cdot 42.$$

ந.க. எதிர்க்குறியோடு வரும் பின்னங்களைச் சுருக்குதற்கு $\text{ப} = 10^{\text{மடப}}$ என்னுந் தேற்றத்தைத் துணைக்கொண்டு செய்தலே எளிது.

முந்திய கணக்கிற் பெற்ற எதிர்க்குறிப் பின்னத்தை இவ்வழியாற் சுருக்குவோம் :—

$$\text{க} = -\frac{\cdot 7781}{\cdot 1761}$$
$$= -\frac{10^{\text{மட}\cdot 7781}}{10^{\text{மட}\cdot 1761}}$$
$$= -10^{\text{மட}\cdot 7781 - \text{மட}\cdot 1761}$$
$$= -10^{\bar{1}\cdot 8911 - \bar{1}\cdot 2457}$$
$$= -10^{0\cdot 6454}$$
$$= -4\cdot 42.$$

161. மடக்கைகளினுடைய பிரயோகங்கள். கூட்டுவட்டிக் கணக்குக்களிலும் விஞ்ஞானக் கணக்குக்களிலும் மடக்கைப் பிரயோகம் பயன்படும். இதனை ஒருதாரணத்தால் விளக்குவோம்:

உ—ம்.

எத்தனை ஆண்டில் 364 ரூபா ஆண்டுக்கு 4% வீதக் கூட்டுவட்டியில் 925 ரூபாவைத் தொகையாகத் தரும்?

கூட்டுவட்டிச்சூத்திரத்தால், ம ரூபா முதல் ஆண்டுக்கு வ வீதக் கூட்டுவட்டியில் இ ஆண்டிலே தருந் தொகை

$$\text{த} = \text{ம}\left(1 + \frac{\text{வ}}{100}\right)^{\text{இ}}.$$

$$\therefore 364\left(1 + \frac{4}{100}\right)^{\text{இ}} = 925;$$
$$\therefore (1\cdot 04)^{\text{இ}} = \frac{925}{364};$$
$$\therefore \text{இ மட}1\cdot 04 = \text{மட}925 - \text{மட}364;$$
$$\therefore \text{இ} = \frac{\text{மட}925 - \text{மட}364}{\text{மட}1\cdot 04}$$
$$= \frac{2\cdot 9661 - 2\cdot 5661}{0\cdot 0170}$$
$$= \frac{0\cdot 4000}{0\cdot 0170}$$
$$= \frac{400}{17}.$$

வகுத்தலால், அல்லது மடக்கையாற் கணித்தலால், இ$=23\cdot 5$.

∴ விடை அண்ணளவாக $23\frac{1}{2}$ ஆண்டு.

பயிற்சி 23 (இ)

பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களை நான்கு பொருளுடைய இலக்கங்களுக்குக் காண்க:

1. $36\cdot 78 \times 5\cdot 672.$
2. $7\cdot 543 \times 254\cdot 6.$
3. $1\cdot 096 \times 2\cdot 056.$
4. $\frac{5\cdot 234}{16\cdot 78}.$
5. $\frac{176\cdot 9}{23\cdot 54}.$
6. $\frac{8965}{4654}.$
7. $\cdot 05677 \times 2\cdot 456.$
8. $\cdot 003427 \times \cdot 05832.$
9. $\frac{2\cdot 673}{\cdot 05784}.$
10. $\frac{\cdot 07684}{45\cdot 67}.$
11. $\frac{\cdot 001245}{5\cdot 684}.$
12. $(\cdot 65)^8.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. $(1 \cdot 67)^{14}$.

14. $\dfrac{\cdot 05678 \times 2 \cdot 589}{45 \cdot 67}$.

15. $\dfrac{\cdot 006921 \times 43 \cdot 56}{259 \cdot 8}$.

16. $\dfrac{\sqrt{\cdot 08246}}{\sqrt[3]{46 \cdot 23}}$.

17. $\sqrt{\cdot 007693} \div \sqrt[5]{1 \cdot 782}$.

18. $\dfrac{\sqrt{\cdot 0789 \times 2 \cdot 567}}{71 \cdot 56}$.

19. $\sqrt{\cdot 08421} \times \sqrt[3]{21 \cdot 56}$.

20. $\dfrac{\sqrt{\cdot 8432} - \sqrt[3]{\cdot 07325}}{\sqrt{\cdot 8432} + \sqrt[3]{\cdot 07325}}$.

21. $\dfrac{\sqrt{4 \cdot 712} - \sqrt[3]{1 \cdot 965}}{\sqrt{4 \cdot 712} + \sqrt[3]{1 \cdot 965}}$.

22. $\dfrac{2.781 \times .005691}{44 \cdot 44}$.

23. $\cdot 4682 \div \cdot 005628$.

24. $204\sqrt{\cdot 005869}$.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளில், க இனுடைய பெறுமானங்களை இரண்டு தசம தானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

25. $3^{\text{க} - 1} = 506$.

26. $3^{2\text{க} - 3} = 4^{3\text{க} - 4}$.

27. $3^{\text{க} - 1}\ 4^{2\text{க} + 1} = 460$.

28. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\text{க}} = 4 \cdot 56$.

29. $25^{\text{க} + 1} = 210^{\text{க} - 1}$

30. $6^{\text{க}} . 7^{\text{க} + 1} = 18^{\text{க} - 1}$.

31. எத்தனை ஆண்டு 4 சதம வீதக் கூட்டுவட்டியில் 250 ரூபா முதல் 750 ரூபா ஆகும் ?

32. எத்தனை ஆண்டில் 244 ரூபா ஆண்டுக்கு 3% வீதக் கூட்டுவட்டியில் 856 ரூபாவைத் தொகையாகத் தரும்?

33. 216 ரூபா முதல் 3% வீதக் கூட்டுவட்டியில் 20 ஆண்டில் எத்தனை ரூபா ஆகும்?

34. $\text{க} = \frac{4}{3}\pi \text{அ}^3$ என்னுஞ் சூத்திரம் அ என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தின் கனவளவு க ஐத் தருகின்றது. அ $= 34 \cdot 6$ ச. மீ. ஆயின், க இன் பெறுமானத்தைக் கூடிய அளவிற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

35. $\text{க} = \pi \text{அ}^2 \text{உ}$ என்னுஞ் சூத்திரம் அ என்னும் அடியாரையையும் உ என்னும் நீளத்தையுமுடைய ஓர் உருளையின் கனவளவு க ஐத் தருகின்றது. 456 கன ச. மீ. கனவளவுள்ள ஓர் உருளையினது நீளம் 19 ச. மீ. ஆயின், அதன் அடியாரையை இயன்ற அளவிற்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 24

ஒருங்கமையிருபடிச் சமன்பாடுகளும் உத்திக்கணக்குக்களும்

162. ஒரு சோடிச் சமன்பாடுகளுள் ஒன்றுயினும் இரண்டாம் படியையாதல் இரண்டின் மேற்பட்ட படியையாதல் கொண்டால், அவற்றினுடைய தீர்வுகளைக் காண்பதற்குப் பொது விதி யாதும் இல்லை. ஒருங்கமை யிருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குஞ் சில முறைகளும் இரண்டின் மேற்பட்ட படியைக் கொண்ட சமன்பாடுகளைத் தீர்க்குஞ் சில முறைகளுங் கீழே காணப்படும்.

163. $க + ந = அ$, $க - ந = இ$ என்னுஞ் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளைச் சார்ந்து நிற்கத்தக்க இருபடிச் சமன்பாட்டுத் தொகுதித் தீர்வுகள்.

உ—ம்.

1. $க + ந = 7$ .. .. (1).

$கந = 12$ .. .. (2),

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ வர்க்கமாக்க நாம் பெறுவது

$க^2 + 2கந + ந^2 = 49$ .. .. (3);

(2) இலிருந்து $4கந = 48$ .. .. (4);

(4) ஐ (3) இலிருந்து கழிக்க, $க^2 - 2கந + ந^2 = 1$;

$\therefore க - ந = \pm 1$ .. .. .. (5).

(1)ஐயும் (5) ஐயுங் கூட்ட $2க = 8$, அல்லது 6;

$\therefore க = 4$, அல்லது 3.

(2) இலிருந்து $க = 4$ ஆயின், $ந = 3$;

$க = 3$ ஆயின், $ந = 4$;

ஆகவே $\left.\begin{matrix} க = 4 \\ ந = 3 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = 3 \\ ந = 4 \end{matrix}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகள்.

உ—ம்.

2. $க + ந = 7$ .. .. (1),

$கந = 12$ .. .. (2).

இவற்றிற்குப் பிரதியீட்டு முறையாலே தீர்வுகள் காண்க.

(1) இலிருந்து $க = 7 - ந$.

க இன் பெறுமானத்தை (2) இற் பிரதியிட,

$(7 - ந)ந = 12$.

$\therefore 7ந - ந^2 = 12$.

$\therefore ந^2 - 7ந + 12 = 0$.

$\therefore (ந - 3)(ந - 4) = 0$.

$ந = 3$, அல்லது 4.

(2) இலிருந்து $ந = 3$ எனின், $க = 4$.

$ந = 4$ எனின், $க = 3$.

$\therefore \left.\begin{matrix} க = 4 \\ ந = 3 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = 3 \\ ந = 4 \end{matrix}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகள்.

உ—ம்.

(3) $க^2 + ந^2 = 41$ .. .. (1),

$கந = 20$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(2) இலிருந்து $2கந = 40$ .. .. (3).

(1) ஒடு (3) ஐக் கூட்ட, $க^2 + 2கந + ந^2 = 81$;

$\therefore க + ந = \pm 9$ .. .. (4);

(1) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்க, $க^2 - 2கந + ந^2 = 1$;

$\therefore க - ந = \pm 1$ .. .. (5).

(4) ஐயும் (5) ஐயுங் கூட்ட, $2க = 10, 8, -10$, அல்லது -8.

$\therefore க = 5, 4, -5$, அல்லது -4.

$\therefore$ (2) இலிருந்து $ந = 4, 5, -4$, அல்லது -5.

$\therefore \left.\begin{matrix} க = 5 \\ ந = 4 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = 4 \\ ந = 5 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = -5 \\ ந = -4 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = -4 \\ ந = -5 \end{matrix}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகளாகும்.

உ—ம்

(4) $க^2 + ந^2 = 5$ .. .. (1),

$க + ந = 3$ .. .. (3).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(2) ஐ வர்க்கமாக்குதலால், $க^2 + 2கந + ந^2 = 9$ .. (3);

(3) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க, $2கந = 4$ .. (4);

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(4) ஐ (1) இலிருந்து கழிக்க, $க^2 - 2கந + ந^2 = 1$.

$\therefore\ க - ந = \pm 1$ .. (5).

(2) ஐயும் (5) ஐயுங் கூட்ட, $2க = 4$, அல்லது 2.

$\therefore\ க = 2$, அல்லது 1.

(2) இற் பிரதியிட $ந = 1$, அல்லது 2.

$\therefore \left.\begin{matrix} க = 2 \\ ந = 1 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} க = 1 \\ ந = 2 \end{matrix}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகள்.

உ—ம்.

(5) $\frac{1}{க} + \frac{1}{ந} = \frac{5}{6}$ .. .. (1),

$\frac{1}{க^2} + \frac{1}{ந^2} = \frac{13}{36}$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ வர்க்கமாக்க, $\frac{1}{க^2} + \frac{2}{கந} + \frac{1}{ந^2} = \frac{25}{36}$ .. .. (3);

(2) ஐ (3) இலிருந்து கழிக்க, $\frac{2}{கந} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ .. .. (4);

(4) ஐ (2) இலிருந்து கழிக்க, $\frac{1}{க^2} - \frac{2}{கந} + \frac{1}{ந^2} = \frac{1}{36}$.

$\therefore\ \frac{1}{க} - \frac{1}{ந} = \pm\frac{1}{6}$ .. .. (5).

(1) ஐயும் (5) ஐயுங் கூட்ட, $\frac{2}{க} = 1$, அல்லது $\frac{2}{3}$;

$\therefore\ \frac{1}{க} = \frac{1}{2}$, அல்லது $\frac{1}{3}$.

(1) இற் பிரதியிட, $\frac{1}{ந} = \frac{1}{3}$, அல்லது $\frac{1}{2}$.

$\therefore\ க = 2$, அல்லது 3.

$ந = 3$, அல்லது 2.

$\therefore \left.\begin{matrix} க = 2 \\ ந = 3 \end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix} க = 3 \\ ந = 2 \end{matrix}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 24 (அ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க.

1. $க + ந = 3$, $கந = 2$.
2. $க - ந = 4$, $கந = -3$.
3. $2க + ந = 1$, $கந = -1$.
4. $க - 2ந = 5$, $கந = -3$.
5. $3க - 2ந = 1$, $கந = 2$.
6. $2க + 3ந = -2$, $கந = -4$.
7. $க^2 - 2ந = 2$, $க = ந + 1$.
8. $2க = 3ந + 1$, $க^2 - ந^2 = 3$.
9. $3க^2 - 2கந = -1$, $2ந - க = -3$.
10. $க^2 + ந^2 = 13$, $க + ந = 1$.
11. $க^2 + ந^2 = 5$, $க + ந = -3$.
12. $க - ந = 7$, $க^2 + ந^2 = 25$.
13. $க - ந = -1$, $க^2 + ந^2 = 13$.
14. $க + ந = 5$, $க^2 + கந + ந^2 = 19$.
15. $க + ந = 2$, $க^2 + கந + ந^2 = 7$.
16. $க^2 - கந + ந^2 = 12$, $க - ந = -2$.
17. $க^2 - கந + ந^2 = 13$, $க - ந = 4$.
18. $க^2 - கந + ந^2 = 19$, $க + ந = 1$.
19. $\frac{1}{3}(க - ந) = 1$, $க^2 - 3கந + ந^2 = -1$.
20. $க + ந = \frac{5}{6}$. $\frac{1}{க} + \frac{1}{ந} = 5$.
21. $\frac{1}{க} - \frac{1}{ந} = \frac{7}{12}$, $கந = -12$.
22. $\frac{1}{க^2} + \frac{1}{ந^2} = \frac{5}{18}$, $12கந = 1$.
23. $\frac{1}{க^2} + \frac{1}{ந^2} = \frac{13}{144}$, $\frac{1}{க} - \frac{1}{ந} = \frac{5}{12}$.
24. $\frac{1}{க^2} + \frac{1}{ந^2} = \frac{13}{36}$, $\frac{1}{2க} + \frac{1}{3ந} = \frac{1}{3}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

164. தந்த சமன்பாடுகள் இரண்டும் ஒரேபடியினை உடையனவாய் மாறிகள் பற்றி உறுப்புக்கள் எல்லாவற்றிலுஞ் சமச்சீராய் இருந்தால், அவை பின்வருமாறு தீர்க்கப்படலாம்:—

உ—ம்.

1. $க^2 - கந + ந^2 = 3$ .. .. (1).

$2க^2 + கந + 2ந^2 = 12$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

முதல் வழி:

$$\therefore \frac{க^2 - கந + ந^2}{2க^2 + கந + 2ந^2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

$\therefore 4(க^2 - கந + ந^2) = 1(2க^2 + கந + 2ந^2).$

$\therefore 4க^2 - 4கந + 4ந^2 = 2க^2 + கந + 2ந^2.$

$\therefore 2க^2 - 5கந + 2ந^2 = 0.$

$\therefore (க - 2ந)(2க - ந) = 0.$

$\therefore க = 2ந.$

இதனை (1) இற் பிரதியிட

$(2ந)^2 - 2ந(ந) + ந^2 = 3.$

$\therefore 4ந^2 - 2ந^2 + ந^2 = 3.$

$\therefore 3ந^2 = 3.$

$\therefore ந^2 = 1.$

$\therefore ந = \pm 1.$

ஆனால், $க = 2ந.$

$\therefore க = \pm 2.$

அல்லது $க = \frac{1}{2}ந.$

இதனை (1) இற் பிரதியிட

$(\frac{1}{2}ந)^2 - (\frac{1}{2}ந)ந + ந^2 = 3.$

$\therefore \frac{1}{4}ந^2 - \frac{1}{2}ந^2 + ந^2 = 3.$

$\therefore \frac{3}{4}ந^2 = 3.$

$\therefore ந^2 = 4.$

$\therefore ந = \pm 2.$

ஆனால், $க = \frac{1}{2}ந.$

$\therefore க = \pm 1.$

$\therefore$ வேண்டிய தீர்வுகள் $\left.\begin{matrix} க = +2 \\ ந = +1 \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} க = -2 \\ ந = -1 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = +1 \\ ந = +2 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = -1 \\ ந = -2 \end{matrix}\right\}$ என்பன.

இரண்டாம் வழி:

$ந = மக$ எனக் கொள்க.

ந இன் இப்பெறுமானத்தை (1), (2) என்னுஞ் சமன்பாடுகளிற் பிரதியிடுக.

$க^2 - க.மக + (மக)^2 = 3$ .. .. .. (3).

$2க^2 + க(மக) + 2(மக)^2 = 12$ .. .. (4).

(3) இலிருந்து $க^2(1 - ம + ம^2) = 3$ .. .. (5).

(4) .. .. $க^2(2 + ம + 2ம^2) = 12$ .. .. (6).

(5) ஐ (6) ஆல் வகுக்க $\frac{1 - ம + ம^2}{2 + ம + ம^2} = \frac{1}{4}.$

$\therefore 4(1 - ம + ம^2) = 1(2 + ம + 2ம^2).$

$\therefore 4 - 4ம + 4ம^2 = 2 + ம + 2ம^2.$

$\therefore 2ம^2 - 5ம + 2 = 0.$

$\therefore (ம - 2)(2ம - 1) = 0.$

$\therefore ம = 2,$ அல்லது $\frac{1}{2}.$

$\therefore ந = 2க.$

இதனை (1) இற் பிரதியிட

$க^2 - க(2க) + (2க)^2 = 3.$

$\therefore க^2 - 2க^2 + 4க^2 = 3.$

$\therefore 3க^2 = 3.$

$\therefore க^2 = 1.$

$\therefore க = \pm 1.$

ஆனால், $ந = 2க.$

$\therefore ந = \pm 2.$

அல்லது $ந = \frac{1}{2}க.$

இதனை (1) இற் பிரதியிட

$க^2 - க(\frac{1}{2}க) + (\frac{1}{2}க)^2 = 3.$

$\therefore க^2 - \frac{1}{2}க^2 + \frac{1}{4}க^2 = 3.$

$\therefore \frac{3}{4}க^2 = 3.$

$\therefore க^2 = 4.$

$\therefore க = \pm 2.$

ஆனால், $ந = \frac{1}{2}க.$

$\therefore ந = \pm 1.$

$\therefore$ வேண்டிய தீர்வுகள் $\left.\begin{matrix} க = +1 \\ ந = +2 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = -1 \\ ந = -2 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = +2 \\ ந = +1 \end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix} க = -2 \\ ந = -1 \end{matrix}\right\}$ என்பன.

165. இருபடிச் சமன்பாடுகளுட் சில வேறுவேறான உபாயங்கள் பற்றித் தீர்க்கப்படலாம்.

உ—ம்.

1. $க^2 + கந = -1$ .. .. (1),

$கந - ந^2 = -6$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ 6 ஆற் பெருக்க, $6க^2 + 6கந = -6$ .. .. (3).

(3) இலிருந்து (2) ஐக் கழிக்க, $6க^2 + 5கந + ந^2 = 0.$

$\therefore (2க + ந)(3க + ந) = 0.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore க = -\frac{1}{2}ந.$

(1) இற் பிரதியிட,

$(-\frac{1}{2}ந)^2 + (-\frac{1}{2}ந)ந = -1.$

$\therefore \frac{1}{4}ந^2 - \frac{1}{2}ந^2 = -1.$

$\therefore -\frac{1}{4}ந^2 = -1.$

$\therefore ந^2 = 4.$

$\therefore ந = \pm 2.$

ஆனால், $க = -\frac{1}{2}ந.$

$\therefore க = \mp 1.$

அல்லது $க = -\frac{1}{3}ந.$

(1) இற் பிரதியிட,

$(-\frac{1}{3}ந)^2 + (-\frac{1}{3}ந)ந = -1$

$\therefore \frac{1}{9}ந^2 - \frac{1}{3}ந^2 = -1.$

$-\frac{2}{9}ந^2 = -1.$

$\therefore ந^2 = \frac{9}{2} = \frac{9 \times 2}{4}.$

$\therefore ந = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

ஆனால், $க = -\frac{1}{3}ந.$

$\therefore க = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}.$

$\therefore$ வேண்டிய தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l} க = -1 \\ ந = +2 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} க = +1 \\ ந = -2 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} ந = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ க = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\},$

$\left.\begin{array}{l} க = +\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ ந = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array}\right\}$ என்பன

இச்சமன்பாடுகளில், ந=மக என பிரதியிட்டுந் தீர்வு காணலாம்.

உ—ம்.

2. $4கந + 3ந^2 = 4$ .. .. (1).

$2ந^2 - 3கந = 14$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ 3 ஆலும் (2) ஐ 4 ஆலும் பெருக்க.

$12கந + 9ந^2 = 12$ .. .. (3).

$8ந^2 - 12கந = 56$ .. .. (4).

(3) ஐயும் (4) ஐயுங் கூட்டுக.

$17ந^2 = 68.$

$\therefore ந^2 = 4.$

$\therefore ந = \pm 2.$

ந இன் பெறுமானங்களை (1) இற் பிரதியிடுக.

$க = \pm 1.$

. வேண்டிய தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l} க = +1 \\ ந = -2 \end{array}\right\}, \left.\begin{array}{l} க = -1 \\ ந = +2 \end{array}\right\}$ என்பன.

இச்சமன்பாடுகளில், ந=மக எனப் பிரதியிட்டுந் தீர்வு காணலாம்.

உ—ம்.

3. $4க^2 - 9ந^2 = 7$ .. .. (1).

$2க + 3ந = 7$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ (2) ஆல் வகுக்க, $2க - 3ந = 1$ .. .. (3).

(2) ஐயும் (3) ஐயுங் கூட்ட $4க = 8.$

$\therefore க = 2.$

(2) இற் பிரதியிட $ந = 1.$

வேண்டிய தீர்வு $\left.\begin{array}{l} க = 2 \\ ந = 1 \end{array}\right\}$ என்பனவே.

உ—ம்.

4. $க^2 + 9ந^2 - 16க + 48ந + 78 = 0,$ .. .. .. (1).

$கந = -3.$ .. .. (2).

இவற்றைத் தீர்க்க.

(2) ஐ 6 ஆற் பெருக்குக.

$6கந = -18.$

$\therefore 6கந + 18 = 0.$ .. .. (3).

(1) இலிருந்து (3) ஐக் கழிக்க.

$க^2 - 6கந + 9ந^2 - 16க + 48ந + 60 = 0.$

$\therefore \underline{(க - 3ந)}^2 - 16\underline{(க - 3ந)} + 60 = 0.$

$\therefore (க - 3ந - 6)(க - 3ந - 10) = 0.$

$\therefore க - 3ந = 6,$ அல்லது $க - 3ந = 10.$

இவற்றின் வர்க்கங்களை எடுக்க.

$க^2 - 6கந + 9ந^2 = 36.$

(2) இலிருந்து $12கந = -36.$

$\therefore க^2 + 6கந + 9ந^2 = 0.$

$\therefore க + 3ந = 0.$

ஆனால், $க - 3ந = 6.$

$\therefore$ கூட்டலால், $2க = 6.$

$\therefore க = 3.$

(2) இற் பிரதியிட $ந = -1.$

$க^2 - 6கந + 9ந^2 = 100.$

$12கந = -36.$

$க^2 + 6கந + 9ந^2 = 64.$

$க + 3ந = \pm 8.$

ஆனால், $க - 3ந = 10.$

கூட்டலால், $2க = 18,$

அல்லது 2.

$\therefore க = 9,$ அல்லது 1.

(2) இற் பிரதியிட $ந = -\frac{1}{3},$

அல்லது $-3.$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

∴ வேண்டிய தீர்வுகள் $\left.\begin{array}{l}க=3\\ந=-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}க=1\\ந=-3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}க=9\\ந=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ என்பன.

பயிற்சி 24 (ஆ)

மேல் வருஞ் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வுகள் காண்க:

1. $க^2-கந+ந^2=7$, $க^2+6கந+ந^2=28$.
2. $க^2-6கந-4ந^2=-13$, $க^2+4கந+4ந^2=25$.
3. $5க^2-12கந+18ந^2=21$, $க^2-கந+3ந^2=3$.
4. $க^2+3கந=10$, $கந-ந^2=1$.
5. $3க^2+கந=5$, $3கந-ந^2=2$.
6. $4க^2+3கந=7$, $4கந+3ந^2=6$.
7. $4க^2-9ந^2=2கந+3ந^2=7$.
8. $4க^2-9ந^2=4கந+6ந^2=64$.
9. $2க^2-3கந=2கந+3ந^2=8$.
10. $க^2+2கந=3$, $கந-4ந^2=-7$.
11. $3கந+4ந^2=4$, $3ந^2-4கந=3$.
12. $4க^2-ந^2=6$, $2க-ந=3$.
13. $க^2-9ந^2=4$, $க+3ந=2$.
14. $2க^2+8ந^2-16க+32ந+39=0$, $8கந=-9$.
15. $4க^2+9ந^2-36க-54ந+112=0$, $3கந=8$.
16. $(க+2)(ந+3)=24$, $கந=6$.
17. $(2க-3)(3ந+2)=5$, $கந=2$.
18. $\frac{க}{ந}+\frac{ந}{க}=\frac{97}{36}$, $கந=1$.
19. $\frac{2க-3ந}{2க+3ந}+\frac{2க+3ந}{2க-3ந}=\frac{17}{4}$, $4க^2-9ந^2=4$.
20. $\frac{க+2ந}{2க+ந}+\frac{2க+ந}{க+2ந}=\frac{10}{3}$, $க^2+ந^2=26$.

166. இரண்டாம் படியிலுங் கூடிய படிகளையுடைய சமன்பாடுகள் சிலவற்றைத் தீர்த்தற்கு முற் பிரிவுகளிற் காட்டிய முறைகள் பயன்படும்.

உ—ம்.

1. $க^3-ந^3=7$ .. .. (1),
$க-ந=1$ .. .. (2).
இவற்றைத் தீர்க்க.

(1) ஐ (2) ஆல் வகுக்க, $க^2+கந+ந^2=7$ .. .. (3).
(2) ஐ வர்க்கமாக்க, $க^2-2கந+ந^2=1$ .. .. (4).
(4) ஐ (3) இலிருந்து கழிக்க, $3கந=6$.
∴ $கந=2$ .. .. (5).
(5) ஐ (3) ஒடு கூட்ட, $க^2+2கந+ந^2=9$.
∴ $க+ந=\pm 3$ .. .. (6).
(2) ஐ (6) ஒடு கூட்ட, $2க=4$, அல்லது -2.
∴ $க=2$, அல்லது -1.
(5) இற் பிரதியிட, $ந=1$, அல்லது -2.

∴ வேண்டிய தீர்வு $\left.\begin{array}{l}க=2\\ந=1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}க=-1\\ந=-2\end{array}\right\}$ என்பன.

உ—ம்.

2. $க^2நய=6$, $கந^2ய=12$, $கநய^2=18$. இவற்றைத் தீர்க்க.

எல்லாவற்றையும் ஒருங்கு பெருக்குக.
$க^4ந^4ய^4=6\times12\times18=6\times6\times2\times3\times6=6\times6\times6\times6$
∴ $கநய=\pm 6$.
தந்த சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றையும் இதனல் வகுக்க.
$க=\pm 1$, $ந=\pm 2$, $ய=\pm 3$.

∴ $\left.\begin{array}{l}க=1\\ந=2\\ய=3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}க=-1\\ந=-2\\ய=-3\end{array}\right\}$ என்பனவே வேண்டிய தீர்வுகளாகும்.

பயிற்சி 24 (இ)

பின்வருவனவற்றினுடைய தீர்வுகளைக் காண்க:

1. $க^3+ந^3=7$, $க+ந=1$.
2. $க^3-ந^3=35$, $க-ந=5$.
3. $2க-ந=6$, $8க^3-ந^3=72$.
4. $க+3ந=-2$, $க^3+27ந^3=-26$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. $க^4 + க^2ந^2 + ந^4 = 91$,
$க^2 - கந + ந^2 = 13$.

6. $க^4 + க^2ந^2 + ந^4 = 133$,
$க^2 + கந + ந^2 = 7$.

7. $\frac{1}{க^3} + \frac{1}{ந^3} = 56$,
$\frac{1}{க} + \frac{1}{ந} = 2$.

8. $\frac{1}{க^3} - \frac{1}{ந^3} = 126$,
$\frac{1}{க} - \frac{1}{ந} = 6$.

9. $4(ந - க) = 3கந$,
$\frac{1}{க^3} - \frac{1}{ந^3} = \frac{9}{64}$.

10. $க + ந = 2கந$,
$\frac{1}{க^3} + \frac{1}{ந^3} = -\frac{7}{64}$.

11. $\frac{1}{க^3} - \frac{1}{ந^3} = 9$,
$\frac{1}{க^2} + \frac{1}{கந} + \frac{1}{ந^2} = 3$.

12. $\frac{1}{க^3} + \frac{1}{ந^3} = \frac{1}{க^2} - \frac{1}{கந} + \frac{1}{ந^2} = 19$.

13. $க^3 + ந^3 = -35$,
$க^2ந + கந^2 = -30$.

14. $க^3 - ந^3 = 133$,
$க^2ந - கந^2 = -70$.

15. $க^3 - ந^3 + 26க^3ந^3 = க - ந + 6க^2ந^2 = 0$.

16. $க^3 + ந^3 = 189க^3ந^3$,
$க + ந = -54க^2ந^2$.

17. $க^2நய = 6$, $கந^2ய = -12$, $கநய^2 = -18$.

18. $கந^2 = 18$, $நய^2 = -48$, $யக^2 = -16$.

19. $கந^2ய^2 = 2$, $க^2நய^2 = 4$, $க^2ந^2ய = -4$.

20. $\frac{க^2ந^2}{ய} = 4$, $\frac{ந^2ய^2}{க} = 32$, $\frac{ய^2க^2}{ந} = -32$.

இருபடிச் சமன்பாட்டு உத்திக்கணக்குக்கள்

(கடுமையான வகைகள்)

167. இங்குள்ள உத்திக் கணக்குக்கள் இருபடிச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டவை. இச் சமன்பாடுகளுக்கு என்றும் இரு தீர்வுகள் உள. எனினும், தந்த உத்திக்கணக்குக்கு இரு தீர்வுகளும் பொருந்துமா, அன்றி ஒரு தீர்வுதான் பொருந்துமா என மாணுக்கர் ஆராய்தல் வேண்டும்.

உ—ம்.

1. அ என்னும் பட்டினத்திலிருந்து இ என்னும் பட்டினத்திற்கு ஒரு புகைவண்டியும் இ இலிருந்து அ இற்கு ஒரு புகைவண்டியும் ஒரே நேரத்திற் புறப்பட்டு ஓடின. அவைகள் சந்தித்தபோது முன்னது பின்னதிலும் 40 மைல் கூட ஓடினதெனக் காணப்பட்டது. சந்தித்த பின் முன்னது $3\frac{1}{5}$ மணி நேரத்திலும் பின்னது 5 மணி நேரத்திலுந் தம்மோட்டங்களை முடித்தனவாயின், அப்பட்டினங்கள் ஒன்றுக்கொன்று எவ்வளவு தூரம் எனக்காண்க.

அப்புகைவண்டிகள் புறப்பட்டு க மணிநேரத்திற் சந்திக்க. அச் சந்திக்கும் புள்ளி அ இலிருந்து ந மைல் தூரமாகுக.

∴ அப்புள்ளி இ இலிருந்து $ந - 40$ மைல் தூரமாகும்.

அ இலிருந்து புறப்பட்ட வண்டி $ந - 40$ மைல் தூரத்தை $3\frac{1}{5}$ மணி நேரத்தில் ஓடும்.

∴ அதன் வேகம் மணிக்கு $\frac{ந - 40}{3\frac{1}{5}}$ மைல் = மணிக்கு $\frac{5(ந - 40)}{16}$ மைல்.

இ இலிருந்து புறப்பட்ட வண்டி ந மைல் தூரத்தை 5 மணி நேரத்தில் ஓடும்.

∴ அதன் வேகம் மணிக்கு $\frac{ந}{5}$ மைல்.

அ இலிருந்து இ இனது தூரம் $(ந + ந - 40)$ மைல் $= (2ந - 40)$ மைல்.

க மணி நேரத்தில் அ இலிருந்து புறப்பட்ட வண்டி சென்ற தூரம் $\frac{5க(ந - 40)}{16}$ மைல்.

க மணிநேரத்தில் இ இலிருந்து புறப்பட்ட வண்டி சென்ற தூரம் $\frac{கந}{5}$ மைல்.

ஆனல், கணக்கின்படி இத்தூரங்களின் கூட்டுத்தொகை $2ந - 40$ மைல்; வித்தியாசம் 40 மைல்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \frac{5க(ந-40)}{16}+\frac{கந}{5}=2ந-40,$$

$$\frac{5க(ந-40)}{16}-\frac{கந}{5}=40.$$

$$\therefore \frac{\frac{5(ந-40)}{16}+\frac{ந}{5}}{\frac{(5ந-40)}{16}-\frac{ந}{5}}=\frac{2ந-40}{40}$$

$$\therefore \frac{25(ந-40)+16ந}{25(ந-40)-16ந}=\frac{ந-20}{20}.$$

$$\therefore \frac{\{25(ந-40)+16ந\}+\{25(ந-40)-16ந\}}{\{25(ந-40)+16ந\}-\{25(ந-40)-16ந\}}=\frac{(ந-20)+20}{(ந-20)-20}.$$

$$\frac{50(ந-40)}{32ந}=\frac{ந}{ந-40}.$$

$$\therefore \frac{25(ந-40)}{16ந}=\frac{ந}{ந-40}.$$

$$\therefore 25(ந-40)^2=16ந^2.$$

$$\therefore 5(ந-40)=\pm 4ந.$$

$$\therefore ந=200, \text{ அல்லது } 22\tfrac{2}{9}.$$

கணக்கின்படி $ந=22\frac{2}{9}$ என்பது பொருந்தாது.

$$\therefore ந=200.$$

$$\therefore 2ந-40=360.$$

∴ அப்பட்டினங்களின் இடைத்தூரம் 360 மைல்.

உ—ம்.

2. இரு வட்டங்களின் பரிதிகளின் வித்தியாசம் 44 அடி; அவற்றின் பரப்பளவுகளின் வித்தியாசம் 550 சதுரவடி. அவ்வட்டங்களின் ஆரைகள் என்ன அளவுகளை உடையன?

பெரிய வட்டத்தின் ஆரை க அடியாகுக; சிறிய வட்டத்தின் ஆரை ந அடியாகுக.

∴ அவற்றின் பரிதிகளின் வித்தியாசம் $2\times\frac{22}{7}\times க-2\times\frac{22}{7}\times ந$ அடி.

அவற்றின்பரப்பளவுகளின் வித்தியாசம் $\frac{22}{7}க^2-\frac{22}{7}ந^2$ சதுரவடி.

ஆனல், கணக்கின்படி இவை முறையே 44 அடி, 550 சதுரவடி என்பன.

$$\therefore 2\times\frac{22}{7}\times க-2\times\frac{22}{7}\times ந=44 \quad .. \quad .. \quad .. \quad (1);$$

$$\frac{22}{7}க^2-\frac{22}{7}ந^2=550 \quad .. \quad .. \quad .. \quad (2);$$

(1) இலிருந்து $க-ந=7$ .. .. (3);

(2) இலிருந்து $க^2-ந^2=175$ .. .. (4);

(4) ஐ (3) ஆல் வகுக்க, $க+ந=25$ .. .. (5);

(5) ஐ (3) ஒடு கூட்ட $2க=32$.

$$\therefore க=16.$$

$க=16$ என (5) இற் பிரதியிட $ந=9$.

∴ அவ்வட்டங்களின் ஆரைகள் முறையே **16 அடி, 9 அடி** என்பனவாகும்.

பயிற்சி 24 (ஈ)

1. 240 யார் ஓடும்போது ஒரு வண்டியின் சிறுசில்லுப் பெருஞ் சில்லிலும் 12 சுற்றுக்கள் கூடுதலாகச் சுற்றியது. ஒவ்வொரு சில்லின் பரிதியும் 2 அடி குறைந்திருப்பின், சிறு சில்லுப் பெருஞ்சில்லிலும் 18 சுற்றுக்கள் கூடுதலாகச் சுற்றும். அச்சில்லுகளின் பரிதிகளைக் காண்க.

2. இரண்டு எண்களின் பெருக்கத்திலிருந்து அவற்றின் வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வருவது 19. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து அவற்றின் வித்தியாசத்தினது நாலும்டங்கைக் கழிக்க வருவது 53. அவ்வெண்கள் யாவை?

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. ஒரு புகைவண்டி ஒரு பட்டினத்திலிருந்து 210 மைல் தூரமுள்ள வேறொரு பட்டினத்திற்குப் புறப்படுகின்றது. இரண்டுமணி நேரத்திற்குப் பின் வேறொரு புகைவண்டி அதே பட்டினத்திலிருந்து புறப்பட்டு $2\frac{1}{4}$ மணி நேரத்தில் முதலாம் புகைவண்டி $1\frac{1}{2}$ மணி நேரத்திற்கு முன் விட்டுப் போன இடத்தைக் கடக்கின்றது. அதன்பின், தன் வேகத்தை மணிக்கு 5 மைல் வீதங் கூட்டித் தான் அடையவேண்டிய பட்டினத்தை முதலாம் புகைவண்டிக்கு 5 நிமிடம் முன்னர்ச் சேர்கின்றது. அப்புகைவண்டிகள் என்ன வேகங்களோடு புறப்பட்டன?

4. இரு குழந்தைகளுடைய வயதுகளின் கூட்டுத் தொகை 10; அக்குழந்தைகளுடைய வயதுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையின் 6 மடங்கு அவ்வயதுகளின் பெருக்கத்தின் 13 மடங்குக்குச் சமன். அக்குழந்தைகளின் வயதுகளைக் காண்க.

5. இரண்டு எண்களின் பெருக்கத்தை அவற்றின் கூட்டுத் தொகையாற் பெருக்க 960 உம் அவற்றின் வித்தியாசத்தாற் பெருக்க 360 உம் வருமாயின் அவ்வெண்கள் யாவை?

6. இரண்டு எண்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையை அவ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகையாற் பெருக்க 65 உம், அவ்விரு கூட்டுத்தொகைகளையுங் கூட்ட 18 உம் வருமாயின், அவ்வெண்கள் யாவை?

7. இரண்டு இலக்கங்கள் கொண்ட ஓர் எண் அவ்விலக்கங்களின் பெருக்கத்தின் மூன்று மடங்கிலும் 11 ஆற் கூடியது. அவ்விலக்கங்களின் கனங்களின் வித்தியாசம் அவ்விலக்கங்களின் வித்தியாசத்தின் 97 மடங்கு. அவ்வெண்ணைக் காண்க.

8. ஒரு தொகை கோழிகள் ஒரு தொகை ரூபாவிற்கு விலைப்பட்டன. அதே விலைக்கு 5 கோழிகள் கூடுதலாக விலைப்பட்டால், ஒவ்வொரு கோழியும் ஒரு ரூபா குறைந்தும், 5 கோழிகள் குறைவாக விலைப்பட்டால் ஒவ்வொரு கோழியும் ஒரு ரூபா கூடியும் விலைப்பட்டிருக்கும். கோழிகளினது தொகையையும் ஒவ்வொரு கோழியின் விலையையுங் காண்க.

9. இரு புகைவண்டிகள் இரு பட்டினங்களிலிருந்து புறப்பட்டு ஓடிச் சந்தித்தபோது முன்னது பின்னதிலும் 30 மைல் கூடுதலாக ஓடினதெனக்காணப்பட்டது. சந்தித்த பின் முன்னது $2\frac{1}{4}$ மணிநேரத்திலும் பின்னது 4 மணிநேரத்திலுந் தம்முடைய ஓட்டங்களை ஓடி முடித்தனவாயின், அப்பட்டினங்களின் இடைத்தூரத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 25.

இருபடிச் சார்புகளின் வரைப்படங்கள் (தொடர்ச்சி)

168. 21 ஆம் அத்தியாயத்தில் பரவளைவுகளின் வரைப் படங்கள் பற்றி ஒருவகை ஒருங்கமை யிருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் கூறப்பட்டன. இவ்வத்தியாயத்தில் இப்பிரிவில் வட்டம், அதிபரவளைவு என்பனவற்றின் வரைப்படங்கள் பற்றி வேறு வகை ஒருங்கமை யிருபடிச் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் முறைகள் கூறப்படும்.

I. வட்டம் : உற்பத்தியிலிருந்து யாதுமொரு புள்ளி ப இனது தூரம் $உப^2 = க^2 + ந^2$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலே தரப்படும். அதுபற்றி அ என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்க, $க^2 + ந^2 = அ^2$ என்னுஞ் சமன்பாடு அ என்பதை ஆரையாகவும் உற்பத்தியை மையமாகவுமுள்ள ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனலாம்.

உ—ம்.

(i) $க^2 + ந^2 = 25$, (ii) $ந = 2க - 3$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்பட முறையாலே தீர்க்க.

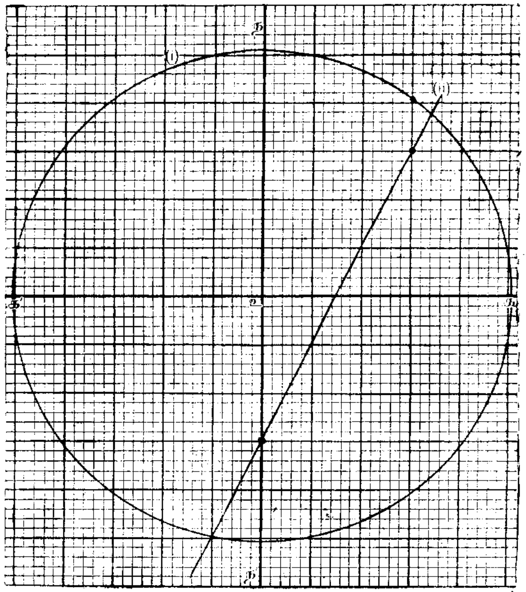
சமன்பாடு (i) ஆனது $ந = \sqrt{25 - க^2}$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாம். இச்சமன்பாடு க = 3, ந = 4 என்னும் ஆள்கூறுகளுக்கு உண்மையாதல் பரீட்சையினுற் காணப்படும். $\frac{1}{4}''$ ஓரலகைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு உற்பத்தியை மையமாகவும் (3, 4) என்னும் புள்ளியை உற்பத்தியோடு தொடுக்கும் நேர் கோட்டை ஆரையாகவுமுள்ள வட்டத்தை வரைக.

இனி, ந = 2க − 3 என்னுஞ் சமன்பாட்டில், க இனுடைய தேர்ந்த பெறுமானங்கள் சிலவற்றிற்கு ந இன் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்துப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்துக :—

(ii) $ந = 2க - 3$

க	−1	0	3
ந	−5	−3	3

இச்சார்பின் வரைப்படமாகிய நேர் கோட்டையும் அதேயளவுத்திட்டங் கொண்டு வரைக.



அந்நேர்கோடு அவ்வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளே தந்த சமன்பாடுகளினுடைய தீர்வுகளாகும்.

படத்திலிருந்து பின்வருந் தீர்வுகள் பெறப்பட்டன :—

க = 3·35, ந = 3·70; க = −·95, ந = −4·90.

II. அதிபரவளைவு : அ என்பது ஒரு மாறிலியாகவும் க என்பது ஒரு மாறியாகவும் இருக்க $\frac{அ}{க}$ என்னும் பின்னத்தின் பெறுமானத்தைப் பற்றிச் சிந்திக்க. இங்கு, க ஆனது சிறிது சிறிதாக, $\frac{அ}{க}$ இன் பெறுமானம் பெரிது பெரிதாகும். உதாரணமாக, க என்பது ·1, ·01, ·001 என்னும்

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பெறுமானங்களைப் பெற, $\frac{அ}{க}$ என்பது முறையே 10அ, 100அ, 1000அ என்னும் பெறுமானங்களைப் பெறும். க என்பதற்குப் போதிய அளவு சிறிய பெறுமானத்தைக் கொடுக்க $\frac{அ}{க}$ என்பதை வேண்டிய அளவு பெரிய பெறுமானத்தைப் பெறச் செய்யலாம். க என்பது யாஞ் சிந்திக்கத் தக்க எண்களுட் சிறியதினுஞ் சிறிதாயின், $\frac{அ}{க}$ என்பது யாஞ் சிந்திக்கத்தக்க எண்களுட் பெரியதினும் பெரிதாகும். யாஞ் சிந்திக்கத் தக்க எண்களுட் சிறியதினுஞ் சிறியது **பூச்சியம்** எனப்படும்; யாஞ் சிந்திக்கத் தக்க எண்களுட் பெரியதினும் பெரியது **முடிவிலி** எனப்படும்; முன்னது 0 என்றும் பின்னது ∞ என்றும் எழுதப்படும்.

$க=0$ ஆயின், $\frac{அ}{க}=\infty$ ஆகும்.

இனி, $ந=\frac{அ}{க}$ ஆகுக.

$\therefore கந=அ$.

$கந=அ$ என்னுஞ் சமன்பாட்டின் வரைப்படம் **அதிபர வளைவு** எனப்படும்.

உ—ம்.

1. (i) $கந=5$, (ii) $3க-2ந=-4$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்பட முறையாலே தீர்க்க.

இவை முறையே $ந=\frac{5}{க}$, $ந=\frac{3க+4}{2}$ என்னும் வடிவங்களில் எழுதப்படலாம். இருசமன்பாடுகளிலும் க இனது தேர்ந்த பெறுமானங்கள் சிலவற்றிற்கு ந இன் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்துப் பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்துக.

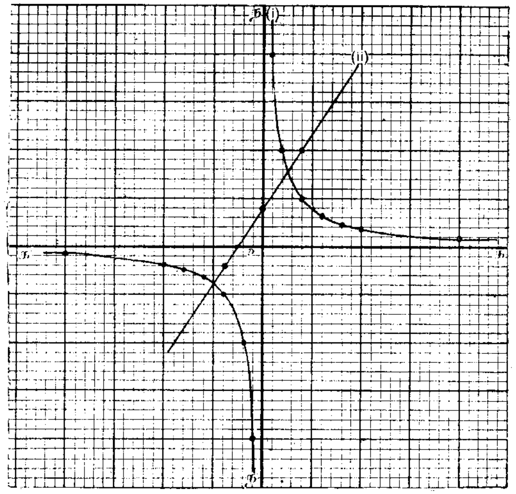
$$ந=\frac{5}{க} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (i)$$

க	+0	·5	1	2	3	4	5	10	∞
ந	∞	10	5	2·5	1·67	1·25	1	·5	+0
க	−∞	−10	−5	−4	−3	−2	−1	−.5	−0
ந	−0	−·5	−1	−1·25	−1·67	−2·5	−5	−10	−∞

$$ந=\frac{3க+4}{2} \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad (ii).$$

க	−2	0	2
ந	−1	2	5

·1″ ஓரலகைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு இவற்றின் வரைப்படங்களை வரைக.



(i) ஆவது ஓர் அதிபர வளைவையும் (ii) ஆவது ஒரு நேர் கோட்டையுந் தருதல் காண்க. அந்நேர்கோடு அவ்வதிபரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளுடைய ஆள்கூறுகளே அச் சமன்பாடுகளுடைய தீர்வுகளாகும்.

படத்திலிருந்து பின்வருந் தீர்வுகள் பெறப்பட்டன:
$க=1\cdot28$, $ந=3\cdot92$; $க=-2\cdot61$, $ந=-1\cdot92$.

உ—ம்.

(2) (i) $கந=28$, (ii) $க^2+ந^2=65$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்பட முறையாலே தீர்க்க.

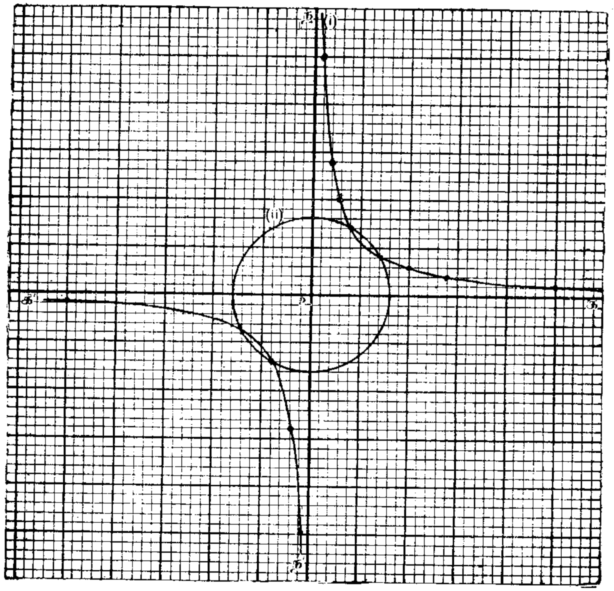
$கந=28$ என்னுஞ் சமன்பாடு $ந=\frac{28}{க}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம். இச்சமன்பாட்டில் க இனது தேர்ந்த பெறுமானங்கள் சிலவற்றிற்கு ந இன் ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்துப் பின்வருமாறு அட்டவணைப் படுத்துக:

(i) $ந=\frac{28}{க}$.

க	+0	1	2	4	5	6	7	14	28	∞
ந	∞	28	14	7	5·6	4·7	4	2	1	0
க	−∞	−28	−14	−7	−6	−5	−4	−2	−1	−0
ந	−0	−1	−2	−4	−4·7	−5·6	−7	−14	−28	−∞

·05 ஆனது ஓரலகைக் குறிப்பதாகக் கொண்டு இச் சார்பின் வரைப்படமாகிய அதிபரவளைவை வரைக.

இனி, $க^2+ந^2=65$ என்னுஞ் சமன்பாடு $ந=\sqrt{65-க^2}$ என்னும் வடிவத்தில் இடப்படலாம். இச்சமன்பாடு (4, 7) என்னும் ஆள்கூறுகளுக்கு உண்மையாதல் பரீட்சையினாற் காணப்படும். உற்பத்தியை மையமாகவும் (4, 7) என்னும் புள்ளியை அவ்வுற்பத்தியோடு தொடுக்கும் நேர்கோட்டை ஆரையாகவுமுள்ள வட்டத்தை முன் வரைப்படத்தின் அளவுத் திட்டங் கொண்டு வரைக.



அவ்வதிபரவளைவை அவ்வட்டம் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளே தந்த சமன்பாடுகளினுடைய தீர்வுகளாகும்.

படத்திலிருந்து பின்வருந் தீர்வுகள் பெறப்பட்டன:—
$க=\pm4$, $ந=\pm7$; $க=\pm7$, $ந=\pm4$.

169. இப்பிரிவில் இருபடிச் சார்பின் வரைப்படம் பற்றிய சில செய்திகளை ஆராய்வோம்.

உ—ம்.

$4+3க-2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=-3$ இலிருந்து $க=4$ வரைக்குமுள்ள க இன் பெறுமானங்களுக்கு வரைக.

(i) க இன் எப்பெறுமானங்களின் வீச்சிற்குள் அச்சார்பு நேர்க்குறியோடு பொருந்தி நிற்கும்?

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

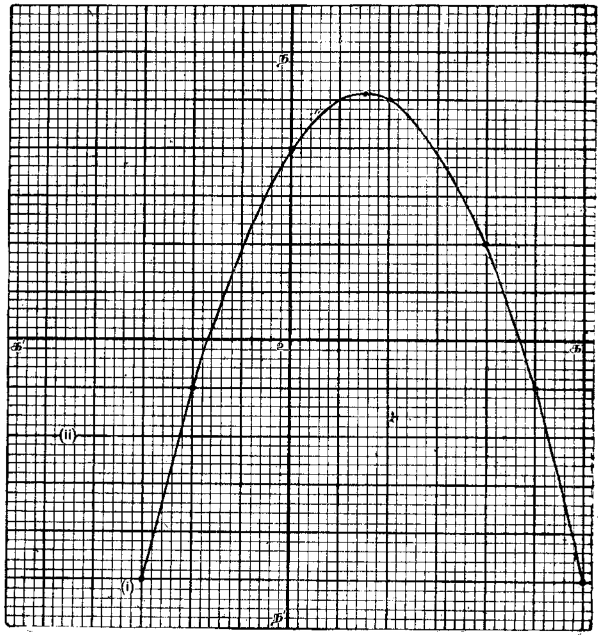
(iii) உமது வரைப்படந் துணைக்கொண்டு $2க^2 - 3க - 6 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

$ந = 4 + 3க - 2க^2$ ஆகுக.

க இனுடைய தேர்ந்த பெறுமானங்கள் சிலவற்றிற்கு ந இனுடைய ஒத்த பெறுமானங்களைக் கணித்துப் பின் வருமாறு அட்டவணைப் படுத்துக.

க	−1·5	−1	0	·75	1	2	2·5	3
ந	−5	−1	4	5·13	5	2	−1	−5

க − அச்சில் $\frac{1}{2}''$ ஓரலகிற்கும் ந அச்சில் $\frac{1}{4}''$ ஓரலகிற்கும் வகைக்குறி எனக்கொண்டு $4 + 3க - 2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படமாகிய பரவளைவை வரைக.



(i) அவ்வரைப்படம் $(-·85, 0)$, $(2·35, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையில் க அச்சிற்கு மேற்பக்கமாகக் கிடத்தல் காண்க. ஆயின், க இன் பெறுமானம் $-·85$, $2·35$ என்னும் புள்ளிகளுக்கு இடையிற் கிடக்கும் வரைக்கும் ந இன் பெறுமானம், அல்லது $4 + 3க - 2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் பெறுமானம் நேர்க்குறியோடு பொருந்தி நிற்கும்.

(ii) படத்தின்படி, அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானம் 5·13.

(iii) இனி, $2க^2 - 3க - 6 = -(4 + 3க - 2க^2) - 2$

$$= - ந - 2.$$

$2க^2 - 3க - 6 = 0$ எனின், $- ந - 2 = 0$;

அதாவது $ந = -2$.

$ந = -2$ என்னும் வரைப்படமாகிய நேர் கோட்டை அதேயளவுத்திட்டங் கொண்டு வரைந்து அப்பரவளைவை அந்நேர்கோடு வெட்டும் புள்ளிகளின் கிடைத்தூரங்களைக் காண்க. அக்கிடைத்தூரங்களே $2க^2 - 3க - 6 = 0$ என்பதனுடைய தீர்வுகளாகும்.

படத்தின்படி, வேண்டிய தீர்வுகள் $க = 2·6$, $க = -1·14$ என்பனவாகும்.

பயிற்சி 25

1. பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை வரைப்படமுறையாலே தீர்க்க:

(i) $க^2 + ந^2 = 41$, $ந = 3க - 2$.

(ii) $கந = 6$, $2ந - 3க = 2$.

(iii) $க^2 + ந^2 = 13$, $கந = 4$.

(iv) $கந = 4$, $ந = 3க - 2$.

(v) $க^2 + ந^2 = 45$, $ந = க - 3$.

(vi) $கந = 7$, $க^2 + ந^2 = 40$.

(vii) $க^2 + ந^2 = 34$, $ந = 2க + 3$.

(viii) $கந = 8$, $3ந = 2க + 3$.

(ix) $க^2 + ந^2 = 20$, $கந = 4$.

2. $க^2 - 2க - 8$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க = -2$, $க = 4$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(1) க இன் பெறுமானங்களின் எவ்வீச்சிற்குள் அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்தி நிற்கும்?

(2) அச்சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(3) அவ்வரைப் படத்தைத் துணைக் கொண்டு $க^2-2க-6=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

3. $6+க-2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=3$, $க=-2\cdot5$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(1) க இன் பெறுமானங்களின் எவ்வீச்சிற்குள் அச்சார்பின் பெறுமானம் 1 இலும் பெரிதாகும்?

(2) அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(3) அவ்வரைப் படத்தைத் துணைக் கொண்டு $2க^2-க-5=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

4. $2க^2-க-10$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=3$, $க=-3$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(1) க இன் பெறுமானங்களின் எவ்வீச்சிற்குள் அச்சார்பு 2 இலுஞ் சிறிதாகும்?

(2) அச்சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(3) அவ்வரைப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $2க^2-க-9=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

5. $15-4க-4க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=2$, $க=-3$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(1) க இன் எப் பெறுமானத்திற்கு மேல் க ஆனது கூடுதலுற அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

(2) அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(3) அவ்வரைப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $4க^2+4க-13=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

6. $2க^2-க-15$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=3\cdot5$, $க=-3$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக. ஒரு தக்க நேர்கோட்டை இவ்வரைப் படம் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டு $2க^2+க-11=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

7. $6-க-2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=3$, $க=-3$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(1) $க=-1$ என்னும் புள்ளியில் அவ்வரைப்படத்தின் சாய்வைக் காண்க.

(2) அச்சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(3) ஒரு தக்க நேர்கோட்டை அவ்வரைப்படம் வெட்டும் புள்ளிகளைக் கண்டு $2க^2+2க-3$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

8. $ந=(2-3க)(க+1)$ என்பதன் வரைப்படத்தை -2, 1 என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள க இன் பெறுமானங்களுக்கு வரைக. உமது வரைப் படத்தைப் பயன்படுத்தி $6க^2+4க-3=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

9. $6+5க-6க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=2$, $க=-1\frac{1}{2}$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(1) க இன் எப்பெறுமானத்திற்கு மேல் க ஆனது கூடுதலுற அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

(2) க இன் எப்பெறுமானத்திற்குக் கீழ் க ஆனது குறைதலுற அச்சார்பு எதிர்க் குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

10. ஒரு சோடி அச்சுக்கள் பற்றி $ந=\dfrac{2க+3}{க+3}$, $ந=க+\frac{1}{2}$ என்பனவற்றின் வரைப்படங்களை வரைந்து அவற்றைத் துணைக் கொண்டு $2க^2+3க-9=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 8.

(அ)

1. $9\text{க} - 24\text{க}^{\frac{1}{2}}\text{ந}^{\frac{1}{3}} + 16\text{ந}^{\frac{2}{3}}$ என்பதன் வர்க்க மூலத்தைக் காண்க.

2. மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க :—

(i) $\dfrac{16 \cdot 58 \times \sqrt{\cdot 8945}}{\cdot 04653 \times (2 \cdot 578)^2}$;

(ii) $\sqrt{(56 \cdot 74)^2 - (55 \cdot 93)^2}$.

3. $2\text{க} - \text{ந} = 5$, $2\text{க}^2 - \text{கந} + 4 = \text{ந}^2$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இருவட்டங்களின் பரிதிகளின் வித்தியாசம் 44 அடி; அவற்றின் பரப்பளவுகளின் வித்தியாசம் 462 சதுரவடி. அவ்வட்டங்களின் ஆரைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

5. $\text{க}^2 - 2\text{க} - 5$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $\text{க} = 4$, $\text{க} = -2$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(i) க இன் எப் பெறுமான்ங்களின் வீச்சிற்குள் அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திநிற்கும்.?

(ii) அச்சார்பின் இழிவுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) அவ்வரைப் படத்தைத் துணைக் கொண்டு $\text{க}^2 - 2\text{க} - 4 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ஆ)

1. $\dfrac{\text{அ}^3 - \text{இ}^{-3}}{\text{அ} - \text{இ}^{-1}}$ என்பதைச் சுருக்குக.

2. (i) அட்டவணையை வழங்காது $\text{மட}_3\, 243$, $\text{மட}_2\, 128$, $\text{மட}_5\, 125$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) $\text{த} = \text{ம}\left(1 + \dfrac{\text{வ}}{100}\right)^{\text{அ}}$ இங்கு $\text{ம} = 720$, $\text{வ} = 3 \cdot 5$, $\text{அ} = 16$ எனின், த இன் பெறுமானத்தை அட்டவணையை வழங்கிக் காண்க.

3. $3\text{க} + 2\text{ந} = 1$, $\text{க}^2 - 3\text{ந}^2 = 3\text{க} - \text{ந} - 6$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இரண்டு எண்களின் பெருக்கத்தை அவற்றின் கூட்டுத்தொகையாற் பெருக்க 120 உம், அவற்றின் வித்தியாசத்தாற் பெருக்க 30 உம் வருமாயின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

5. $7 + 2\text{க} - \text{க}^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $\text{க} = -2$, $\text{க} = 4$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(i) க இன் பெறுமானங்களின் எவ்வீச்சிற்குள் அச்சார்பின் பெறுமானம் 1 இலும் பெரிதாகும்?

(ii) அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) அவ்வரைப் படத்தைத் துணைக் கொண்டு $\text{க}^2 - 2\text{க} - 6 = 0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(இ)

1. $\dfrac{\text{க}^{\frac{3}{2}} + 2\text{க} - 3\text{க}^{\frac{1}{2}}}{\text{க}^{\frac{1}{2}} + 3}$. இதனைச் சுருக்குக.

2. மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க:—

(i) $\sqrt{\text{க}^3 + \text{ந}^3}$, $\text{க} = 3 \cdot 675$, $\text{ந} = \cdot 0574$ ஆயின்.

(ii) $\dfrac{2 \cdot 834 \times \cdot 8652}{(\cdot 0846)^2}$

3. $\text{க}^2 + \text{ந}^2 - 2\text{க} - 3\text{ந} - 10 = 0$, $\text{க} - 2\text{ந} = 6$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இரு குழந்தைகளின் வயதுகளின் கூட்டுத்தொகை 9. அக்குழந்தைகளுடைய வயதுகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை அவ் வயதுகளின் பெருக்கத்தின் $2\frac{1}{2}$ மடங்குக்குச் சமன். அக்குழந்தைகளின் வயதுகளைக்காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

5. $13-3க-2க^2$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=-3\cdot5$, $க=2$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக். கிடையில் வரைக.

(i) க இன் எப் பெறுமானத்திற்கு மேல் க ஆனது கூடுதலுற அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

(ii) அச்சார்பின் உயர்வுப் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) அவ்வரைப்படத்தைத் துணைக்கொண்டு $2க^2+3க-12=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க·

(ஈ)

1. $க-ந-ய-3\sqrt[3]{கநய}$ என்பதை $க^{\frac{1}{3}}-ந^{\frac{1}{3}}-ய^{\frac{1}{3}}$ என்பதால் வகுக்க.

2. மடக்கையட்டவணையைப் பிரயோகித்துப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(i) $\dfrac{82\cdot63\times0\cdot0856}{(9\cdot024)^2}$, (ii) $(0\cdot6074)^{\frac{1}{5}}$.

3. $2க+ந=7$, $\dfrac{க}{ந}+\dfrac{ந}{க}=\dfrac{10}{3}$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இரண்டு எண்களின் பெருக்கத்திலிருந்து அவற்றின் வித்தியாசத்தைக் கழிக்க வருவது 25. அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையிலிருந்து அவற்றின் வித்தியாசத்தின் மூன்று மடங்கைக் கழிக்க வருவது 29. அவ்வெண்கள் யாவை?

5. $2க^2-க-13$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க=3$, $க=-3$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக. ஒரு தக்க நேர்கோட்டை இவ்வரைப்படம் வெட்டும் புள்ளிகளைக்கண்டு $2க^2+க-12=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(உ)

1. $க^{\frac{2}{3}}-ந^{\frac{2}{3}}+1+க^{\frac{1}{3}}ந^{\frac{1}{3}}+ந^{\frac{1}{3}}-க^{\frac{1}{3}}$ என்பதை $க^{\frac{1}{3}}-ந^{\frac{1}{3}}+1$ என்பதாற் பெருக்குக.

2. (i) மடக்கை யட்டவணையைப் பிரயோகிக்காது $மட432-மட288=மட3-மட2$ என நிறுவுக.

(ii) $அ=\cdot9645$, $இ=4\cdot078$, $உ=\cdot9531$ ஆயின், $\dfrac{அ}{இ}+\sqrt{\dfrac{இ}{உ}}$ என்பதன் பெறுமானத்தை மடக்கை யட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

3. $2க^2+2ந^2+5கந=க+3ந=ந-க$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. ஒரு தொகை ஆடுகள் ஒரு தொகை ரூபாவிற்கு விலைப்பட்டன. அதே விலைக்கு 6 ஆடுகள் கூடுதலாக விலைப்பட்டால், ஒவ்வோர் ஆடும் 12 ரூபா குறைந்தும், (ஆடுகள் குறைவாக விலைப்பட்டால் ஒவ்வோர் ஆடும் 20 ரூபா கூடியும் விலைப்பட்டிருக்கும். ஆடுகளினது தொகையையும் ஒவ்வோர் ஆட்டின் விலையையுங் காண்க.

5. $ந=(3-2க)(2+3க)$ என்பதன் வரைப்படத்தை $3, -2$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக. உமது வரைப்படத்தைப் பயன்படுத்தி $6க^2+6க-5=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

(ஊ)

1. $$\left(\frac{அ^{-\frac{1}{2}}}{இ^{-\frac{1}{3}}உ^{\frac{1}{6}}}\right)^{-3}\div\left(\frac{அ^{-1}}{இ^{-\frac{2}{3}}உ^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}}$$ இதனைச் சுருக்குக.

2. மடக்கையட்டவணையை வழங்கிப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க.

(i) $\dfrac{51\cdot64\times\cdot6834}{(7\cdot189)^2}$, (ii) $2\cdot783^{\frac{1}{3}}+(4\cdot763^{\frac{1}{4}}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $க^2 - கந + ந^2 = க + 4 = ந + 5$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. 360 யார் ஓடும்போது ஒரு வண்டியின் சிறு சில்லுப் பெருஞ்சில்லிலும் 12 சுற்றுக்கள் கூடுதலாகச் சுற்றியது. ஒவ்வொரு சில்லின் பரிதியும் 2 அடி குறைந்திருந்தால், சிறுசில்லுப் பெருஞ்சில்லிலும் 16 சுற்றுக்கள் கூடுதலாகச் சுற்றும். அச்சில்லுகளின் பரிதிகளைக் காண்க.

5. $5 + 3க - 4க^4$ என்னுஞ் சார்பின் வரைப்படத்தை $க = -2$, $க = 2$ என்னும் க இன் பெறுமானங்களுக்கிடையில் வரைக.

(i) க இன் எப்பெறுமானத்திற்கு மேல் க ஆனது கூடுதலுற அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

(ii) க இன் எப்பெறுமானத்திற்குக் கீழ் க ஆனது குறைதலுற அச்சார்பு எதிர்க்குறியோடு பொருந்திக் குறைதலுறும்?

(iii) $க = 1$ என்னும் புள்ளியில் அச்சார்பின் சாய்வைக் காண்க.

(எ)

1. $\dfrac{4^{அ} - 2 . 2^{2(அ-1)}}{4^{அ} + 2 . 2^{2(அ-1)}}$. இதனைச் சுருக்குக.

2. மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க:—

(i) $\sqrt[3]{\cdot 8234}$, (ii) $\sqrt{\cdot 06432}$,

(iii) $\dfrac{\sqrt[3]{\cdot 8234} - \sqrt{\cdot 06432}}{\sqrt[3]{\cdot 8234} + \sqrt{\cdot 06432}}$.

3. $க^2 + 4ந^2 = 17$, $க + 2ந = 3$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. ஓர் ஆகாயக் கப்பல் 2400 மைல் தூரத்தை ஒரு குறித்த வேகத்தோடு பறக்குமாறு திட்டமிடப் பட்டிருந்தது. காற்றுக் குழப்பங் காரணமாக அதன் வேகம் மணிக்கு 60 மைல் வீதங் குறைக்கப்பட அது தனது பயணத்தை முடிக்கத் திட்டமிட்ட நேரத்திலும் 2 மணி நேரங் கூடுதலாக எடுத்தது. அது பறந்த வேகமென்ன?

5. $க^2 + ந^2 = 5$, $கந = 2$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்படமுறையாலே தீர்க்க.

(ஏ)

1. $\dfrac{3^{அ+5} - 6 . 3^{அ+2}}{3^{அ+3} \times 8}$. இதனைச் சுருக்குக.

2. மடக்கையட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களை இரண்டு தசமதானங்களுக்குத் திருத்தமாகக் காண்க:—

(i) $\dfrac{(\cdot 2567)^2 \times 142 \cdot 6}{\sqrt{9 \cdot 156}}$, (ii) $\dfrac{16}{21}(4 \cdot 562^2 - 3 \cdot 984^2)$.

3. $கந = 3(க + ந) = 4(க - ந)$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இரு புகைவண்டிகள் இருபட்டினங்களிலிருந்து ஒன்றையொன்று நோக்கிப் புறப்பட்டு ஓடிச் சந்தித்தபோது முன்னது பின்னதிலும் 60 மைல் கூடுதலாகஓடினதெனக் காணப்பட்டது. சந்தித்த பின் முன்னது 2 மணிநேரத்திலும் பின்னது $4\frac{1}{2}$ மணிநேரத்திலுந் தம்முடைய ஓட்டங்களை ஓடி முடித்தனவாயின், அப்பட்டினங்களின் இடைத் தூரத்தைக் காண்க.

5. $கந = 7$, $க - 2ந = 2$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்பட முறையாலே தீர்க்க.

(ஐ)

1. $\left\{(அ + இ)^{\frac{1}{2}} + (அ - இ)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$. இதன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. (i) அட்டவணையைப் பயன்படுத்தாது $25°$, $27^{\frac{2}{3}}$, $\left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}}$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(ii) $க=\frac{4}{3}\pi அ^3$ என்னுஞ் சூத்திரத்தில் $\pi=\frac{22}{7}$ ஆயும் அ$=\cdot 8325$ ஆயுமிருந்தால், க இன் பெறுமானத்தை அட்டவணையைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

3. $3க^2-4கந=20$, $3கந+4ந^2=-2$. இவற்றைத் தீர்க்க.

4. இரண்டு இலக்கங்கள் கொண்ட ஓர் எண் அவ்விலக்கங்களின் பெருக்கத்தின் இரு மடங்கிலும் 23 ஆற் கூடியது. அவ்விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் அவ்விலக்கங்களின் வித்தியாசத்தின் 8 மடங்கு. அவ்வெண்யாது?

5. $க^2+ந^2=25$, $2க+3ந=1$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைப்பட முறையாலே தீர்க்க.

அத்தியாயம் 26

விகிதமும் விகிதசமமும்

விகிதம்

170. விகிதம் என்பது ஒரே இனத்து இரு கணியங்களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பு; அது ஒரு கணியம் மற்றைக் கணியத்தின் என்ன மடங்கென்ருதல் என்ன பின்னமென்ருதல் உணர்த்தும்.

அ, இ என்பன ஒரே இனத்து இருகணியங்களாயின், அ இற்கு இ என்னும் விகிதம் $\frac{அ}{இ}$ என்னும் பின்னத்தாற் குறிக்கப்படும்.

அ இற்கு இ என்னும் விகிதத்தை அ : இ என எழுதுதல் வழக்கு; இங்கு, அ என்பது அவ்விகிதத்தின் முன்னுறுப்பு என்றும் இ என்பது அதன் பின்னுறுப்பு என்றுங் கூறப்படும்.

171. ஒரு விகிதத்தின் உறுப்புக்களை ஒரே கணியத்தாற் பெருக்கினுலும் வகுத்தாலும் அவ்விகிதத்தின் பெறுமானம் மாருது.

$\frac{அ}{இ}=\frac{மஅ}{மஇ}$; $\quad\therefore அ : இ=மஅ : மஇ.$

$\frac{அ}{இ}=\frac{\frac{அ}{ம}}{\frac{இ}{ம}}$; $\quad\therefore அ : இ=\frac{அ}{ம} : \frac{இ}{ம}.$

172. கூட்டுவிகிதம் : இரண்டு விகிதங்களாதல் இரண்டின் மேற்பட்ட விகிதங்களாதல் ஒருங்கு பெருக்கப்பட்டால், அவை **கூட்டுப்பட்டன** எனப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$, $\frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ என்பன கூட்டுப்பட்டால் $\frac{\text{அஉ}}{\text{இஎ}}$ என்பது பெறப்படும்.

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ என்பது தன்னோடு கூட்டுப்பட்டால் $\frac{\text{அ}^2}{\text{இ}^2}$ என்பது பெறப்படும்.

$\frac{\text{அ}^2}{\text{இ}^2}$ என்பது $\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ இன் **இருமடிவிகிதம்** எனப்படும்.

அதுபோல, $\frac{\text{அ}^3}{\text{இ}^3}$ என்பது $\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ இன் **மும்மடிவிகிதம்** எனப்படும்.

$\frac{\text{அ}^{\frac{1}{2}}}{\text{இ}^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{\text{அ}^{\frac{1}{3}}}{\text{இ}^{\frac{1}{3}}}$ என்பன முறையே **கீழிருமடிவிகிதம்**, **கீழ்மும்மடிவிகிதம்** எனப்படும்.

173. அ $>=<$ இ என்பனவற்றிற்கு ஏற்ப $\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ என்னும் விகிதம் முறையே **பெருஞ்சமனிலி**, **சமமுளி**, **சிறுசமனிலி** எனப் பெயர் பெறும்.

5 : 4 என்பது பெருஞ்சமனிலி,
4 : 4 என்பது சமமுளி,
4 : 5 என்பது சிறுசமனிலி.

174. அ, இ, க என்பன மூன்று நேர்க்கணியங்களாயின், அ $>=<$ இ என்பனவற்றிற்கு ஏற்ப $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} >=< \frac{\text{அ}+\text{க}}{\text{இ}+\text{க}}$.

இதனை நிறுவுவோம் :

$$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} - \frac{\text{அ}+\text{க}}{\text{இ}+\text{க}} = \frac{\text{அ}(\text{இ}+\text{க}) - \text{இ}(\text{அ}+\text{க})}{\text{இ}(\text{இ}+\text{க})}$$

$$= \frac{\text{க}(\text{அ}-\text{இ})}{\text{இ}(\text{இ}+\text{க})}.$$

$\therefore$ அ, இ, க என்பன நேரெண்களாயின்,

$\frac{\text{க}(\text{அ}-\text{இ})}{\text{இ}(\text{இ}+\text{க})}$ என்பது நேராகவோ, பூச்சியமாகவோ, எதிராகவோ இருத்தலுக்கு ஏற்ப $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} >=< \frac{\text{அ}+\text{க}}{\text{இ}+\text{க}}$.

ஆயின், அ $>=<$ இ என்பனவற்றிற்கு ஏற்ப

$$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} >=< \frac{\text{அ}+\text{க}}{\text{இ}+\text{க}}.$$

இவற்றிலிருந்து பின்வரும் உண்மை பெறப்படும்:

ஒரு விகிதத்தின் உறுப்புக்களுக்கு ஒரே கணியத்தைக் கூட்டினால், அவ்விகிதம் பெருஞ் சமனிலியாயின் குறைதலுறும், சிறு சமனிலியாயின் கூடுதலுறும்.

இவ்வுண்மையை எடுத்துக்காட்டுக்களால் விளக்குவோம்:

4 : 3 என்னும் விகிதத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் 3 ஐக் கூட்டினாற் பெறும் புதுவிகிதம் 7 : 6. இது 4 : 3 என்பதிலுஞ் சிறிதாதல் காண்க. 3 : 4 என்னும் விகிதத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் 4 ஐக் கூட்டினாற் பெறும் புதுவிகிதம் 7 : 8. இது 3 : 4 என்பதிலும் பெரிதாதல் காண்க.

175. அ, இ, க என்பன நேர்க்கணியங்களாயிருக்க, க என்பது அ, இ என்பனவற்றுட் சிறியதிலுஞ் சிறிதாயின், அ $<=>$ இ என்பனவற்றிற்கு ஏற்ப $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} >=< \frac{\text{அ}-\text{க}}{\text{இ}-\text{க}}$.

இதனை நிறுவுவோம் :

$$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} - \frac{\text{அ}-\text{க}}{\text{இ}-\text{க}} = \frac{\text{அ}(\text{இ}-\text{க}) - \text{இ}(\text{அ}-\text{க})}{\text{இ}(\text{இ}-\text{க})}$$

$$= -\frac{\text{க}(\text{அ}-\text{இ})}{\text{இ}(\text{இ}-\text{க})}.$$

$\therefore \frac{\text{க}(\text{அ}-\text{இ})}{\text{இ}(\text{இ}-\text{க})}$ என்பது எதிராகவோ, பூச்சியமாகவோ, நேராகவோ இருத்தலுக்கு ஏற்ப $\frac{\text{அ}}{\text{இ}} > \; < \frac{\text{அ}-\text{க}}{\text{இ}-\text{க}}$.

ஆயின், அ $<=>$ இ என்பனவற்றிற்கு ஏற்ப,

$$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} >=< \frac{\text{அ}-\text{க}}{\text{இ}-\text{க}}.$$

இவற்றிலிருந்து பின்வரும் உண்மை பெறப்படும் :

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஒரு விகிதத்தின் உறுப்புக்களிலிருந்து அவற்றிலுஞ் சிறிய ஒரு கணியத்தைக் கழித்தால், அவ்விகிதம் பெருஞ் சமனிலியாயின் கூடுதலுறும், சிறு சமனிலியாயின் குறைதலுறும்.

இவ்வுண்மையை எடுத்துக்காட்டுக்களால் விளக்குவோம்:

7 : 6 என்னும் விகிதத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலு மிருந்து 3 ஐக் கழிக்க வரும் புதுவிகிதம் 4 : 3. இது 7 : 6 என்பதிலும் பெரிதாதல் காண்க.

5 : 8 என்னும் விகிதத்தின் ஒவ்வோர் உறுப்பிலு மிருந்து 4 ஐக் கழிக்க வரும் புது விகிதம் 1 : 4. இது 5 : 8 என்பதிலுஞ் சிறிதாதல் காண்க.

உ—ம்.

1. 3 : 4, 5 : 9 என்றும் விகிதங்களை ஒப்பிடுக.

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{9}=\frac{27-20}{36}=\frac{7}{36};$$

$\frac{7}{36}$ என்பது ஒரு நேர்க்கணியம் ;

$$\therefore \frac{3}{4}>\frac{5}{9}.$$

$$\therefore 3:4>5:9.$$

உ—ம்.

2. 2 : 3, 4 : 5, 6 : 8 என்னும் விகிதங்களைக் கூட்டுப் படுத்துக.

வேண்டிய கூட்டுவிகிதம் $=2\times4\times6 : 3\times5\times8$
$=2 : 5.$

உ—ம்.

3. 2 : 3 இன் இருமடிவிகிதத்தையும் 3 : 4 இன் மும்மடிவிகிதத்தையும் 16: 25 இன் கீழிருமடிவிகிதத்தை யுங் கூட்டுப்படுத்துக.

2 : 3 இன் இருமடி விகிதம் 4 : 9;
3 : 4 இன் மும்மடி விகிதம் 27 : 64;
16 : 25 இன் கீழிருமடி விகிதம் 4 : 5.
∴ வேண்டிய கூட்டு விகிதம் $4\times27\times4 : 9\times64\times5$
$=3 : 20.$

உ—ம்.

4. $3க^2-7கந+2ந^2=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிலிருந்து $\frac{க}{ந}$ என்னும் விகிதத்தைக் காண்க.

$3க^2-7கந+2ந^2=0.$

இருபக்கங்களையும் $ந^2$ என்பதால் வகுக்க.

$$\therefore 3\left(\frac{க}{ந}\right)^2-7\left(\frac{க}{ந}\right)+2=0.$$

$$\therefore \left(3\frac{க}{ந}-1\right)\left(\frac{க}{ந}-2\right)=0.$$

$$\therefore \frac{க}{ந}=\tfrac{1}{3}, \text{ அல்லது } 2.$$

உ—ம்.

5. இரு மாணாக்கருடைய வயது விகிதம் 6 : 7. ஆறு ஆண்டில் அவர்களுடைய வயது விகிதம் 9 : 10 ஆகும். அவர்களுடைய வயதுகளைக் காண்க.

அம்மாணாக்கருடய வையது முறையே 6க, 7க ஆகுக. 6 ஆண்டில் அவர்களுடைய வயது விகிதம் (6க+6) :(7க+6) ஆகும்.

∴ கணக்கின்படி, $\frac{6க+6}{7க+6}=\frac{9}{10}.$

$\therefore 9(7க+6)=10(6க+6).$
$\therefore 3க=6.$
$\therefore க=2.$
$\therefore 6க=12;\quad 7க=14.$

∴ அவர்களுடைய வயது 12, 14 என்பன.

பயிற்சி 26 (அ)

1. பின்வரும் விகிதங்களை ஒப்பிடுக :
(1) 5 : 6, 9 : 10 ; (2) 11 : 12, 8 : 9 ;
(3) 12 : 13, 15 : 16.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

2. மேல்வரும் விகிதச்சோடிகள் ஒவ்வொன்றிலும் பெரியதைக் காண்க.

(1) $6 : 7,\ 15 : 17$; (2) $4 : 7,\ 6 : 13$; (3) $9 : 7,\ 81 : 64$.

3. $4 : 5$ இன் இருமடி விகிதத்தை $5 : 32$ என்னும் விகிதத்தோடு கூட்டுப்படுத்துக.

4. $12 : 11$ என்னும் விகிதத்தையும் $2 : 3$ இன் மும்மடிவிகிதத்தையும் $81 : 16$ இன் கீழிருமடிவிகிதத்தையுங் கூட்டுப்படுத்த வரும் விகிதத்தைக் காண்க.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து க : ந என்னும் விகிதத்தைக் காண்க :

5. $5(3க - 2ந) = 4(2க + ந)$.

6. $6க^2 - 19கந + 10ந^2 = 0$.

7. $\frac{4க - 5ந}{ந} = \frac{5க - 9ந}{2க}$.

8. $\frac{3அக + இந}{3அக - இந} = \frac{இ}{அ}$.

க : ந $= 2 : 3$ எனின், பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க :

9. $\frac{2க - ந}{3க + ந}$.

10. $\frac{ந^2 - க^2}{கந}$.

11. $\frac{2க^2 - 3கந + 3ந^2}{கந}$.

12. $\frac{க^2 - 2கந + 3ந^2}{க^2 + 2கந + 3ந^2}$.

13. $அ^2 - க^2 : அ^2 + க^2$ என்னும் விகிதம் $அ - க : அ + க$ இலும் பெரிதெனக்காட்டுக.

14. $அ^3 + இ^3 : அ^2 + இ^2 > அ^2 + இ^2 : அ + இ$ என நிறுவுக.

15. ம $><$ வ இற்கு ஏற்ப மஅ : வஇ $><$ அ : இ எனக்காட்டுக.

16. இரண்டு எண்கள் $3 : 8$ என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. ஒவ்வொன்றிற்கும் 6 ஐக் கூட்ட, அவை $1 : 2$ என்னும் விகிதத்தில் இருக்கும். அவ்வெண்களைக் காண்க.

17. $9 : 11$ என்னும் விகிதத்தைப் பெறுதற்கு $21:29$ என்னும் விகிதத்தின் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் எவ்வெண்ணைக் கூட்டல் வேண்டும் ?

18. இரு முக்கோணங்களினுடைய அடிகள் $2 : 3$ என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றினுடைய உயரங்கள் $3 : 4$ என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன. அவற்றினுடைய பரப்பளவுகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

176. பொதுவளவில்லாக் கணியங்கள் : இரு முழுவெண்களின் விகிதமாக உணர்த்தப்படாத விகிதமுள்ள இருகணியங்கள் **பொதுவளவில்லாதன** எனப்படும்; அவ்வாறு உணர்த்தப்படும் விகிதமுள்ள இருகணியங்கள் **பொதுவளவுள்ளன** எனப்படும்.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ என்பன இரு முழுவெண்களின் விகிதமாக உணர்த்தப்படாத விகிதமுள்ளனவாதலாற் பொதுவளவில்லாதனவாதலறிக.

177. சமவிகிதங்கள் : $\frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஒ}{ஐ} = \ldots$ எனின், இவ் விகிதங்கள்ஒவ்வொன்றும் $\left(\frac{பஅ^ந + மஉ^ந + வஒ^ந + \ldots}{பஇ^ந + மஎ^ந + வஐ^ந + \ldots}\right)^{\frac{1}{ந}}$ என்பதற்குச் சமன்.

இதனை நிறுவுவோம் :

$\frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஒ}{ஐ} = \ldots = ச$ ஆகுக.

எனின், $அ = இச$, $உ = எச$, $ஒ = ஐச \ldots$

$$\therefore \left(\frac{பஅ^ந + மஉ^ந + வஒ^ந + \ldots}{பஇ^ந + மஎ^ந + வஐ^ந + \ldots}\right)^{\frac{1}{ந}}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$= \left(\frac{\text{ப}\text{இ}^{ந}\text{ச}^{ந} + \text{ம}\text{எ}^{ந}\text{ச}^{ந} + \text{வ}\text{ஐ}^{ந}\text{ச}^{ந} + \dots}{\text{ப}\text{இ}^{ந} + \text{ம}\text{எ}^{ந} + \text{வ}\text{ஐ}^{ந} + \dots} \right)^{\frac{1}{ந}}$$

$$= \left\{ \frac{(\text{ப}\text{இ}^{ந} + \text{ம}\text{எ}^{ந} + \text{வ}\text{ஐ}^{ந} + \dots)\text{ச}^{ந}}{(\text{ப}\text{இ}^{ந} + \text{ம}\text{எ}^{ந} + \text{வ}\text{ஐ}^{ந} + \dots)} \right\}^{\frac{1}{ந}}$$

$$= \left(\text{ச}^{ந}\right)^{\frac{1}{ந}}$$

$$= \text{ச}$$

$$= \frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}} = \frac{\text{ஒ}}{\text{ஐ}} = \dots$$

இங்கு, ப = ம = வ = ... என்றும், ந = 1 என்றுங் கொண்டால், பின்வருவதைப் பெறலாம் :

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}} = \frac{\text{உ}}{\text{எ}} = \frac{\text{ஒ}}{\text{ஐ}} = \dots$ எனின், இவ்விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும்

$\frac{\text{அ} + \text{உ} + \text{ஒ} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots}$ என்பதற்குச் சமன்.

இதனைப் பின்வருமாறு சொல்பற்றிக் கூறலாம் :

ஒரு தொகை பின்னங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனுயின், ஒவ்வொரு பின்னமுந் தொகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையைப் பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகையால் வகுக்க வருவதற்குச் சமன்.

இங்கு வழங்கிய முறை ச முறை எனப்படும்.

178. $\frac{\text{அ}}{\text{இ}}, \frac{\text{உ}}{\text{எ}}, \frac{\text{ஒ}}{\text{ஐ}}$ ... என்பன நேருறுப்புக்களைக் கொண்ட சமனில் விகிதங்களாயின், $\frac{\text{அ} + \text{உ} + \text{ஒ} \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} \dots}$ என்னும் விகிதம் இவ்விகிதங்களுக்குட் பெரியதற்குஞ் சிறியதற்கும் இடைப்பட்ட பெறுமானமுடையதாகும்.

இதனை நிறுவுவோம்.

$\frac{\text{அ}}{\text{இ}}$ என்பதே தந்த விகிதங்களுட் பெரியதாகுக. அது ச இற்குச் சமனெனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{\text{இ}}{\text{அ}} = \text{ச}, \quad \frac{\text{உ}}{\text{எ}} < \text{ச}, \quad \frac{\text{ஒ}}{\text{ஐ}} < \text{ச}, \quad \dots$$

$$\therefore \text{அ} = \text{இ}\text{ச}, \quad \text{உ} < \text{எ}\text{ச}, \quad \text{ஒ} < \text{ஐ}\text{ச}, \quad \dots$$

$$\therefore \frac{\text{அ} + \text{உ} + \text{ஒ} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots} < \frac{\text{இ}\text{ச} + \text{எ}\text{ச} + \text{ஐ}\text{ச} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots}$$

$$< \text{ச}.$$

இனி, $\frac{\text{உ}}{\text{எ}}$ என்பதே தந்த விகிதங்களுட் சிறியதாகுக. அது த இற்குச் சமனெனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{\text{அ}}{\text{இ}} > \text{த}, \quad \frac{\text{உ}}{\text{எ}} = \text{த}, \quad \frac{\text{ஒ}}{\text{ஐ}} > \text{த}, \quad \dots$$

$$\therefore \text{அ} > \text{இ}\text{த}, \quad \text{உ} = \text{எ}\text{த}, \quad \text{ஒ} > \text{ஐ}\text{த}, \quad \dots$$

$$\therefore \frac{\text{அ} + \text{உ} + \text{ஒ} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots} > \frac{\text{இ}\text{த} + \text{எ}\text{த} + \text{ஐ}\text{த} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots}$$

$$> \text{த}.$$

$\therefore \frac{\text{அ} + \text{உ} + \text{ஒ} + \dots}{\text{இ} + \text{எ} + \text{ஐ} + \dots}$ என்பது தந்த விகிதங்களுள்ளே பெரியதற்குஞ் சிறியதற்கும் இடைப்பட்ட பெறுமானமுடையது.

179. $\text{அ}_1\text{க} + \text{இ}_1\text{ந} + \text{உ}_1\text{ய} = 0$ .. .. (1),

$\text{அ}_2\text{க} + \text{இ}_2\text{ந} + \text{உ}_2\text{ய} = 0$ .. .. (2).

இவற்றிலிருந்து க : ந : ய என்னும் விகிதங்களைக் காணல்.

தந்த இரு சமன்பாடுகளையும் பின்வருமாறு எழுதலாம்:

$\text{அ}_1\text{க} + \text{இ}_1\text{ந} = -\text{உ}_1\text{ய}$ .. .. (3),

$\text{அ}_2\text{க} + \text{இ}_2\text{ந} = -\text{உ}_2\text{ய}$ .. .. (4).

(3) ஐ இ_2 ஆலும் (4) ஐ இ_1 ஆலும் பெருக்குக.

$\therefore \text{அ}_1\text{இ}_2\text{க} + \text{இ}_1\text{இ}_2\text{ந} = -\text{இ}_2\text{உ}^1\text{ய}$ .. .. (5),

$\text{அ}_2\text{இ}_1\text{க} + \text{இ}_1\text{இ}_2\text{ந} = -\text{இ}_1\text{உ}_2\text{ய}$ .. .. (6).

(6) ஐ (5) இலிருந்து கழிக்க.

$$\therefore \text{க}(\text{அ}_1\text{இ}_2 - \text{அ}_2\text{இ}_1) = (\text{இ}_1\text{உ}_2 - \text{இ}_2\text{உ}_1)\text{ய}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore \frac{க}{ய} = \frac{இ_1 உ_2 - இ_2 உ_1}{அ_1 இ_2 - அ_2 இ_1}.$$

அதுபோல, $\frac{ந}{ய} = \frac{உ_1 அ_2 - உ_2 அ_1}{அ_1 இ_2 - அ_2 இ_1}.$

$$\therefore \frac{க}{இ_1 உ_2 - இ_2 உ_1} = \frac{ந}{உ_1 அ_2 - உ_2 அ_1} = \frac{ய}{அ_1 இ_2 - அ_2 இ_1}.$$

$$\therefore க : ந : ய = (இ_1 உ_2 - இ_2 உ_1) : (உ_1 அ_2 - உ_2 அ_2).$$
$$: (அ_1 இ_2 - அ_2 இ_1).$$

இப்பிரிவிலுள்ள சமன்பாடுகளில் $ய = 1$ எனப் பிரதியிட,

$அ_1 க + இ_1 ந + உ_1 = 0,$

$அ_2 க + இ_2 ந + உ_2 = 0$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

இவற்றினுடைய தீர்வுகள் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளாற் பெறப்படும் :

$$\frac{க}{இ_1 உ_2 - இ_2 உ_1} = \frac{ந}{உ_1 அ_2 - உ_2 அ_1} = \frac{1}{அ_1 இ_2 - அ_2 இ_1}.$$

மேற்கூறிய உண்மைகளைப் பயன்படுத்தும்முறை பின்வரும் உதாரணங்களால் அறியப்படும் :

உ—ம்.

(1) $\frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஓ}{ஐ}$ எனின், இவ்விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\sqrt[3]{\left(\frac{அஉ^2 - 3உஓ^2 - 4அஉஓ}{2இஎ^2 - 3எஐ^2 - 4இஎஓ}\right)}$ என்பதற்குச் சமனென நிறுவுக.

$\frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஓ}{ஐ} = ச$ ஆகுக.

$\therefore அ = இச, \quad உ = எச, \quad ஓ = ஐச.$

எனின், தந்த கோவை

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{2இஎ^2ச^3 - 3எஐ^2ச^3 - 4இஎஓச^3}{2இஎ^2 - 3எஐ^2 - 4இஎஓ}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\left\{\frac{ச^3 \ (2இஎ^2 - 3எஐ^2 - 4இஎஓ)}{2இஎ^2 - 3எஐ^2 - 4இஎஓ}\right\}}$$

$$= \sqrt[3]{ச^3}$$
$$= ச$$
$$= \frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஓ}{ஐ}.$$

உ—ம்.

2. அ + இ + உ என்பது 0 ஆகாதெனக் கொண்டு $\frac{அ + இக}{இ + உந} = \frac{இ + உக}{உ + அந} = \frac{உ + அக}{அ + இந}$ எனின், இவ்விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{1 + க}{1 + ந}$ இற்குச் சமனென நிறுவுக.

இவ்விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் த இற்குச் சமனுகுக.

$$\therefore த = \frac{\text{தொகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை}}{\text{பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை}}$$

$$= \frac{அ + இ + உ + (அ + இ + உ)க}{அ + இ + உ + (அ + இ + உ)ந}$$

$$= \frac{(அ + இ + உ)(1 + க)}{(அ + இ + உ)(1 + ந)}$$

$= \frac{1 + க}{1 + ந}$, அ + இ + உ என்பது 0 ஆகாதெனின்.

பயிற்சி 26 (ஆ)

1. $\frac{அ}{இ} = \frac{உ}{எ} = \frac{ஓ}{ஐ}$ எனின், ஒவ்வொரு விகிதமும் பின்வருவனவற்றிற்குச் சமனென நிறுவுக :—

(i) $\frac{3அ - 4உ + 2ஓ}{3இ - 4எ + 2ஐ}$, (ii) $\sqrt{\left(\frac{2அ^2 - 3உ^2 + ஓ^2}{2இ^2 - 3எ^2 + ஐ^2}\right)}$

2. $\frac{க}{ந} = \frac{த}{ப} = \frac{ம}{ய}$ எனின்,

(i) $\frac{க^2 - தம + ம^2}{ந^2 - பய + ய^2} = \frac{கத}{நப}$ என நிறுவுக ;

(ii) $\frac{9க^2 - 4கதம + ம^2ய}{9ந^2 - 4நபம + ய^3} = \frac{கம}{நய}$ என்றும் நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}=\frac{ஒ}{ஐ}$ எனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:—

(i) $\left(\frac{2அ^3-3உ^3+4ஒ^3}{2இ^3-3எ^3+4ஐ^3}\right)^2=\left(\frac{4அ^2+3உ^2-2ஒ^2}{4இ^2+3எ^2-2ஐ^2}\right)^3$;

(ii) $\sqrt{\left(\frac{அஉ-உஒ+ஒஅ}{இஎ-எஐ+ஐஇ}\right)^2}=\frac{அ-உ+ஒ}{இ-எ+ஐ}$.

4. $\frac{க}{2}=\frac{ந}{3}=\frac{ய}{4}$ எனின், $\sqrt{4க^2+ந^2-ய^2}=ந$ எனநிறுவுக.

5. $\frac{க}{அ}=\frac{ந}{இ}=\frac{ய}{உ}$ எனின், $\frac{க+ந+ய}{அ+இ+உ}=\frac{பக+மந+வய}{பஅ+மஇ+வஉ}$ என நிறுவுக.

6. $\frac{அ}{இ+உ-அ}=\frac{இ}{உ+அ-இ}=\frac{உ}{அ+இ-உ}$ எனின், இவ் விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் 1 இற்குச் சமனென நிறுவுக.

7. $\frac{க}{அ-2இ+உ}=\frac{ந}{இ-2உ+அ}=\frac{ய}{உ-2அ+இ}$ எனின், $க+ந+ய=0$ என நிறுவுக.

8. $\frac{இய-உந}{அ}=\frac{உக-அய}{இ}=\frac{அந-இக}{உ}$ எனின், $\frac{க}{அ}=\frac{ந}{இ}=\frac{ய}{உ}$ என நிறுவுக.

9. $\frac{க}{பம-வ^2}=\frac{ந}{மவ-ப^2}=\frac{ய}{வப-ம^2}$ எனின், $பக+மந+வய=0$ என்றும் $மக+வந+பய=0$ என்றும் நிறுவுக.

10. $\frac{இக-அ}{உ-அந}=\frac{உக-அந}{இ-அக}=\frac{ந+1}{க+ந}$ எனின், $இ+உ$ என்பது பூச்சியமாகாதபோது இப்பின்னங்கள் ஒவ்வொன்றும் க இற்குச் சமனென நிறுவுக.

11. $\frac{க}{அ}=\frac{ந}{இ}=\frac{ய}{உ}$ எனின்,

$\frac{க^3}{அ^2}+\frac{ந^3}{இ^2}+\frac{ய^3}{உ^2}=\frac{(க+ந+ய)^3}{(அ+இ+உ)^2}$ என நிறுவுக.

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து க: ந: ய என்னும் விகிதங்களைக் காண்க.

12. $க-2ந+ய=0$,
$4க+ந-2ய=0$.

13. $க+2ந-2ய=0$,
$3க+2ந-3ய=0$.

14. $2க+ந-ய=0$,
$க-2ந+ய=0$.

15. $5க-5ந+ய=0$,
$3க+4ந-5ய=0$.

16. $\frac{அ+இ}{2(அ-இ)}=\frac{இ+உ}{3(இ-உ)}=\frac{உ+அ}{4(உ-அ)}$ எனின்,

$9அ+10இ+7உ=0$ என நிறுவுக.

180. விகிதசமம்: இரண்டு விகிதங்கள் ஒன்றுக்கொன்று சமனென்னுங் கூற்று **விகிதசமம்** எனப்படும்; ஒப்பிடப்பட்ட நான்கு கணியங்களும் அவ்விகித சமத்தின் **உறுப்புக்கள்** எனப்படும்; முதலுறுப்பும் ஈற்றுறுப்பும் **முனைகள்** என்றும், இரண்டாமுறுப்பும் மூன்றுமுறுப்பும் **இடைகள்** என்றுங் கூறப்படும்.

$\therefore \frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$ எனின், அ, இ, உ, எ என்பன விகிதசமம்.

$\therefore அ : இ = உ : எ$ எனின், அ, இ, உ, எ என்பன விகித சமம்.

$அ : இ = உ : எ$ என்னும் விகிதசமம் $அ : இ :: உ : எ$ என எழுதப்படுவதும் உண்டு. இவ்விகிதசமம் அ இற்கு இ போல உ இற்கு எ எனச் சொல்பற்றி உணர்த்தப்படும்.

இங்கு எ என்பது அ, இ, உ என்பனவற்றிற்கு **நான்காம் விகிதசமன்** என்று கூறப்படும்.

181. $\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$ எனின், $அஎ=இஉ$.

இதனை நிறுவுவோம்:

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இரு பக்கங்களையும் இஎ என்பதாற் பெருக்குக.

$\therefore$ அஎ $=$ இஉ.

இதனைச் சொல்பற்றிப் பின்வருமாறு உணர்த்தலாம்:

முனைகளின் பெருக்கம் இடைகளின் பெருக்கத்திற்குச் **சமன்.**

182. ஒரு தொகை கணியங்களுள்ளே முதலாவதற்கு இரண்டாவதுபோல், இரண்டாவதற்கு மூன்ருவதும், மூன்ருவதற்கு நான்காவதும், நான்காவதற்கு ஐந்தாவதும், ... இருந்தால் அக்கணியங்கள் **தொடர்விகிதசமத்தில உள்ளன** எனப்படும்.

$\frac{அ}{இ}=\frac{இ}{உ}=\frac{உ}{எ}=\frac{எ}{ஒ}=$ .... எனின், அ, இ, உ, எ, ஒ ....

என்பன தொடர்விகிதசமத்தில் உள்ளன எனப்படும்.

183. அ, இ, உ என்னும் மூன்றுகணியங்கள் தொடர்விகிதசமத்தில் இருந்தால்,

$\frac{அ}{இ}=\frac{இ}{உ}$.

எனின், அஉ $=$ இ^2.

$\therefore$ **முனைகளின் பெருக்கம் இடையின் வர்க்கத்திற்குச் சமன்.**

இங்கு, இ என்பது அ, உ என்பனவற்றிற்கு **இடைவிகிதசமன்** எனப்படும்.

உ என்பது அ, இ என்பனவற்றிற்கு **மூன்ரும் விகிதசமன்** எனப்படும்;

184. ஒருவகை விகிதசமத்திலுள்ள நான்கு கணியங்களிலிருந்து பல்வேறுவகை விகித சமங்கள் பெறலாம். இவற்றுட் பயன்மிக்கன பின்வருமாறு:

I. அ : இ $=$ உ : எ எனின், இ : அ $=$ எ : உ.

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$; $\therefore 1 \Big/ \frac{அ}{இ} = 1 \Big/ \frac{உ}{எ}$.

$\therefore \frac{இ}{அ}=\frac{எ}{உ}$.

$\therefore$ இ : அ $=$ எ : உ.

II. அ : இ $=$ உ : எ எனின், அ : உ $=$ இ : எ. **ஒன்றுவிட்ட விகிதசமம்**

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$.

$\therefore$ அஎ $=$ இஉ.

இரு பக்கங்களையும் உஎ ஆல் வகுக்க.

$\therefore \frac{அ}{உ}=\frac{இ}{எ}$.

$\therefore$ அ : உ $=$ இ : எ.

III. அ : இ $=$ உ : எ எனின், அ $+$ இ : இ $=$ உ $+$ எ : எ. **கூட்டல் விகிதசமம்**

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$

$\therefore \frac{அ}{இ}+1=\frac{உ}{எ}+1$.

$\frac{அ+இ}{இ}=\frac{உ+எ}{எ}$.

$\therefore$ அ $+$ இ : இ $=$ உ $+$ எ : எ.

IV. அ : இ $=$ உ : எ எனின், அ $-$ இ : இ $=$ உ $-$ எ : எ. **கழித்தல் விகித சமம்.**

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$.

$\therefore \frac{அ}{இ}-1=\frac{உ}{எ}-1$.

$\therefore \frac{அ-இ}{இ}=\frac{உ-எ}{எ}$

$\therefore$ அ $-$ இ : இ $=$ உ $+$ எ : எ.

V. அ : இ $=$ உ : எ : எனின், அ $+$ இ : அ $-$ இ $=$ உ $+$ எ : உ $-$ எ. **கூட்டல் கழித்தல் விகிதசமங்கள்**

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$.

$\therefore \frac{அ+இ}{இ}=\frac{உ+எ}{எ}$. (கூட்டல் விகித சமத்தால்)

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore \frac{அ - இ}{இ} = \frac{உ - எ}{எ}$. (கழித்தல் விகித சமத்தால்)

$\therefore \frac{அ + இ}{இ} \bigg/ \frac{அ - இ}{இ} = \frac{உ + எ}{எ} \bigg/ \frac{உ - எ}{எ}$;

$\therefore \frac{அ + இ}{அ - இ} = \frac{உ + எ}{உ - எ}$.

$\therefore அ + இ : அ - இ = உ + எ : உ - எ$.

185. இப்பிரிவில், விகிதத்திலும் விகித சமத்திலுமுள்ள கணக்குக்களை ச முறையாலும் மேற்பெற்ற முடிபுகளாலுந் தீர்க்கும் முறைகள் காட்டப்படும்.

உ—ம்.

1. $2அ^2இ^3$, $6அ^2இ^4$, $3அ^3இ^5$ என்பனவற்றிற்கு நான்காம் விகித சமனைக் காண்க.

வேண்டிய நான்காம் விகித சமன் க ஆகுக.

$\therefore 2அ^2இ^3 : 6அ^2இ^4 = 3அ^3இ^5 : க$.

$\therefore 2அ^2இ^3 க = 6அ^2இ^4 \times 3அ^3இ^5$.

$\therefore க = \frac{6அ^2இ^4 \times 3அ^3இ^5}{2அ^2இ^3}$

$= 9அ^3இ^6$.

$\therefore$ வேண்டிய நான்காம் விகித சமன் $9அ^3இ^6$.

உ—ம்.

2. $4(அ - இ)^2$, $8(அ^2 - இ^2)$ என்பனவற்றிற்கு மூன்றும் விகித சமனைக் காண்க.

வேண்டிய மூன்றும் விகித சமன் க ஆகுக.

$\therefore 4(அ - இ)^2 : 8(அ^2 - இ^2) = 8(அ^2 - இ^2) : க$.

$\therefore 4க(அ - இ)^2 = 64(அ^2 - இ^2)^2$.

$\therefore க = \frac{64(அ^2 - இ^2)^2}{4(அ - இ)^2}$

$= 16(அ + இ)^2$.

உ—ம்.

3. $9(அ - இ)^2$, $25(அ + இ)^2$ என்பனவற்றிற்கு இடை விகித சமனைக் காண்க.

வேண்டிய இடைவிகித சமன் க ஆகுக.

$\therefore 9(அ - இ)^2 : க = க : 25(அ + இ)^2$.

$\therefore க^2 = 9 \times 25(அ - இ)^2(அ + இ)^2$.

$\therefore க = \pm\ 3 \times 5 \times (அ - இ)(அ + இ)$

$= \pm\ 15(அ^2 - இ^2)$.

உ—ம்.

4. $2க - 3 : க + 2 = 3க - 4 : 3க + 2$.

இதனைத் தீர்க்க.

$\therefore (2க - 3)(3க + 2) = (க + 2)(3க - 4)$;

$\therefore 6க^2 - 5க - 6 = 3க^2 + 2க - 8$;

$\therefore 3க^2 - 7க + 2 = 0$;

$\therefore (க - 2)(3க - 1) = 0$;

$\therefore க = 2$, அல்லது $\frac{1}{3}$.

உ—ம்.

5. $3க - 1 : 5ந + 1 = ந + 2 : 2க + 3ந + 3 = 5 : 16$.

இவற்றைத் தீர்க்க.

$\frac{3க - 1}{5ந + 1} = \frac{5}{16}$.

$\therefore 48க - 16 = 25ந + 5$.

$\therefore 48க - 25ந = 21$ .. .. (1).

இனி, $\frac{ந + 2}{2க + 3ந + 3} = \frac{5}{16}$.

$\therefore 10க + 15ந + 15 = 16ந + 32$.

$\therefore 10க - ந = 17$ .. .. (2).

(2) ஐ 25 ஆற் பெருக்குக.

$\therefore 250க - 25ந = 425$ .. .. (3).

(3) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க, $202க = 404$;

$\therefore க = 2$

க = 2 என (2) இற் பிரதியிட, $ந = 3$ }.

உ—ம்.

6. அ : இ = உ : எ எனின்,

$3அ + 2இ : 4அ - 5இ = 3உ + 2எ : 4உ - 5எ$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}$.

$\therefore \frac{3அ}{2இ}=\frac{3உ}{2எ}$.

$\therefore \frac{3அ+2இ}{2இ}=\frac{3உ+2எ}{2எ}$

இனி, $\frac{4அ}{5இ}=\frac{4உ}{5எ}$.

$\therefore \frac{4அ-5இ}{5இ}=\frac{4உ-5எ}{5எ}$.

$\therefore \frac{3அ+2இ}{2இ}\div\frac{4அ-5இ}{5இ}=\frac{3உ+2எ}{2எ}\div\frac{4உ-5எ}{5எ}$

$\therefore \frac{3அ+2இ}{4அ-5இ}\times\frac{5}{2}=\frac{3உ+2எ}{4உ-5எ}\times\frac{5}{2}$.

$\therefore \frac{3அ+2இ}{4அ-5இ}=\frac{3உ+2எ}{4உ-5எ}$.

$\therefore 3அ+2இ : 4அ-5இ = 4உ+2எ : 4உ-5எ$.

உ—ம்.

7. அ:இ=உ:எ எனின்,
$அ^2-அஇ+இ^2 : உ^2-உஎ+எ^2 = அ^2-5இ^2 : உ^2-5எ$
என நிறுவுக

$\frac{அ}{இ}=\frac{உ}{எ}=ச$ ஆகுக.

எனின், அ=இச; உ=எச.

$\therefore \frac{அ^2-அஇ+இ^2}{உ^2-உஎ+எ^2}=\frac{இ^2ச^2-இ^2ச+இ^2}{எ^2ச^2-எ^2ச+எ^2}$

$=\frac{இ^2(ச^2-ச+1)}{எ^2(ச^2-ச+1)}$

$=\frac{இ^2}{எ^2}$.

இனி, $\frac{அ^2-5இ^2}{உ^2-5எ^2}=\frac{இ^2ச^2-5இ^2}{எ^2ச^2-5எ^2}$

$=\frac{இ^2(ச^2-5)}{எ^2(ச^2-5)}$

$=\frac{இ^2}{எ^2}$.

$\therefore \frac{அ^2-அஇ+இ^2}{உ^2-உஎ+எ^2}=\frac{அ^2-5இ^2}{உ^2-5எ^2}$.

$\therefore அ^2-அஇ+இ^2 : உ^2-உஎ+எ^2 = அ^2-5இ^2 : உ^2-5எ^2$.

உ—ம்.

8. $க=\frac{\sqrt{(2அ+3இ)}+\sqrt{(2அ-3இ)}}{\sqrt{(2அ+3இ)}-\sqrt{(2அ-3இ)}}$ எனின்,
$3இக^2-4அக+3இ=0$ என நிறுவுக.

$\frac{க}{1}=\frac{\sqrt{(2அ+3இ)}+\sqrt{(2அ-3இ)}}{\sqrt{(2அ+3இ)}-\sqrt{(2அ-3இ)}}$.

$\therefore \frac{க+1}{க-1}=\frac{\sqrt{(2அ+3இ)}}{\sqrt{(2அ-3இ)}}$. (கூட்டல் கழித்தல் விகித சமங்களால்.)

$\therefore \frac{க^2+2க+1}{க^2-2க+1}=\frac{2அ+3இ}{2அ-3இ}$.

$\therefore \frac{க^2+1}{2க}=\frac{2அ}{3இ}$. (கூட்டல் கழித்தல் விகித சமங்களால்)

$\therefore 3இக^2+3இ=4அக$.

$\therefore 3இக^2-4அக+3இ=0$.

உ—ம்.

9. ஒரு பால் வியாபாரி பாலேயும் நீரையும் ஒரு பாத்திரத்தில் 2 : 3 என்னும் விகிதத்திலும் வேருெரு பாத்திரத்தில் 4:5 என்னும் விகிதத்திலுங் கலந்து வைத்திருக்கிருன். 3 : 4 என்னும் விகிதமுள்ள கலவையை ஆக்குதற்கு அப்பாத்திரங்களிலிருந்து என்ன விகிதத்திற் கலவைகள் எடுத்தல் வேண்டும்?

முதற்பாத்திரத்திலிருந்து க கலனும், இரண்டாவதிலிருந்து ந கலனும் எடுக்கப்படுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore$ முதற் பாத்திரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை $\frac{2\text{க}}{5}$ கலன்பாலும் $\frac{3\text{க}}{5}$ கலன் நீருமாகும்.

$\therefore$ இரண்டாவதிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை $\frac{4\text{ந}}{9}$ கலன் பாலும் $\frac{5\text{ந}}{9}$ கலன் நீருமாகும்.

$\therefore$ கணக்கின்படி, $\frac{2\text{க}}{5}+\frac{4\text{ந}}{9} : \frac{3\text{க}}{5}+\frac{5\text{ந}}{9}=3 : 4.$

$$\therefore 4\left(\frac{2\text{க}}{5}+\frac{4\text{ந}}{9}\right)=3\left(\frac{3\text{க}}{5}+\frac{5\text{ந}}{9}\right).$$

$$\therefore 4(18\text{க}+20\text{ந})=3(27\text{க}+25\text{ந}).$$

$$\therefore 72\text{க}+80\text{ந}=81\text{க}+75\text{ந}.$$

$$\therefore 9\text{க}=5\text{ந}.$$

$$\therefore \frac{\text{க}}{\text{ந}}=\frac{5}{9}.$$

$\therefore$ வேண்டிய விகிதம் 5 : 9.

பயிற்சி 26 (இ)

பின்வருஞ் சமன்பாடுகளில் க இன் பெறுமானத்தைக் காண்க:—

1. $4 : 7=12 : \text{க}.$
2. $7 : 8=\text{க} : 12.$
3. $\text{அ}^2\text{இ}^2 : \text{க}=\text{அ}^2\text{இ}^3 : \text{அ}^2\text{இ}^4.$
4. $(\text{அ}-\text{இ})^2 : \text{க}=\text{க} : (\text{அ}+\text{இ})^2.$

கீழ்வருவனவற்றிற்கு நான்காம் விகிதசமனைக் காண்க:—

5. $\text{அ}^3\text{இ}^2,\ \text{இ}^2\text{உ}^3,\ \text{உ}\text{அ}^3.$
6. $\text{அ}^2-\text{இ}^2,\ (\text{அ}-\text{இ})^2,\ (\text{அ}+\text{இ})^2.$

மேல் வருவனவற்றிற்கு மூன்றும் விகித சமனைக் காண்க:—

7. $3(\text{ப}-\text{ம})^6,\ 6(\text{ப}^2-\text{ம}^2)^3.$
8. $(\text{அ}+\text{இ})^2,\ \text{அ}^3+\text{இ}^3.$

கீழ்வருவனவற்றிற்கு இடைவிகித சமனைக் காண்க:—

9. $(2\text{அ}+\text{இ})^2,\ (2\text{அ}-\text{இ})^2.$
10. $\text{அ}^2-1,\ \frac{1}{\text{அ}^2-1}.$

மேல் வருஞ் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க:

11. $\text{க}^2-3\text{க}+5 : 3\text{க}-5=\text{க}^2-2\text{க}+3 : 2\text{க}-3.$
12. $\text{க}^2-2\text{க}+3 ; \text{க}^2+2\text{க}-3=\text{க}^2-3\text{க}+2 : \text{க}^2+3\text{க}-2.$
13. $3\text{க}-1 : 2\text{ந}+3=5\text{ந}+3 : \text{க}+\text{ந}+1=8 : 5.$
14. $2\text{க}-1 : 3\text{ந}+1=3\text{க}+1 : 5\text{க}-2\text{ந}+3=5 : 7.$

அ, இ, உ என்பன மூன்று விகித சமன்களாயின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:

15. $2\text{அ}+3\text{இ} : 2\text{இ}+3\text{உ}=3\text{அ}-4\text{இ} : 3\text{இ}-4\text{உ}.$
16. $\text{அ}\text{இ}+\text{இ}\text{உ} : \text{அ}^2+\text{இ}^2=\text{இ}^2 : \text{அ}^2.$
17. $\text{அ}(\text{அ}-\text{இ}) : \text{இ}(\text{அ}+\text{இ})=\text{இ}(\text{இ}-\text{உ}) : \text{உ}(\text{இ}+\text{உ}).$
18. $\text{அ} : \text{அ}^2-\text{இ}^2=\text{இ} : \text{இ}^2-\text{உ}^2.$
19. அ, இ, உ, எ என்பன தொடர் விகித சமத்தில் இருந்தால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக:—
    (i) $\text{அ}^3+\text{இ}^3+\text{உ}^3 : \text{இ}^3+\text{உ}^3+\text{எ}^3=\text{அ} : \text{எ}.$
    (ii) $\text{அ}^2+\text{உ}^2 : \text{இ}(\text{அ}+\text{உ})=\text{இ}^2+\text{எ}^2 : \text{உ}(\text{இ}+\text{எ}).$

அ, இ, உ, எ என்பன விகித சமத்தில் இருந்தால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

21. $(\text{அ}-\text{எ})-(\text{இ}-\text{உ})=\frac{(\text{அ}-\text{இ})(\text{அ}+\text{உ})}{\text{அ}}.$
22. $\frac{(\text{அ}-\text{உ})(\text{அ}^2-\text{உ}^2)}{(\text{அ}+\text{உ})(\text{அ}^2+\text{உ}^2)}=\frac{(\text{இ}-\text{எ})(\text{இ}^2-\text{எ}^2)}{(\text{இ}+\text{எ})(\text{இ}^2+\text{எ}^2)}.$
23. $\text{இ}^2(\text{அ}^2+\text{உ}^2)(\text{உ}^2+\text{எ}^2)=\text{உ}^2(\text{அ}^2+\text{இ}^2)(\text{இ}^2+\text{உ}^2).$
24. $\frac{\text{இ}^2}{(\text{அ}^2-\text{இ}^2)(\text{இ}^2-\text{எ}^2)}=\frac{\text{உ}^2}{(\text{அ}^2-\text{உ}^2)(\text{உ}^2-\text{எ}^2)}.$
25. 4, 5, 18, 21 என்னும் எண்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் எவ்வெண்ணைக் கூட்டினல், அக்கூட்டுத் தொகைகள் விகித சமத்தில் இருக்கும்?
26. $\text{க}^2+\text{இ}\text{க}+\text{இ}^2 : \text{ந}^2+\text{அ}\text{ந}+\text{அ}^2=\text{க}^2-\text{இ}\text{க}+\text{இ}^2 : \text{ந}^2-\text{அ}\text{ந}+\text{அ}^2$ எனின், $\text{க} : \text{அ}=\text{இ} : \text{ந}$, அல்லது $\text{க} : \text{இ}=\text{ந} : \text{அ}$ என நிறுவுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

27. $\frac{க}{அ-இ+உ}=\frac{ந}{இ-உ+அ}=\frac{ய}{உ-அ+இ}$ எனின்,

$\frac{அ}{க-ந+ய}=\frac{இ}{ந-ய+க}=\frac{உ}{ய-க+ந}$.

28. $\frac{க}{அக+இந+உய}=\frac{ந}{இக+உந+அய}=\frac{ய}{உக+அந+இய}$ எனின், க + ந + ய என்பது பூச்சிய மன்றெனக் கொண்டு தந்த ஒவ்வொரு விகிதமும் $\frac{1}{அ+இ+உ}$ இற்குச் சமனெனக் காட்டுக.

29. $\frac{க+ந}{2அ-இ}=\frac{ந+ய}{2இ-உ}=\frac{ய+க}{2உ-அ}$ எனின், $\frac{க+ந+ய}{அ+இ+உ}=\frac{அக+இந+உய}{அ^2+இ^2+உ^2}$ என நிறுவுக.

30. 40 என்னும் எண்ணை இரு கூறுகளாகப் பிரிக்குமிடத்து, அக்கூறுகளின் பெருக்கத்திற்கு அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 6 : 13 என்னும் விகிதமாயின், அக்கூறுகள் யாவை ?

31. 14 : 23 என்னும் விகிதத்தினுடைய உறுப்புக்களிலிருந்து என்ன எண்ணை எடுத்தால் வரும் விகிதம் 1 : 2 இற்குச் சமனாகும் ?

32. இரண்டு பாத்திரங்களிற் பாலும் நீருங் கலந்து வைக்கப் பட்டுள்ளன. ஒன்றின் கலவை விகிதம் 3 ; 4. மற்றையதன் விகிதம் 5 : 6. 4 : 5 என்னும் விகிதமுள்ள கலவையை ஆக்குதற்கு அப்பாத்திரங்களிலிருந்து என்ன விகிதத்திற் கலவைகள் எடுத்தல் வேண்டும் ?

அத்தியாயம் 27

மாறல்

186. நேராய் மாறுதல் : $\frac{ந}{க}$ என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்குமாறு க, ந என்னும் இருமாறிகள் மாறினால், க இற்கு விகித சமம் ந என்றாதல் க ஒடு நேராய் மாறுவது ந என்றாதல் கூறப்படும்.

க ஒடு மாறுவது ந என்று கூறினும் நேராய் மாறுவதென்றே கருதப்படும்.

க ஒடு மாறுவது ந என்பதை க $\propto$ ந என்பதாற் குறியீடு பற்றி உணர்த்துதல் வழக்கம்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாயின், இதனை சக = ந, அல்லது ந = சக என்னுஞ் சமன்பாட்டாலும் உணர்த்தலாம்.

ஆயின், $\frac{ந}{க}=ச$.

இங்கு, க, ந என்பன மாறிகள் எனப்படும் ; க என்பது **சாராமாறி** என்றும் ந என்பது **சார்ந்தமாறி** என்றும், ச என்பது **மாறன் மாறிலி** என்றுங் கூறப்படும்.

க, ந என்பன ஈரமயங்களிற் பெறும் பெறுமானங்கள் ($க_1$, $ந_1$), ($க_2$, $ந_2$) என்பனவாயின்,

$$\frac{ந_1}{க_1}=ச\ ;\quad \frac{ந_2}{க_2}=ச.$$

$$\therefore \frac{ந_1}{க_1}=\frac{ந_2}{க_2}.$$

$$\therefore \frac{க_1}{க_2}=\frac{ந_1}{ந_2}.$$

187. நேர் மாறாய் மாறுதல் : கந என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்குமாறு க, ந என்னும் இருமாறிகள் மாறினால், க இன் தலைகீழொடு மாறுவது ந என்றாதல் க ஒடு **நேர் மாறாய் மாறுவது** ந என்றாதல் கூறப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

க ஒடு நேர்மாறாய் மாறுவது ந என்பதை $\frac{1}{க} \propto ந$ என்பதாற் குறியீடுபற்றி உணர்த்துவது வழக்கம்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாயின், இதனை $\frac{ச}{க} = ந$, அல்லது $ந = \frac{ச}{க}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டாலும் உணர்த்தலாம்.

ஆயின், $கந = ச$.

க, ந என்பன ஈரமயங்களிற் பெறும் பெறுமானங்கள் $(க_1, ந_1)$, $(க_2, ந_2)$ என்பனவாயின்.

$$க_1 ந_1 = ச ; \quad க_2 ந_2 = ச.$$

$$\therefore க_1 ந_1 = க_2 ந_2.$$

$$\therefore \frac{க_1}{க_2} = \frac{ந_2}{ந_1}.$$

188. க, ந என்பனவற்றினுடைய தொடர்புகள் மேற்கூறிய வகைகளேயன்றி வேறு வகையாகவும் இருக்கலாம்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்க, $ந = சக^2$ எனின், ந என்பது க இன் வர்க்கத்தோடு நேராய் மாறுவது எனப்படும்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாயிருக்க, $ந = \frac{ச}{க^2}$ எனின், ந என்பது க இன் வர்க்கத்தோடு நேர் மாறாய் மாறுவது எனப்படும்.

189. மேற் கூறியனவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறைகள் பின்வரும் உதாரணங்களால் அறியப்படும் :—

உ—ம்

1. $க \propto ந$ என்றும் $க = 8$ எனின், $ந = 5$ என்றுந் தந்தால், க, ந என்பனவற்றைத் தொடுக்குஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க. அச் சமன்பாட்டிலிருந்து $க = 12$ எனின், ந ஐக் காண்க.

$$க \propto ந.$$

$\therefore ந = சக.$ இங்கு ச என்பது ஒரு மாறிலி.

$க = 8$ எனின், $ந = 5$.

$$\therefore 5 = ச \times 8.$$

$$\therefore ச = \frac{5}{8}.$$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு $ந = \frac{5}{8}க$.
$க = 12$ எனின், $ந = \frac{5}{8} \times 12 = 7\frac{1}{2}$. } விடை.

உ—ம்.

2. ந என்பது க ஒடு நேர்மாறாய் மாறுவதென்றும், $க = 4$ எனின், $ந = 6$ என்றுந் தந்தால், க, ந என்பனவற்றைத் தொடுக்குஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க. அச் சமன்பாட்டிலிருந்து $ந = 3$ எனின், க ஐக் காண்க.

$$\frac{1}{க} \propto ந.$$

$$\therefore ந = \frac{ச}{க}.$$

$க = 4$ எனின், $ந = 6$.

$$\therefore 6 = \frac{ச}{4}.$$

$$\therefore ச = 24.$$

$\therefore$ வேண்டிய சமன்பாடு $ந = \frac{24}{க}$, அல்லது $கந = 24$.

$ந = 3$ எனின், $3க = 24$

$$\therefore க = 8.$$

உ—ம்.

3. ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு அதன் ஆரையொடு மாறுகின்றது; அதன் ஆரை 1 அடி 9 அங். ஆயிருக்கும் பொழுது அதன் பரப்பளவு $9\frac{5}{8}$ சதுரவடி. அதன் ஆரை 3 அடி 6 அங். ஆயிருக்கும் பொழுது அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

அவ்வட்டத்தின் பரப்பளவு ப சதுரவடி ஆகுக; அதன் ஆரை அ அடி ஆகுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

கணக்கின்படி, அ$^2 \propto$ ப.

$\therefore$ ப $=$ ச அ^2. இங்கு ச என்பது ஒரு மாறிலி.

அ $= 1\frac{3}{4}$ அடி எனின், ப $= 9\frac{5}{8}$ சதுரவடி.

$\therefore 9\frac{5}{8} =$ ச $(1\frac{3}{4})^2$.

$\therefore$ ச $= 9\frac{5}{8} \div (1\frac{3}{4})^2$

$= \frac{77}{8} \times \left(\frac{4}{7}\right)^2$.

$= \frac{22}{7}$.

$\therefore$ ப $= \frac{22}{7}$ அ^2.

அ $= \frac{1}{2}$ 3 அடி எனின், ப $= \frac{22}{7} \times (3\frac{1}{2})^2$ சதுரவடி

$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2$ சதுரவடி

$= 38\frac{1}{2}$ சதுரவடி.

உ—ம்.

4. க என்பது இரண்டு எண்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமன். அவ்வெண்களுள் ஒன்று ந^2 ஒடு நேராயும் மற்றையது ய ஒடு நேர் மாறாயும் மாறுகின்றன.

ந $= 2$, ய $= 1$ எனின், க $= 12$; ந $= 3$, ய $= 2$ எனின், க $= 20$.

ந $= \sqrt{2}$, ய $= \frac{1}{2}$ எனின், க இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

க $=$ சந$^2 + \frac{\text{ப}}{\text{ய}}$ எனக் கொள்க. இங்கு ச, ப என்பன மாறிலிகள்.

ந $= 2$, ய $= 1$ எனின், க $= 12$.

$\therefore 12 =$ ச$(2)^2 + \frac{\text{ப}}{1}$

$= 4$ச $+$ ப.

$\therefore 4$ச $+$ ப $= 12$ .. .. (1).

இனி ந $= 3$, ய $= 2$ எனின், க $= 20$.

$\therefore 20 =$ ச$(3)^2 + \frac{\text{ப}}{2}$

$= 9$ச $+ \frac{\text{ப}}{2}$.

$\therefore 18$ச $+$ ப $= 40$ .. .. (2).

(1) ஐ (2) இலிருந்து கழிக்க.

$\therefore 14$ச $= 28$.

$\therefore$ ச $= 2$.

ச $= 2$ என (1) இற் பிரதியிடுக.

$\therefore 4 \times 2 +$ ப $= 12$.

$\therefore$ ப $= 4$.

$\therefore$ க $= 2$ந$^2 + \frac{4}{\text{ய}}$.

ந $= \sqrt{2}$, ய $= \frac{1}{2}$ எனின், க $= 2(\sqrt{2})^2 + \frac{4}{\frac{1}{2}}$

$= 4 + 8$

$= 12$.

பயிற்சி 27 (அ)

1. க $\propto$ ந என்றும் க $= 2$ எனின், ந $= 5$ என்றுந் தந்தால், க, ந என்பனவற்றைத் தொடுக்குஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க. அச்சமன்பாட்டிலிருந்து க $= \frac{1}{3}$ எனின், ந ஐக் காண்க.

2. ந என்பது க ஒடு நேர்மாறாய் மாறுகின்றதென்றும், க $= \frac{1}{2}$ எனின், ந $= 20$ என்றுந் தந்தால், க, ந என்பனவற்றைத் தொடுக்குஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க. அச்சமன்பாட்டிலிருந்து ந $= 3$ எனின், க ஐக் காண்க.

3. ச என்பது க^2 ஒடு நேர்மாறாய் மாறுகின்றதென்றும், க $= 2$ எனின், ந $= 2\frac{1}{2}$ என்றுந் தந்தால், க, ந என்பனவற்றைத் தொடுக்குஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க. அச்சமன்பாட்டிலிருந்து ந $= \frac{2}{5}$ எனின், க ஐக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. ப, ம என்பன மாறிலிகளாயிருக்க, ந=பக+ம; க=10 எனின், ந=3; க=6 எனின், ந=2; க=8 எனின், ந ஐக் காண்க.

5. ஒரு வட்டத்தின் பரப்பளவு அதன் ஆரையின் வர்க்கத்தோடு மாறுகின்றது; அதன் ஆரை $3\frac{1}{2}$ அடியாயிருக்கும்போது அதன் பரப்பளவு $38\frac{1}{2}$ சதுரவடி; அதன் ஆரை $10\frac{1}{2}$ அடியாயிருக்கும் போது அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

6. ஒரு கோளத்தின் கனவளவு அதன் ஆரையின் கனத்தோடு மாறுகின்றது; அதன் ஆரை $3\frac{1}{2}$ அடியாயிருக்கும்போது அதன் கனவளவு $179\frac{2}{3}$ கனவடி; அதன் ஆரை 7 அடியாயிருக்கும்போது அதன் கனவளவைக் காண்க.

7. ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து முதல் இ செக்கனில் ப அடி தூரம் விழும் என்று கொள்ள, த என்பது $இ^2$ ஒடு மாறுகின்றதெனக் காணப்பட்டது. முதல் 5 செக்கனில், அது விழுந்தூரம் 400 அடியாயின், முதல் இரண்டு செக்கனில் அது விழுந்தூரத்தைக் காண்க.

8. ந=அ+இ; க $\propto$ அ; $\sqrt{க}$ $\propto$ இ; க=4 எனின், ந=14; க=9 எனின், ந=24; க, ந என்பனவற்றினுடைய தொடர்பைக் காண்க.

9. க என்னும் ஒருகணியம் வேறு இருகணியங்களின் கூட்டுத் தொகையோடு மாறுகின்றது; இவற்றுள் ஒன்று $ந^2$ ஒடு நேராயும் மற்றையது ய ஒடு நேர்மாறாயும் மாறுகின்றன; ந=4, ய=$\frac{1}{5}$ எனின், க=9; ந=1, ய=$\frac{2}{5}$ எனின், க=1; க, ந, ய என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

10. ந என்பது க ஒடு நேராய் மாறும் ஒரு கணியத்தையும் க ஒடு நேர்மாறாய் மாறும் ஒரு கணியத்தையுங் கூட்ட வருங் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமன். க=1 எனின், ந=7; க=2 எனின், ந=8; க=3 எனின், ந ஐக் காண்க.

11. க என்பது அ+இ+உ ஒடு மாறுகின்றது; அ என்பது க ஒடும், இ என்பது $க^2$ ஒடும், உ என்பது $க^3$ ஒடும் மாறுகின்றன; க=1 எனின், ந=6; க=2 எனின், ந=22; க=−1 எனின், ந=0; ஆயின், ந என்பதை க பற்றித் தருக.

12. ஒரு கோளத்தின் கனவளவு அதன் ஆரையின் கனத்தோடு மாறுகின்றது. 6″, 8″, 10″ என்னும் ஆரைகளையுடைய மூன்று உலோகக் கோளங்களை உருக்கி ஒரு தனிக் கோளமாகச் செய்தால், இதன் ஆரையைக் காண்க.

190. இணைந்த மாறல்: சில அமயங்களில் ஒரு கணியமானது ஒன்றையொன்று சாராது மாறுகின்ற இரண்டு, அல்லது இரண்டின் மேற்பட்ட கணியங்களைச் சார்ந்து நிற்கும்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாய் இருக்க, க=சநய எனின், க என்பது ந, ய என்பனவற்றோடு **இணைந்து மாறுகின்ற**தெனப்படும்.

ச என்பது ஒரு மாறிலியாய் இருக்க, $க=\frac{சந}{ய}$ எனின், க என்பது ந ஒடு **நேராயும்** ய ஒடு **நேர்மாறாயும்** மாறுகின்றதெனப்படும்.

191. ய என்பது மாறாதிருக்க, ந என்பது க ஒடும், க என்பது மாறாதிருக்க, ந என்பது ய ஒடும் மாறினால், க, ய என்னும் இரண்டும் மாற ந என்பது கய ஒடு மாறும்.

இதனை நிறுவுவோம்:

$க_0$, $ந_0$, $ய_0$ என்பன முறையே க, ந, ய என்பனவற்றினுடைய மூன்று ஒத்த பெறுமானங்களாகுக.

ந இன் மாற்றம் ந, ய என்னும் இரண்டின் மாற்றங்களைச் சார்ந்துள்ளது. ஆகவே, ந என்பது தனது ஈற்றுப் பெறுமானமாகிய $ந_1$ என்பதை இரண்டு பருவங்களில் அடைகின்றதெனக் கொள்வோம்.

(I) ய என்பது மாறாதிருக்க, க என்பது தனது ஈற்றுப் பெறுமானத்தை அடைய, ந என்பது $ந_1$ ஆக மாறுகின்றது எனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{ந}{ந_1}=\frac{க}{க_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(II) க என்பது $க_0$ என்னும் பெறுமானத்தை அடைந்து மாருதிருக்க, ய என்பது $ய_0$ என்னும் பெறுமானத்திற்கு மாற ந என்பது $ந_1$ இலிருந்து தனது ஈற்றுப் பெறுமான மாகிய $ந_0$ என்பதற்கு மாறுகின்றதெனக் கொள்க.

$$\therefore \frac{ந_1}{ந_0}=\frac{ய}{ய_0}. \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (2)$$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் பெருக்க நாம் பெறுவது

$$\frac{ந}{ந_1}\times\frac{ந_1}{ந_0}=\frac{க}{க_0}. \quad \frac{ய}{ய_0}.$$

$$\therefore ந=\frac{ந_0}{க_0 ய_0} கய.$$

$\frac{ந^0}{க_0ய_0}$ என்பது ஒடு மாறிலி.

∴ ந என்பது கய ஒடு மாறும்.

192. மேற் பிரிவுகளிலுள்ளனவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறைகள் பின்வரும் உதாரணங்களால் அறியப்படும் :—

உ—ம்.

1. க என்பது ந, ய என்பனவற்ருேடு இணைந்து மாறுகின்றது ; $ந=\frac{1}{2}$, $ய=\frac{1}{3}$ எனின், க=1 ; க, ந, ய என்பனவற்றினுடைய தொடர்பைக் காட்டுஞ் சமன்பாட்டைக் காண்க ; அச்சமன்பாட்டிலிருந்து ந=1, $ய=\frac{1}{2}$ எனின், க இன் பெறுமானத்தையுங் காண்க.

க என்பது ந, ய என்பனவற்ருேடு இணைந்து மாறுகின்றது.

∴ க=சநய. இங்கு ச என்பது ஒரு மாறிலி.

$ந=\frac{1}{2}$, $ய=\frac{1}{3}$ எனின், க=1.

$\therefore 1=ச\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}.$

∴ ச=6.

∴ வேண்டிய சமன்பாடு க=6நய என்பதே.

ந=1, $ய=\frac{1}{2}$ எனின், $க=6\times1\times\frac{1}{2}=3$.

உ—ம்.

2. க என்பது ந ஒடு நேராயும் ய ஒடு நேர்மாருயும், மாறுகின்றது; ந=2, ய=10 எனின், க=1 ; ந=6, ய=3 எனின், க இன் பெறுமானம் என்ன ?

க என்பது ந ஒடு நேராயும் ய ஒடு நேர்மாருயும் மாறுகின்றது.

$$\therefore க=\frac{சந}{ய}.$$ இங்கு ச என்பது ஒரு மாறிலி.

∴ ந=2, ய=10 எனின், க=1.

$$\therefore 1=\frac{ச\times2}{10}.$$

∴ ச=5.

∴ க, ந, ய என்பனவற்றிற்கிடையேயுள்ள தொடர்பு

$க=\frac{5ந}{ய}$ என்பதாலே தரப்படும்.

$$ந=6,\ ய=3 \text{ எனின், } க=\frac{5\times6}{3}$$
$$=10.$$

உ—ம்.

3. ஒரு வட்டவுருளையின் கனவளவு அதனுயரம் மாருதிருக்க அதனடியினுடைய ஆரையின் வர்க்கத்தோடும் அதனடி மாருதிருக்க அதன் உயரத்தோடும் மாறுகின்றது. அதன் உயரம் 10 அடியாயும் அதனடியின் ஆரை 7 அடியாயுமிருக்க, அதன்கனவளவு 1540 கனவடி ; 9 அடி உயரத்தையும் 616 கனவடி கனவளவையுங் கொண்ட வட்டவுருளையின் அடியின் ஆரையைக் காண்க.

அவ் வட்டவுருளையின் அடியின் ஆரை அ அடியாயும் உயரம் உ அடியாயும், கனவளவு க கனவடியாயும் இருக்க.

∴ $க=சஅ^2உ$. இங்கு ச என்பது ஒரு மாறிலி.

அ=7 அடியாயும், உ=10 அடியாயும் இருந்தால் க=1540 கனவடி.

$$\therefore 1540=ச(7)^2(10).$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$\therefore ச = \frac{1540}{7 \times 7 \times 10}$$

$$= \frac{22}{7}.$$

$$\therefore க = \frac{22}{7} அ^2உ.$$

இனி, $க = 616$ ஆயின், $உ = 9$.

$$\therefore 616 = \frac{22}{7} \times அ^2 \times 9.$$

$$\therefore அ^2 = \frac{616 \times 7}{22 \times 9}$$

$$= \frac{196}{9}.$$

$$\therefore அ = \pm \frac{14}{3}$$

$அ = -\frac{14}{3}$ என்பது பொருந்தாது.

$\therefore அ = \frac{14}{3}$ என்பதே பொருந்தும்.

$\therefore$ வேண்டிய வட்டவுருளையினது அடியின் ஆரை $\frac{14}{3}$ அடி $= 4\frac{2}{3}$ அடி.

பயிற்சி 27 (ஆ)

1. க என்பது ந, ய என்பனவற்ருேடு இணைந்து மாறுகின்றது; $ந=5$, $ய=8$ எனின், $க=120$; $ந=6$, $ய=9$ எனின், க ஐக் காண்க.

2. க என்பது $ந^2$, $\sqrt{ய}$ என்பனவற்ருேடு இணைந்து மாறுகின்றது; $ந=2$, $ய=9$ எனின், $க=60$; $ந=1$, $ய=4$ எனின், க ஐக் காண்க.

3. க என்பது ந ஒடு நேராயும் ய ஒடு நேர்மாருயும் மாறுகின்றது; $ந=8$, $ய=2$ எனின், $க=3$; $ய=6$, $க=5$ எனின், ந ஐக் காண்க.

4. $க \propto ந$ எனின், $க^2 - ந^2 \propto கந$ என நிறுவுக.

5. $க - ந \propto க + ந$ எனின், $க^2 + ந^2 \propto கந$ என நிறுவுக.

6. $க \propto ந^2 - ய^2$; $ந \propto இ^2$; $ய \propto \sqrt{இ}$; $இ=4$ எனின், $க=15$; $இ=9$ எனின், $க=108$; $இ=1$ எனின், க ஐக் காண்க.

7. ஓரிடத்திலிருந்து ஓரிடத்திற்குச் செல்லும் நேரந் தூரத்தோடு நேராயும் வேகத்தோடு நேர்மாருயும் மாறுகின்றது. இருபுகைவண்டிகள் செல்லுந் தூரங்கள் 4 : 9 என்னும் விகிதத்திலும் அத்தூரங்களைச் செல்ல எடுக்கும் நேரங்கள் 3 : 8 என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், அவற்றினுடைய வேகங்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

8. 5 கூலிக்காரர் 8 நாள்களில் 120 ரூபா உழைத்தனராயின், 9 கூலிக்காரர் 3 நாள்களில் எத்தனை ரூபா உழைப்பர் ?

9. ஓர் உருளையின் வளைபரப்பு அதனுடைய நீளத்தோடும் அடியின் ஆரையோடும் மாறுகின்றது. இரண்டு உருளைகளுடைய நீளங்கள் 3 : 7 என்னும் விகிதத்திலும், வளைபரப்புக்கள் 1 : 2 என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், அவற்றினுடைய அடிகளின் ஆரைவிகிதத்தைக் காண்க.

10. ஒரு வட்டத் தட்டினது நிறை அதனுடைய தடிப்பு மாருதிருக்க அதன் ஆரையொடும், ஆரை மாருதிருக்கத் தடிப்பொடும் மாறுகின்றது. இரண்டு வட்டத் தட்டுக்களினுடைய தடிப்புக்கள் 5 : 8 என்னும் விகிதத்திலும் அவற்றினுடைய நிறைகள் 2 : 5 என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், அவற்றினுடைய ஆரைகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அத்தியாயம் 28

விருத்திகள்

193. தொடர் : ஒரு தொகை கணியங்கள் யாதோ ஒரு விதிபற்றி ஆக்கப்பட்டு ஒன்றையொன்று தொடர்ந்தால் அத்தொடர்ச்சி ஒரு தொடர் எனப்படும். அக்கணியங்களை அத்தொடரின் உறுப்புக்கள் என்றும், அவ்வுறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையை அத்தொடரின் கூட்டுத் தொகை என்றுங் கூறுதல் வழக்கு.

உ—ம்.

1. 1, 4, 7, 10, ... என்பது ஒரு தொடர்.

இத்தொடரின் ஆக்கவிதி ஒவ்வோருறுப்பும் முன்னுறுப்பொடு 3 ஐக் கூட்டுதலாற்பெறப்படும் என்பதே.

உ—ம்.

2. 1, 2, 4, 8, ... என்பதும் ஒரு தொடர்.

இத்தொடரின் ஆக்கவிதி ஒவ்வோருறுப்பும் முன்னுறுப்பை 2 ஆற் பெருக்குதலாற் பெறப்படும் என்பதே.

கூட்டல் விருத்தி (கூ.வி.)

194. தன்னுடைய ஒவ்வோருறுப்பும் முன்னுறுப்போடு ஒரு மாறாக் கணியத்தைக் கூட்டுதலாற் பெறப்படுந் தொடர் கூட்டல் விருத்தி எனப்படும். இக்கணியம் அக்கூட்டல் விருத்தியின் பொது வித்தியாசம் எனப்படும்.

கூட்டல் விருத்தி என்னுஞ் சொல்லுக்குப் பதிலாக, கூ.வி. என்னுங் குறுக்கம் வழங்கப்படும்.

பின்வரும் உறுப்புக்களினுடைய தொடர்கள் கூ.வி. இல் இருத்தல் காண்க :—

$1, 3, 5, 7,$ . . . . ; பொது வித்தியாசம் $=2$.
$3, 7, 11, 15,$ . . . . ; பொது வித்தியாசம் $=4$.
$10, 9\frac{1}{2}, 9, 8\frac{1}{2},$ . . . . ; பொது வித்தியாசம் $=-\frac{1}{2}$.

195. முதலுறுப்பு அ ஆயும் பொதுவித்தியாசம் வ ஆயுமுள்ள ஒரு கூ.வி. இன் இ ஆம் உறுப்பைக் காணல்.

முதல் உறுப்பு $=$ அ ;
இரண்டாம் ,, $=$ அ $+$ வ $=$ அ $+(2-1)$வ ;
மூன்றாம் ,, $=$ அ $+2$வ $=$ அ $+(3-1)$வ ;
. . . .
இ ஆம் ,, $=$ அ $+($இ $-1)$வ.

இ ஆம் உறுப்பை ஈற்றுறுப்பெனக் கொண்டு ம ஆற் குறித்தால், நாம் பெறுவது

ம $=$ அ $+($இ $-1)$வ என்னுஞ் சமன்பாடாகும்.

ஆயின், ஒரு கூ.வி. இன் முதலுறுப்பும் பொது வித்தியாசமுந் தரப்பட்டால், அத்தொடரின் எவ்வுறுப்பையும் இச்சமன் பாட்டைத் துணைக் கொண்டு காணலாம்.

196. முதலுறுப்பு அ ஆயும் பொதுவித்தியாசம் வ ஆயுமுள்ள ஒரு கூ.வி. இல், இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$த_{இ}$ என்பது அத்தொடரில் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையாகுக.

$\therefore த_{இ} =$ அ $+($அ $+$ வ$)+($அ $+2$வ$)+ \ldots +($அ $+\overline{இ-3}.$வ$)$

$+($அ $+\overline{இ-2}.$வ$)+($அ $+\overline{இ-1}.$வ$)$. இத்தொடரை முன் பின்னாக்கி எழுத நாம் பெறுவது

$த_{இ} = ($அ $+\overline{இ-1}.$வ$) + ($அ $+\overline{இ-2}.$வ$) + ($அ $+\overline{இ-3}.$வ$)$

$+ \ldots +($அ $+2$வ$) + ($அ $+$ வ$)+$ அ. இச்சமன்பாடுகளில் ஒத்த உறுப்புக்களைக் கூட்டுதலால் நாம் பெறுவது

$2த_{இ} = (2$அ $+\overline{இ-1}.$வ$) + (2$அ $+\overline{இ-1}.$வ$)+(2$அ $+\overline{இ-1}.$வ$)$

$+ \ldots$ இ உறுப்புக்கள் வரைக்கும்

$=$ இ$(2$அ $+\overline{இ-1}.$வ$)$.

$\therefore த_{இ} = \frac{இ}{2}(2$அ $+\overline{இ-1}.$வ$)$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆயின், ஒரு கூ.வி. இன் முதலுறுப்பும் பொது வித்தியாசமும் உறுப்புக்களினது தொகையுந் தரப்பட்டால், அத்தொடரின் கூட்டுத்தொகையை இச்சமன்பாடு துணைக்கொண்டு காணலாம்.

197. மேற் கூறிய உண்மைகளைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைச் சில உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

உ—ம்.

1. முதலுறுப்பு 10 ஆயும் பொது வித்தியாசம் 3 ஆயுமுள்ள ஒரு கூ.வி. இன் 5 ஆம் உறுப்பையும் 8 ஆம் உறுப்பையுங் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் வ என்பது பொது வித்தியாசத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின் படி, $அ = 10$, $வ = 3$.

இனி, $உ_{இ} = அ + \overline{இ - 1}.வ$.

$\therefore$ 5 ஆம் உறுப்பு $உ_5 = 10 + \overline{5 - 1}.3 = 22$.

$\therefore$ 8 ஆம் . . . $உ_8 = 10 + \overline{8 - 1}.3 = 31$.

உ—ம்.

2. 18, 16, 14, ... என்னுந் தொடரில் 8 ஆம் உறுப்பையும் 12 ஆம் உறுப்பையுங் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் வ என்பது பொது வித்தியாசத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $அ = 18$, $வ = -2$.

இனி, $உ_{இ} = அ + \overline{இ - 1}.வ$.

$\therefore$ 8 ஆம் உறுப்பு $உ_8 = 18 + \overline{8 - 1}(-2) = 18 - 14 = 4$.

$\therefore$ 12 ஆம் ,, $உ_{12} = 18 + \overline{12 - 1}(-2) = 18 - 22 = -4$.

உ—ம்.

3. ஒரு கூ.வி. இல் 4 ஆம் உறுப்பு 3 ஆயும் 9 ஆம் உறுப்பு −12 ஆயும் இருந்தால், அத்தொடரைக் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் வ என்பது பொதுவித்தியாசத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $உ_4$, அதாவது $அ + 3வ = 3$ . . . . . . (1);

,, , $உ_9$, அதாவது $அ + 8வ = -12$. . . . . . (2).

(2) இலிருந்து (1) ஐக் கழிக்க, $5வ = -15$.

$\therefore வ = -3$.

$வ = -3$ என (1) இற் பிரதியிட, $அ = 12$.

$\therefore$ வேண்டிய தொடர் 12, 9, 6, . . . என்பதே.

உ—ம்.

4. 20, 16, 12, . . . என்னுந் தொடரில் 9 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க; ஈற்றுறுப்பையுங் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் வ என்பது பொதுவித்தியாசத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையும் $த_{இ}$ என்பது இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $அ = 20$, $வ = -4$.

இனி, $த_{இ} = \frac{இ}{2}(2அ + \overline{இ - 1}.வ)$.

$$\therefore த_9 = \frac{9}{2}\left\{2 \times 20 + 8(-4)\right\}$$

$$= \frac{9}{2}(40 - 32)$$

$$= 36.$$

$உ_{இ} = அ + \overline{இ - 1}.வ$.

$\therefore உ_9 = 20 + 8 (\quad 4)$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$= 20 - 32$

$= -12.$

∴ வேண்டிய கூட்டுத்தொகை $= 36$; ஈற்றுறுப்பு $= -12$.

உ—ம்.

5. 3, 5, 7 ... என்னுந் தொடரில் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 168 ஆகும்?

அ என்பது முதலுறுப்பையும், வ என்பது பொதுவித்தியாசத்தையும் $\text{த}_{\text{இ}}$ என்பது இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $\text{அ} = 3$, $\text{வ} = 2$.

இனி, $\text{த}_{\text{இ}} = \frac{\text{இ}}{2}(2\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}.\text{வ})$

இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 168 ஆகுக.

$$\therefore 168 = \frac{\text{இ}}{2}(2 \times 3 + \overline{\text{இ} - 1}.2)$$

$$= 3\text{இ} + \text{இ}(\text{இ} - 1)$$

$$= \text{இ}^2 + 2\text{இ}.$$

$\therefore \text{இ}^2 + 2\text{இ} - 168 = 0.$

$\therefore (\text{இ} - 12)(\text{இ} + 14) = 0.$

$\therefore \text{இ} = 12$, அல்லது -14.

$\text{இ} = -14$ என்பது பொருந்தாது.

$\therefore \text{இ} = 12.$

∴ வேண்டிய உறுப்புக்களினுடைய தொகை 12.

பயிற்சி 28 (அ)

பின்வருந் தொடர்களினுடைய பொதுவித்தியாசத்தையும் 8 ஆம் உறுப்பையுங் காண்க.

1. $3, 8, 13, \ldots\ldots$
2. $4, 7, 10, \ldots\ldots$
3. $15, 11, 7, \ldots\ldots$
4. $1, \frac{1}{2}, 0, \ldots\ldots$

5. $1, -\frac{1}{2}, -2, \ldots\ldots$
6. $\text{அ}, -3\text{அ}, -7\text{அ}, \ldots\ldots$
7. $(\text{அ} + 2), 0, -(\text{அ} + 2), \ldots\ldots$
8. $(\text{அ} - \text{உ})^2, (\text{அ}^2 + \text{உ}^2), (\text{அ} + \text{உ})^2, \ldots\ldots$

மேல் வருமாறு ஒவ்வொரு தொடரிலும் ஈருறுப்புக்கள் தரப்பட்டால் அத்தொடர்களைக் காண்க.

9. 6 ஆம் உறுப்பு 32, 10 ஆம் உறுப்பு 56.
10. 9 ஆம் உறுப்பு 37, 16 ஆம் உறுப்பு 65.
11. 4 ஆம் உறுப்பு 3, 9 ஆம் உறுப்பு -22.
12. 7 ஆம் உறுப்பு 6, 12 ஆம் உறுப்பு -9.
13. 11 ஆம் உறுப்பு -2, 21 ஆம் உறுப்பு $-4\frac{1}{2}$.
14. 5 ஆம் உறுப்பு 0, 9 ஆம் உறுப்பு -12க.

கீழ்க்காணப்படுந் தொடர்களினுடைய இ ஆம் உறுப்புக்களைக் காண்க.

15. $14, 17, 20, \ldots\ldots$
16. $16, 24, 32, \ldots\ldots$
17. $10, 5, 0, \ldots\ldots$
18. $9, -1, -11, \ldots\ldots$
19. $1\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots$
20. $\text{க} + \text{ந}, \text{க}, \text{க} - \text{ந}, \ldots\ldots$
21. $-5, -3, -1 \ldots\ldots$ என்னுந் தொடரின் எவ்வுறுப்பு 15 ஆகும்?
22. $8, 12, 16 \ldots\ldots$ என்னுந் தொடரின் எவ்வுறுப்பு 84 ஆகும்?
23. $\cdot 5, \cdot 75, 1, \ldots\ldots$ என்னுந் தொடரின் எவ்வுறுப்பு $6\cdot 25$ ஆகும்?

பின்வருந் தொடர்களினுடைய ஈற்றுறுப்பையுங் கூட்டுத் தொகையையுங் காண்க.

24. $1, 3, 5, \ldots\ldots$ 10 உறுப்புக்கள் வரைக்கும்.
25. $2, 4, 6, \ldots\ldots$ 12 ,, ,, .
26. $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots\ldots$ 9 ,, ,, .
27. $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \ldots\ldots$ 15 ,, ,, .

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

28. 3·2, 4·3, 5·4 .... 10 உறுப்புக்கள் வரைக்கும்.
29. 8·7, 7·5, 6·3 .... 8 ,, ,, .
30. க + ந, க − ந, க − 3ந ....12 ,, ,, .

31. 1, 7, 13, ... என்னுந் தொடரின் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 408 ஆகும்?
32. 36, 32, 28 ..... என்னுந் தொடரின் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 180 ஆகும்?
33. 45, 39, 33, ... என்னுந் தொடரின் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 180 ஆகும்?
34. $8\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, ... என்னுந் தொடரின் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை −20 ஆகும்?
35. 15அ, 10அ, 5அ, ... என்னுந் தொடரின் எத்தனை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 0 ஆகும்?

36. இ ஆம் உறுப்பு 3இ ஆயுள்ள தொடரின் 5 ஆம் உறுப்பைத் தருக.
37. இ ஆம் உறுப்பு 2இ − 3 ஆயுள்ள தொடரின் 9 ஆம் உறுப்பைத் தருக.
38. இ ஆம் உறுப்பு 3(இ − 1) ஆயுள்ள தொடரின் 25 ஆம் உறுப்பைத் தருக.
39. இ ஆம் உறுப்பு 2(3இ − 2) ஆயுள்ள தொடரின் 10 ஆம் உறுப்பைத் தருக.
40. இ ஆம் உறுப்பு $\frac{இ}{3} + \frac{1}{2}$ ஆயுள்ள தொடரின் 12 ஆம் உறுப்பைத் தருக.
41. முதல் இ இரட்டை முழுவெண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.
42. ஒரு கூ. வி. இல் $த_{இ} = -30$, அ = 15, வ = − 4 எனின், இ ஐக் காண்க.
43. ஒரு கூ.வி. இல் $த_{இ} = 41\frac{1}{4}$, அ = $6\frac{1}{4}$, வ = $-\frac{1}{2}$ எனின் இ ஐக் காண்க.
44. 528 மைல்தூரம் போகவேண்டிய மனிதன் ஒருவன் முதனள் 12 மைலும், இரண்டாம் நாள் $12\frac{1}{4}$ மைலும், மூன்றும் நாள் $12\frac{1}{2}$ மைலும், இவ்வாறே மற்றைய நாள்

களிலுஞ் சென்றுனயின், எத்தனை நாள்களில் அவன் தனது பிரயாணத்தை முடிப்பன்?

198. **கூட்டலிடை:** மூன்று கணியங்கள் கூ.வி. இல் இருந்தால், நடு உறுப்பு ஏனைய இரண்டின் **கூட்டலிடை** எனப்படும்.

4, 7, 10 என்பன கூ.வி. இல் இருக்கின்றமையால், 7 என்பது 4, 10 என்பனவற்றின் கூட்டலிடையாகும்.

199. இருகணியங்களின் கூட்டலிடையைக் காணல்.

அ, எ என்பன இருகணியங்களாகுக; $அ_1$ என்பது அவற்றின் கூட்டலிடையாகுக.

∴ பொது வித்தியாசம் = $அ_1$ − அ, அல்லது எ − $அ_1$.

$$\therefore அ_1 - அ = எ - அ_1.$$
$$\therefore 2அ_1 = அ + எ.$$
$$\therefore அ_1 = \frac{அ + எ}{2}.$$

ஆகவே, இருகணியங்களின் கூட்டலிடை அவற்றின் கூட்டுத் தொகையின் அரைப்பங்கு.

200. அ, எ என்பனவற்றிற்கிடையே இ கூட்டலிடைகளை இடுதல்.

அ, எ என்பனவற்றிற்கு இடையில் இ உறுப்புக்கள் இடப்பட்டால், அத்தொடரில் எல்லாமாக இ + 2 உறுப்புக்கள் இருக்கும்.

வ என்பது அத்தொடரின் பொது வித்தியாசமாகுக.

ஆயின், $எ = அ + (\overline{இ + 2} - 1)வ$

$$= அ + (இ + 1)வ$$

$$\therefore வ = \frac{எ - அ}{இ + 1}.$$

$$\therefore \text{வேண்டிய இடைகள் } அ + \frac{எ - அ}{இ + 1},\ அ + \frac{2(எ - அ)}{இ + 1}, \ldots\ldots அ + \frac{இ(எ - அ)}{இ + 1}.$$

201. மேற்கூறிய உண்மைகளைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைச் சில உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

1. 3 இற்கும் 15 இற்கும் இடையேயுள்ள கூட்டலிடையைத் தருக.

வேண்டிய கூட்டலிடை $=\frac{1}{2}(3+15)$
$=9.$

உ—ம்.

2. 4 இற்கும் 24 இற்கும் இடையில் 3 கூட்டலிடைகளை இடுக.

4, 24 என்பனவற்றிற்கிடையில் 3 உறுப்புக்கள் இடப்பட்டால், எல்லாமாக அத்தொடரில் 5 உறுப்புக்கள் இருக்கும். முதலுறுப்பு 4 ஆயும் 5 ஆம் உறுப்பு 24 ஆயும் வரும்.

அ என்பது முதலுறுப்பாயும் வ என்பது பொது வித்தியாசமாயும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பாயும் இருக்க.

கணக்கின்படி, $உ_1$, அதாவது $அ=4$ .. .. .. (1),
$உ_5$, அதாவது $அ+4வ=24$ .. .. (2).
(1) ஐ (2) இலிருந்து கழிக்க.
$4வ=20.$
$\therefore வ=5.$

∴ வேண்டிய கூட்டலிடைகள் $4+5$, $4+2\times5$, $4+3\times5$ என்பன.

∴ அவை 9, 14, 19 என்பன.

உ—ம்.

3. கூ.வி. இலுள்ள 3 எண்களின் கூட்டுத் தொகை 15. அவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 83. அவ்வெண்களைக் காண்க.

அவ்வெண்கள் $அ-வ$, அ, $அ+வ$ என்பன ஆகுக.

∴ கணக்கின்படி, $(அ-வ)+(அ)+(அ+வ)=15$ .. .. (1);
$(அ-வ)^2+அ^2+(அ+வ)^2=83$ .. .. (2);
$\therefore 3அ^2+2வ^2=83$ .. .. (3).

(1) இலிருந்து $3அ=15.$
$\therefore அ=5.$

$அ=5$ என (3) இற் பிரதியிட $3(5)^2+2வ^2=83.$
$\therefore 2வ^2=8.$
$\therefore வ^2=4.$
$\therefore வ=\pm2.$

∴ $அ-வ$, அ, $அ+வ$ என்பன முறையே 3, 5, 7, அல்லது 7, 5, 3 என்பனவற்றிற்குச் சமன்.

∴ வேண்டிய எண்கள் 3, 5, 7 என்பனவே.

உ—ம்.

4. கூ.வி. இலுள்ள 4 எண்களின் கூட்டுத்தொகை 20. அவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 120. அவ்வெண்களைக் காண்க.

அவ்வெண்கள் $அ-3வ$, $அ-வ$, $அ+வ$, $அ+3வ$ என்பன ஆகுக.

∴ கணக்கின்படி,
$அ-3வ+அ-வ+அ+வ+அ+3வ=20$ .... (1);
$(அ-3வ)^2+(அ-வ)^2+(அ+வ)^2+(அ+3வ)^2=120$.... (2).
$\therefore 4அ^2+20வ^2=120.$
$\therefore அ^2+5வ^2=30$ .... (3).
(1) இலிருந்து $4அ=20.$
$\therefore அ=5.$

∴ $அ=5$ என (3) இற் பிரதியிட $வ=\pm1.$

∴ $அ-3வ$, $அ-வ$, $அ+வ$, $அ+3வ$ என்பன முறையே 2, 4, 6, 8 என்பனவற்றிற்குச் சமன்.

∴ வேண்டிய எண்கள் 2, 4, 6, 8 என்பனவே.

பயிற்சி 28 (ஆ)

1. 12, 6 என்பனவற்றிற்கிடையில் 3 கூட்டலிடைகள் இடுக.

2. 36, −24 என்பனவற்றிற்கிடையில் 4 கூட்டலிடைகள் இடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

3. $-17, 18$ என்பனவற்றிற்கிடையில் 6 கூட்டலிடைகள் இடுக.

4. $\cdot 3, 11\cdot 4$ என்பனவற்றிற்கிடையில் 4 கூட்டலிடைகள் இடுக.

5. $8\cdot 1, -9\cdot 3$ என்பனவற்றிற்கிடையில் 5 கூட்டலிடைகள் இடுக.

பின்வரும் நிபந்தனைகளுள்ள தொடர்களைக் காண்க :—

6. 3 ஆம் உறுப்பு 12 ; 7 ஆம் உறுப்பு 12.

7. 5 ஆம் உறுப்பு 2 ; 11 ஆம் உறுப்பு $-\frac{1}{3}$.

8. முதல் 5 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $\frac{5}{6}$; முதல் 6 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $-\frac{1}{2}$.

9. முதல் 4 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $7\frac{3}{4}$; முதல் 10 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை $13\frac{3}{4}$.

10. ஒரு கூ.வி. இன் 6 ஆம் உறுப்பு $1\frac{3}{4}$; 16 ஆம் உறுப்பு -1. ஆயின், முதல் 20 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

11. கூ.வி. இலுள்ள 4 எண்களின் கூட்டுத்தொகை 16. அவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 84. அவ்வெண்களைக் காண்க.

12. கூ.வி. இலுள்ள 5 எண்களின் கூட்டுத்தொகை 15. அவற்றினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 135. அவ்வெண்களைக் காண்க.

13. ஒரு கூ.வி. இன் 4 ஆம் உறுப்பு 4க ; 10 ஆம் உறுப்பு 16க. ஆயின், அதன் க ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

14. அடுத்து வரும் ஒற்றை முழுவெண்கள் 20 இல், இறுதியெண் 75 ஆயின், அவற்றின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

15. ஒரு தொடரின் இ ஆம் உறுப்பு $2இ-3$ ஆயின், அத்தொடரின் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

16. $4(2ப+3ம)+4(3ப+2ம)+4(4ப+ம)+ \ldots .10$ உறுப்புக்கள் வரைக்குங் கூட்டுக.

17. $(ப-1)+\frac{3}{2}(ப-1)+2(ப-1)+ \;..\; ..$ ப உறுப்புக்கள் வரைக்குங் கூட்டுக.

18. 4 எண்கள் கூ.வி. இல் இருக்கின்றன. முதலெண்ணை நான்காம் எண்ணுற் பெருக்க 70 உம், இரண்டாம் எண்ணை மூன்றும் எண்ணுற் பெருக்க 88 உம் வந்தால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

19. ஒரு கூ.வி. இல் இ ஆம் உறுப்பு $\frac{ப}{2}இ+ம$. ஆயின், 2இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

20. $க^2, ந^2, ய^2$ என்பன கூ.வி. இல் இருந்தால், $\frac{1}{க+ந}$, $\frac{1}{ய+க}$, $\frac{1}{ந+ய}$ என்பனவும் கூ.வி. இல் இருக்கும் என நிறுவுக.

21. இரண்டு புகை வண்டிகள் 560 மைல் இடைத்தூரமுள்ள இரு பட்டினங்களிலிருந்து ஒரே நேரத்தில் ஒன்றையொன்று நோக்கி முறையே மணிக்கு 60 மைல் வீதத்தோடும், 50 மைல் வீதத்தோடும் புறப்பட்டன. அடுத்து வரும் ஒவ்வொரு மணிநேரமுடிவிலும் அவற்றினுடைய வேகங்கள் முறையே மணிக்கு 6 மைலாலும், மணிக்கு 4 மைலாலுங் குறைந்தால், அவை எத்தனை மணிநேரத்தில் ஒன்றையொன்று சந்திக்கும்?

பெருக்கல் விருத்தி

202. தன்னுடைய ஒவ்வோர் உறுப்பும் முன்னுறுப்பை ஒரு மாருக்கணியத்தாற் பெருக்குதலாற் பெறப்படுந் தொடர் **பெருக்கல் விருத்தி** எனப்படும். இக்கணியம் அப்பெருக்கல் விருத்தியின் **பொது விகிதம்** எனப்படும்.

பெருக்கல் விருத்தி என்னுஞ் சொல்லுக்குப் பதிலாக பெ.வி. என்னுங் குறுக்கம் வழங்கப்படும்.

பின்வரும் உறுப்புக்களினுடைய தொடர்கள் பெ.வி. இல் இருத்தல் காண்க :

1, 2, 4, 8 .. .. .. ; பொது விகிதம் 2.
4, 12, 36, 108 .. .. ; பொது விகிதம் 3.
$7, -\frac{7}{5}, \frac{7}{25}, -\frac{7}{125}$ .. .. ; பொது விகிதம் $-\frac{1}{5}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

203. **முதலுறுப்பு அ ஆயும் பொது விகிதம் ப ஆயுமுள்ள ஒரு பெ.வி. இன் இ ஆம் உறுப்பைக் காணல்.**

முதல் உறுப்பு = அ.

இரண்டாம் உறுப்பு = அப = $அப^{2-1}$

மூன்றும் உறுப்பு = $அப^{2}$ = $அப^{3-1}$.

.. ..

இ ஆம் உறுப்பு = $அப^{இ-1}$.

இ ஆம் உறுப்பை ஈற்றுறுப்பெனக்கொண்டு ம ஆற் குறித்தால் நாம் பெறுவது

ம = $அப^{இ-1}$ என்னுஞ் சமன்பாடாகும்.

ஆயின், ஒரு பெ.வி. இன் முதலுறுப்பும் பொது விகிதமுந் தரப்பட்டால், அத்தொடரின் எவ்வுறுப்பையும் இச்சமன் பாட்டைத் துணைக்கொண்டு காணலாம்.

204. **முதலுறுப்பு அ ஆயும் பொதுவிகிதம் ப ஆயுமுள்ள ஒரு பெ.வி. இல் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.**

$த_{இ}$ என்பது அத்தொடரில் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையாகுக.

$$\therefore த_{இ} = அ + அப + அப^{2} + \ldots \ldots + அப^{இ-3} + அப^{இ-2} + அப^{இ-1}$$

ஒவ்வோர் உறுப்பையும் ப ஆற் பெருக்க நாம் பெறுவது

$$பத_{இ} = அப + அப^{2} + அப^{3} + \ldots + அப^{இ-3} + அப^{இ-2} + அப^{இ-1} + அப^{இ}.$$

எனின், கழித்தலாற் பெறுவது

$$த_{இ} - பத_{இ} = அ \qquad - அப^{இ}.$$

$$\therefore த_{இ}(1-ப) = அ(1-ப^{இ}).$$

$$\therefore த_{இ} = \frac{அ(1-ப^{இ})}{1-ப}.$$

ஆயின், ஒரு பெ.வி. இன் முதலுறுப்பும் பொது விகிதமும் உறுப்புக்களுடைய தொகையுந் தரப்பட்டால், அத் தொடரின் கூட்டுத்தொகையை இச்சமன்பாட்டைத் துணைக்கொண்டு காணலாம்.

205. பெருக்கலிடை: மூன்று கணியங்கள் பெ.வி. இருந்தால், நடு உறுப்பு ஏனைய இரண்டின் பெருக்கலிடை எனப்படும்.

4, 12, 36 என்பன பெ.வி. இல் இருக்கின்றமையால் 12 என்பது 4, 36 என்பனவற்றின் பெருக்கலிடையாகும்.

206. **இரு கணியங்களின் பெருக்கலிடையைக் காணல்.**

அ, எ என்பன இரு கணியங்களாகுக; $அ_{2}$ என்பது அவற்றின் பெருக்கலிடையாகுக.

$$\therefore பொது விகிதம் = \frac{அ_{2}}{அ}, அல்லது \frac{எ}{அ_{2}}.$$

$$\therefore \frac{அ_{2}}{அ} = \frac{எ}{அ_{2}}.$$

$$\therefore அ_{2}^{2} = அஎ.$$

$$\therefore அ_{2} = \pm\sqrt{அஎ}.$$

ஆயின், இரு கணியங்களின் பெருக்கலிடை அவற்றினுடைய பெருக்கத்தின் வர்க்கமூலமாகும்.

207. **அ எ என்பனவற்றிற்கிடையே இ பெருக்கலிடைகளை இடுதல்.**

அ, எ என்பனவற்றிற்கிடையில் இ உறுப்புக்கள் இடப்பட்டால், அத்தொடரில் எல்லாமாக இ+2 உறுப்புக்கள் இருக்கும்.

ப என்பது அத்தொடரின் பொது விகிதமாகுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore$ எ $=$ அப$^{இ+1}$.

$\therefore$ ப$^{இ+1} = \frac{எ}{அ}$.

$\therefore$ ப $= \sqrt[இ+1]{\frac{எ}{அ}}$

$\therefore$ வேண்டிய இடைகள் அ$\left(\frac{எ}{அ}\right)^{\frac{1}{இ+1}}$, அ$\left(\frac{எ}{அ}\right)^{\frac{2}{இ+1}}$

.... அ$\left(\frac{எ}{அ}\right)^{\frac{இ}{இ+1}}$ என்பனவே.

208. மேற்கூறிய உண்மைகளைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைச் சில உதாரணங்களால் விளக்குவோம்.

உ—ம்.

1. முதலுறுப்பு 12 ஆயும் பொதுவிகிதம் $\frac{1}{2}$ ஆயுமுள்ள ஒரு பெ.வி. இன் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் உ$_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, அ $= 12$, ப $= \frac{1}{2}$.

இனி, உ$_{இ}$ $=$ அப$^{இ-1}$

5 ஆம் உறுப்பு உ$_5 = 12 . (\frac{1}{2})^{5-1}$

$= 12 . (\frac{1}{2})^4$

$= \frac{3}{4}$.

உ—ம்.

2. 81, -27, 9,.... என்னுந் தொடரில் 4 ஆம் உறுப்பையும் 7 ஆம் உறுப்பையுங் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் உ$_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, அ $= 81$, ப $= \frac{-27}{81} = -\frac{1}{3}$.

இனி, உ$_{இ}$ $=$ அப$^{இ-1}$

$\therefore$ 4 ஆம் உறுப்பு உ$_4 = 81 \times (-\frac{1}{3})^{4-1}$

$= 81 \times (-\frac{1}{3})^3$

$= -3$.

$\therefore$ 7 ஆம் உறுப்பு உ$_7 = 81 \times (-\frac{1}{3})^{7-1}$

$= 81 \times (-\frac{1}{3})^6$

$= \frac{1}{9}$.

உ—ம்.

3. ஒரு பெ.வி. இல் 5 ஆம் உறுப்பு 4 ஆயும் 8 ஆம் உறுப்பு $-\frac{1}{2}$ ஆயும் இருந்தால், அத்தொடரைக் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் உ$_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, உ$_5$, அதாவது அப$^4 = 4$ .. .. .. (1);
உ$_8$, அதாவது அப$^7 = -\frac{1}{2}$ .. .. (2).

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, ப$^3 = -\frac{1}{8}$.
$\therefore$ ப $= -\frac{1}{2}$.

ப $= -\frac{1}{2}$ என (1) இற் பிரதியிட அ $= 64$.
$\therefore$ வேண்டிய தொடர் 64, -32, 16, ... என்பதே.

உ—ம்.

4. ஒரு பெ.வி. இல் 3 ஆம் உறுப்பு 12 ஆயும் 5 ஆம் உறுப்பு 48 ஆயும் இருந்தால், அத்தொடரின் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, $உ_3$, அதாவது $அப^2=12$ .. .. (1);
$உ_5$, அதாவது $அப^4=48$ .. .. (2).

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, $ப^2=4$.
$\therefore ப=\pm 2$.

$\therefore$ 6 ஆம் உறுப்பு $உ_6=உ_5\times ப$
$=48(\pm 2)$
$=96$, அல்லது -96.

உ—ம்.

5. 12, -6, 3, . . . என்னுந் தொடரில் 6 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க; ஈற்றுறுப்பையுங் காண்க.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையும் $த_{இ}$ என்பது இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையுங் குறிக்க.

கணக்கின்படி, அ$=12$, $ப=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$.

இனி $த_{இ}=\frac{அ(1-ப^{இ})}{1-ப}$.

$$\therefore த_6=\frac{12\left\{1-(-\frac{1}{2})^6\right\}}{1-(-\frac{1}{2})}$$

$$\frac{12(1-\frac{1}{64})}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=12\times\frac{63}{64}\times\frac{2}{3}$$

$$=7\tfrac{7}{8}.$$

இனி, $உ_{இ}=அப^{இ-1}$

$$\therefore உ_6=12\times(-\tfrac{1}{2})^{6-1}$$
$$=12\times(-\tfrac{1}{2})^5$$
$$=-\tfrac{3}{8}.$$

$\therefore$ வேண்டிய கூட்டுத்தொகை $=7\frac{7}{8}$; ஈற்றுறுப்பு $=-\frac{3}{8}$.

உ—ம்.

6. $\frac{1}{8}$, 32 என்பனவற்றிற்கிடையில் 3 பெருக்கலிடைகளை இடுக.

அ என்பது முதலுறுப்பையும் ப என்பது பொது விகிதத்தையும் $உ_{இ}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பையுங் குறிக்க.

$\frac{1}{8}$, 32 என்பனவற்றிற்கிடையில் 3 பெருக்கலிடைகள் இடப்பட்டால், அத்தொடரில் எல்லாமாக 5 உறுப்புக்கள் இருக்கும்; 32 என்பது 5 ஆம் உறுப்பாகும்.

$\therefore$ கணக்கின்படி, $உ_1$, அதாவது அ$=\frac{1}{8}$ .. .. (1);
$உ_5$, அதாவது $அப^4=32$ .. .. (2).

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க $ப^4=256$.
$\therefore ப=\pm 4$.

$\therefore$ வேண்டிய பெருக்கலிடைகள் $\frac{1}{2}$, 2, 8 என்பனவாகும், அல்லது $-\frac{1}{2}$, 2, -8 என்பனவாகும்.

உ—ம்.

7. பெ.வி. இலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத் தொகை 26 ஆயும் பெருக்கம் 216 ஆயும் இருந்தால் அவ்வெண்களைக் காண்க.

அவ்வெண்கள் அ, அப, $அப^2$ என்பனவாகுக.

கணக்கின்படி, $அ+அப+அப^2=26$ .. .. .. (1);
$அ.அப.அப^2=216$ .. .. .. (2);
(1) இலிருந்து $அ(1+ப+ப^2)=26$ .. .. .. (3).

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(2) இலிருந்து $அ^3ப^3=216$.

$\therefore அப=6$.

$\therefore அ=\frac{6}{ப}$. .. .. .. (4)

$அ=\frac{6}{ப}$ என (3) இற் பிரதியிடுக.

$\therefore \frac{6}{ப}(1+ப+ப^2)=26$.

$\therefore 3(1+ப+ப^2)=13ப$.

$\therefore 3ப^2-10ப+3=0$.

$\therefore (ப-3)(3ப-1)=0$.

$\therefore ப=3$, அல்லது $\frac{1}{3}$.

$\therefore$ (4) இலிருந்து $அ=2$, அல்லது 18.

$\therefore$ வேண்டிய எண்கள் 2, 6, 18 என்பனவே.

பயிற்சி 28 (இ)

பின்வருந் தொடர்களில், 7 ஆம் உறுப்பையும் 8 ஆம் உறுப்பையுங் காண்க:—

1. 2, 4, 8, ...
2. 1, 3, 9 .. ..
3. $2, -1, \frac{1}{2}$ .. ..
4. $81, -27, 9$ .. ..
5. $3, -1, \frac{1}{3}$ . . . என்னுந் தொடரில் எந்த உறுப்பு $-\frac{1}{729}$ ஆகும்?
6. $3, -6, 12$ . . . என்னுந் தொடரில் எந்த உறுப்பு 768 ஆகும்?
7. 128, 64, 32, ... என்னுந் தொடரில் எந்த உறுப்பு $\frac{1}{32}$ ஆகும்?
8. 2, ·2, ·02 ... என்னுந் தொடரில் எந்த உறுப்பு ·00002 ஆகும்?

9. 4 ஆம் உறுப்பு -3 ஆயும் 7 ஆம் உறுப்பு $\frac{3}{8}$ ஆயுமுள்ள பெ. வி. ஐக் காண்க.

10. ஒரு பெ.வி. இன் 5 ஆம் உறுப்பு $\frac{4}{9}$; 8 ஆம் உறுப்பு $-\frac{4}{243}$; ஆயின், அந்தப் பெ.வி. ஐக் காண்க.

11. 3 ஆம் உறுப்பு 1 ஆயும் 8 ஆம் உறுப்பு $-\frac{1}{243}$ ஆயுமுள்ள பெ.வி. இன் இ ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

பின்வருந் தொடர்களினுடைய கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க.

12. 1, 2, 4	8	உறுப்புக்கள்	வரைக்கும்.
13. $3, 1, \frac{1}{3}$	6	,,	,, .
14. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$	10	,,	,, .
15. 128, 32, 8 . . .	7	,,	,, .
16. $\frac{2}{9}, -\frac{2}{3}, 2$	9	,,	,, .
17. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$	7	,,	,, .

18. $ம=அ+அப+அப^2+$ . . . என்பது இ உறுப்புக்கள் வரைக்குங் கூட்ட வந்த கூட்டுத் தொகையாயின்,

$$த_{இ}=\frac{பம-அ}{ப-அ}$$ என நிறுவுக.

19. 8 இற்கும் 32 இற்கும் இடையிலுள்ள பெருக்க லிடையைக் காண்க.

20. -9 இற்கும் -4 இற்கும் இடையிலுள்ள பெருக்க லிடையைக் காண்க.

21. 54 இற்கும் 6 இற்கும் இடையிலுள்ள பெருக்க லிடையைக் காண்க.

22. $4\sqrt{2}$ இற்கும் $\frac{1}{\sqrt{2}}$ இற்கும் இடையிலுள்ள பெருக்க லிடையைக் காண்க.

23. $\frac{1}{12}$ இற்கும் $\frac{81}{128}$ இற்கும் இடையில் 4 பெருக்க லிடைகள் இடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

24. $2\frac{1}{4}$ இற்கும் $\frac{4}{9}$ இற்கும் இடையில் 3 பெருக்கலிடைகள் இடுக.

25. -256 இற்கும் $\frac{1}{64}$ இற்கும் இடையில் 6 பெருக்க லிடைகள் இடுக.

26. $-6\frac{1}{4}$ இற்கும் $-\frac{4}{25}$ இற்கும் இடையில் 3 பெருக்க லிடைகள் இடுக.

27. 4, −8, 16, ... என்னுந் தொடரில் எத்தனை உறுப் புக்கள் சேர்ந்தால் 172 ஆகும்?

28. 81, −27, 9 .... என்னுந் தொடரில் எத்தனை உறுப் புக்கள் சேர்ந்தால் 61 ஆகும்?

29. $\frac{27}{32}, -\frac{9}{16}, \frac{3}{8}$ .... என்னுந் தொடரில் எத்தனை உறுப் புக்கள் சேர்ந்தால் $\frac{55}{96}$ ஆகும்?

30. 4, 2, 1 .... என்னுந் தொடரில் எத்தனை உறுப் புக்கள் சேர்ந்தால் $7\frac{15}{16}$ ஆகும்?

31. இரண்டு எண்களின் கூட்டலிடை $\frac{5}{24}$ ஆயும் பெருக்க லிடை $\frac{1}{6}$ ஆயும் இருந்தால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

32. பெ. வி. இலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை $2\frac{5}{8}$ ஆயும், பெருக்கம் $\frac{27}{64}$ ஆயும் இருந்தால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

33. அ, எ, ஒ என்பன பெ.வி. இல் இருந்தால், $\frac{அ}{ஒ} = \left(\frac{அ+எ}{எ+ஒ}\right)^2$ என நிறுவுக.

34. அ, எ என்பனவற்றிற்கு இடையிலுள்ள இ பெருக்க லிடைகளின் பெருக்கம் அ, எ என்பனவற்றின் பெருக்கலி டையின் இ ஆம் அடுக்கென நிறுவுக.

முடிவில் பெருக்கல் விருத்தி

209. முடிவில்லாத் தொகை உறுப்புக்களிலுள்ள பெருக்கல் **விருத்தி முடிவில்லாத் தொடர்** எனப்படும்; **அத்தகைத் தொடரின் கூட்டுத்தொகை அத்தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை** எனப்படும்.

$த_{இ} = அ + அப + அப^2 + \ldots\ldots அப^{இ-1}$ ஆகுக.

(1) முதற்கண் எண்ணளவில், $ப > 1$ ஆகுக.

பிரிவு 204 இற்பெற்ற வண்ணம் $த_{இ} = \frac{அ(1-ப^{இ})}{1-ப}$

$$= \frac{அப^{இ} - அ}{ப-1}$$

$$= \frac{அப^{இ}}{ப-1} - \frac{அ}{ப-1}.$$

எண்ணளவில் $ப > 1$ எனின், இ பெரிது பெரிதாகி ∞ என் பதை அணுக, $ப^{இ}$ என்பதும் பெரிது பெரிதாகி ∞ என்பதை அணுகும்.

$$\therefore த_{\infty} = \frac{அ \cdot \infty}{ப-1} - \frac{அ}{ப-1}$$

$$= \infty - \frac{அ}{ப-1}$$

$$= \infty.$$

இத்தகைத் தொடர் **விரிதொடர்** எனப்படும்; இத்தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை ∞ ஆகும்.

(2) இனி, $ப = 1$ ஆகுக.

எனின், $த_{\infty} = அ + அ + அ + \ldots$ முடிவிலித் தொகை உறுப் புக்கள் வரைக்கும்

$$= \infty \cdot அ$$

$$= \infty.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

இத்தொடரும் விரிதொடராகும்; இதன் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை ∞ ஆகும்.

(3) இனி, $\text{ப} = -1$ ஆகுக.

என்னின், $\text{த}_{\infty} = \text{அ} - \text{அ} + \text{அ} - \text{அ} + \ldots$ முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்கள் வரைக்கும்

$= \text{அ}$, அல்லது 0.

இத்தொடர் அலைதொடர் எனப்படும்; இதன் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை அ, அல்லது 0 ஆகும்.

(4) இனி, $\text{ப} < 1$ ஆகுக.

பிரிவு 204 இற் பெற்ற வண்ணம் $\text{த}_{\text{இ}} = \dfrac{\text{அ}(1-\text{ப}^{\text{இ}})}{1-\text{ப}}$

$$= \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}} - \frac{\text{அப}^{\text{இ}}}{1-\text{ப}}.$$

எண்ணளவில், $\text{ப} < 1$ எனின், இ பெரிது பெரிதாகி ∞ என்பதை அணுக, $\text{ப}^{\text{இ}}$ என்பது சிறிது சிறிதாகி 0 என்பதை அணுகும்.

$$\therefore \text{த}_{\infty} = \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}} - \frac{\text{அ} \times 0}{1-\text{ப}}$$

$$= \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}} - 0$$

$$= \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}}$$

உ—ம்.

1. 9, 3, 1 . . . என்னுந் தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

இங்கு $\text{அ} = 9$, $\text{ப} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

$$\therefore \text{த}_{\infty} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{\frac{2}{3}} = \frac{27}{2} = 13\tfrac{1}{2}.$$

உ—ம்.

2. $\cdot 3\dot{5}\dot{6}$ என்பதனைப் பொதுப் பின்னத்திலே தருக.

$$\cdot 3\dot{5}\dot{6} = \frac{3}{10} \quad \frac{56}{1000} + \frac{56}{100000} + \frac{56}{10000000} + .$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{56}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \quad - \quad -\right.$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{56}{10^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{56}{10^3} \times \frac{10^2}{99}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{56}{990}$$

$$= \frac{353}{990}.$$

உ—ம்.

3. முடிவில்லாத பெ. வி. ஒன்றின் கூட்டுத் தொகை 72. அதன் இரண்டாம் உறுப்பு 18. அத்தொடரைக் காண்க.

அ என்பது அவ் விருத்தியின் முதலுறுப்பாயும், ப என்பது அதன் பொது விகிதமாயும் இருக்க.

கணக்கின்படி, $\dfrac{\text{அ}}{1-\text{ப}} = 72$ .. .. (1);

$\text{அப} = 18$ .. .. (2)

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, $\text{அப} \div \dfrac{\text{அ}}{1-\text{ப}} = \dfrac{18}{72}$

$$\therefore \frac{\text{அப}(1-\text{ப})}{\text{அ}} = \tfrac{1}{4}.$$

$$\therefore \frac{\text{ப}(1-\text{ப})}{1} = \tfrac{1}{4}.$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\therefore 1 = 4\text{ப} - 4\text{ப}^2.$

$\therefore 4\text{ப}^2 - 4\text{ப} + 1 = 0.$

$\therefore (2\text{ப} - 1)^2 = 0.$

$\therefore 2\text{ப} - 1 = 0.$

$\therefore \text{ப} = \frac{1}{2}.$

$\text{ப} = \frac{1}{2}$ என (2) இற் பிரதியிட $\text{அ} = 36$.

∴ வேண்டிய விருத்தி 36, 18, 9, ... என்பதே.

பயிற்சி 28 (ஈ)

பின்வருந் தொடர்களை முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்கள் வரைக்குங் கூட்டுக:—

1. 16, 8, 4 . . . .
2. $1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}$ . . . . .
3. $\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}, \frac{9}{32}$, ...
4. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}$, ...
5. ·8, ·04, ·002, . . .
6. 6·4, 3·2, 1·6, . . .

பின்வருவனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைப் பொதுப் பின்னங்களிலே காண்க:

7. (i) $\cdot\dot{6}$ (ii) $\cdot 6\dot{7}$ (iii) $\cdot\dot{5}\dot{6}$
8. (i) $\cdot\dot{3}$ (ii) $\cdot 3\dot{6}\dot{4}$ (iii) $\cdot 4\dot{5}\dot{9}$
9. (i) $\cdot\dot{5}$ (ii) $\cdot 2\dot{5}\dot{6}$ (iii) $\cdot 0\dot{6}\dot{8}$

10. ஒரு பெ.வி. இல் $\text{த}_\infty = 18$; இரண்டாம் உறுப்பு -20. எனின், அத்தொடரைக் காண்க.

11. ஒரு முடிவில் பெ.வி. இன் கூட்டுத் தொகை $\frac{3}{5}$; அதன் இரண்டாம் உறுப்பு $-\frac{9}{20}$; ஆயின், அதனுடைய முதல் ஐந்துறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

12. ஒரு முடிவில் பெ.வி. இன் கூட்டுத் தொகை $\frac{1}{2}$ ஆயும் முதலுறுப்பு $\frac{1}{4}$ ஆயும் இருந்தால் அதன் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

13. ஒரு முடிவில் பெ.வி. இன் முதல் 3 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 14 ஆயும், அடுத்த 3 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $-\frac{14}{27}$ ஆயும் இருந்தால், அத்தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

14. தன் முதலுறுப்பு இ ஆயும் ஒவ்வோர் உறுப்பும் அடுத்துத் தொடரும் எல்லா உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையின் இ மடங்காயுமுள்ள முடிவில் பெ.வி. ஐக் காண்க.

15. ஒரு புகைவண்டி ஒவ்வொரு மணி நேரத்திற்கும் ஓடுந் தூரம் அதற்கு முந்திய மணிநேரத்தில் ஓடியதன் $\frac{1}{5}$ மடங்காயின், அது எத்தனை மணிநேரத்திற்கு ஓடினலும் ஒரு குறித்த அளவிற்கு மேற்பட்ட தூரம் ஓடமாட்டாதெனக் காட்டுக.

இசை விருத்தி (இ.வி.)

210. ஒரு தொடரிலுள்ள கணியங்களினுடைய தலைகீழ்கள் கூட்டல் விருத்தியில் இருந்தால் அத்தொடர் **இசைவிருத்தியில்** இருக்கின்றதெனப்படும்.

உ—ம்.

(1) 2, 4, 6, 8 . . . . என்பன கூ.வி. இல் இருக்கின்றன;

∴ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ . . . . என்பன இ.வி. இல் இருக்கின்றன.

(2) அ, அ + வ, அ + 2வ, ... அ + (இ − 1)வ என்பன கூ.வி. இல் இருக்கின்றன.

$\therefore \frac{1}{\text{அ}}, \frac{1}{\text{அ}+\text{வ}}, \frac{1}{\text{அ}+2\text{வ}}, \ldots \ldots \frac{1}{\text{அ}+(\text{இ}-1)\text{வ}}$ என்பன இ.வி. இல் இருக்கின்றன.

211. இசையிடை: மூன்று கணியங்கள் இ.வி. இல் இருந்தால், நடு உறுப்பு ஏனைய இரண்டின் இசையிடை எனப்படும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ என்பன இ.வி. இல் இருக்கின்றமையால், $\frac{1}{4}$ என்பது $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ என்பனவற்றின் இசையிடை எனப்படும்.

212. இருகணியங்களின் இசையிடையைக் காணல்.

அ, எ என்பன இருகணியங்களாகுக; $அ_3$ என்பது அவற்றின் இசையிடையாகுக.

ஆயின், அ, $அ_3$, எ என்பன இ.வி. இல் இருக்கும்.

$\therefore \frac{1}{அ}, \frac{1}{அ_3}, \frac{1}{எ}$ என்பன கூ.வி. இல் இருக்கும்.

$$\therefore \frac{1}{அ_3}=\frac{\frac{1}{அ}+\frac{1}{எ}}{2}$$

$$=\frac{அ+எ}{2அஎ}.$$

$$\therefore அ_3=\frac{2அஎ}{அ+எ}.$$

$\therefore$ அ, எ என்பனவற்றின் இசையிடை$=\frac{2அஎ}{அ+எ}$.

213. எவையேனும் இருகணியங்களின் பெருக்கலிடை அவற்றின் கூட்டலிடை இசையிடைகளின் பெருக்கலிடைக்குச் சமன்.

அ, எ என்பன இருகணியங்களாகுக; $அ_1$, $அ_2$, $அ_3$ என்பன முறையே அக்கணியங்களுடைய கூட்டலிடை, பெருக்கலிடை, இசையிடை என்பனவாகுக.

ஆயின், $அ_1=\frac{அ+எ}{2}$; $அ_2=\sqrt{அஎ}$; $அ_3=\frac{2அஎ}{அ+எ}$.

$$\therefore அ_1 அ_3=\frac{அ+எ}{2}\times\frac{2அஎ}{அ+எ}$$

$$=அஎ$$

$$=(அ_2)^2.$$

$\therefore$ $அ_1$, $அ_2$, $அ_3$ என்பன பெ.வி. இல் இருக்கின்றன.

$\therefore$ அ, எ என்பனவற்றின் பெருக்கலிடை அவற்றின் கூட்டலிடை இசையிடைகளின் பெருக்கலிடைக்குச் சமன்.

214. இ.வி. இலுள்ள ஒருதொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை நேரே கூட்டுதலான் மாத்திரங் காணப்படும்.

இசை விருத்தியிலுள்ள கணியங்கள் கொண்ட கணக்குக்களைச் செய்யுமுறைகள் பின்வரும் உதாரணங்களால் அறியப்படும்:—

உ—ம்.

1. 5 இற்கும் 9 இற்கும் இடையில் 3 இசையிடைகள் இடுக.

முதற்கண் $\frac{1}{5}$ இற்கும் $\frac{1}{9}$ இற்கும் இடையில் 3 கூட்டலிடைகள் இடுவோம்.

$உ_1$, அதாவது $அ=\frac{1}{5}$.

$உ_5$, அதாவது $அ+4வ=\frac{1}{9}$.

$$\therefore 4வ=\frac{1}{9}-\frac{1}{5}=-\frac{4}{45}.$$

$$\therefore வ=-\frac{1}{45}.$$

$\therefore$ கூ.வி. இலுள்ள தொடர்

$\frac{1}{5}, \frac{1}{5}-\frac{1}{45}, \frac{1}{5}-\frac{2}{45}, \frac{1}{5}-\frac{3}{45}, \frac{1}{5}-\frac{4}{45}$ என்பது.

அல்லது $\frac{1}{5}, \frac{8}{45}, \frac{7}{45}, \frac{6}{45}, \frac{1}{9}$ என்பது;

$\therefore$ இ.வி. இலுள்ள தொடர் $5, \frac{45}{8}, \frac{45}{7}, \frac{45}{6}, 9$ என்பது,

அல்லது $5, 5\frac{5}{8}, 6\frac{3}{7}, 7\frac{1}{2}, 9$ என்பது.

$\therefore$ வேண்டிய இசையிடைகள் $5\frac{5}{8}, 6\frac{3}{7}, 7\frac{1}{2}$ என்பனவாகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

உ—ம்.

2. இ.வி. இலுள்ள மூன்று எண்களின் கூட்டுத்தொகை 33; அவற்றினுடைய தலைகீழ்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{3}{8}$; அவ்வெண்களைக் காண்க.

இ.வி. இலுள்ள அவ்வெண்கள் $\frac{1}{அ-எ}, \frac{1}{அ}, \frac{1}{அ+எ}$ என்பன ஆகுக.

அவற்றினுடைய தலைகீழ்கள் அ − எ, அ, அ + எ என்பன கூ.வி. இல் இருத்தல் காண்க.

கணக்கின்படி, $\frac{1}{அ-எ}+\frac{1}{அ}+\frac{1}{அ+எ}=33$ .. .. (1);

$$அ-எ+அ+அ+எ=\frac{3}{8} \quad .. .. .. (2).$$

$$\therefore 3அ=\frac{3}{8}.$$

$$\therefore அ=\tfrac{1}{8}.$$

அ$=\frac{1}{8}$ என (1) இற் பிரதியிடுக.

$$\therefore \frac{1}{\frac{1}{8}-எ}+\frac{1}{\frac{1}{8}}+\frac{1}{\frac{1}{8}+எ}=33.$$

$$\therefore \frac{8}{1-8எ}+8+\frac{8}{1+8எ}=33.$$

$$\therefore \frac{8}{1-8எ}+\frac{8}{1+8எ}=25.$$

$$\therefore \frac{1}{1-8எ}+\frac{1}{1+8எ}=\frac{25}{8}.$$

$$\therefore \frac{2}{1-64எ^2}=\frac{25}{8}.$$

$$\therefore 1-64எ^2=\frac{16}{25}=1-\frac{9}{25}.$$

$$\therefore 64எ^2=\frac{9}{25}.$$

$$\therefore எ^2=\frac{9}{25\times 64}.$$

$$\therefore எ=\pm\frac{3}{40}.$$

∴ வேண்டிய எண்களினுடைய தலைகீழ்கள் $\frac{1}{8}-\frac{3}{40}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}+\frac{3}{40}$ என்பன, அல்லது $\frac{1}{8}+\frac{3}{40}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}-\frac{3}{40}$ என்பன.

∴ அத்தலைகீழ்கள் $\frac{1}{20}, \frac{1}{8}, \frac{1}{5}$ என்பன, அல்லது $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{20}$ என்பன.

∴ வேண்டிய எண்கள் 20, 8, 5 என்பன, அல்லது 5, 8, 20 என்பன.

பயிற்சி 28 (உ)

1. 3 இற்கும் 5 இற்கும் இடையிலுள்ள இசையிடையைக் காண்க.
2. −6 இற்கும் 9 இற்கும் இடையிலுள்ள இசையிடையைக் காண்க.
3. $\frac{1}{2}$ இற்கும் $\frac{1}{4}$ இற்கும் இடையிலுள்ள இசையிடையைக் காண்க.
4. வ இற்கும் 2வ இற்கும் இடையிலுள்ள இசையிடையைக் காண்க.
5. $1\frac{1}{3}$ இற்கும் $\frac{2}{5}$ இற்கும் இடையில் 2 இசையிடைகள் இடுக.
6. 3 இற்கும் 2 இற்கும் இடையில் 4 இசையிடைகள் இடுக.
7. $1\frac{1}{5}$ இற்கும் −2 இற்கும் இடையில் 3 இசையிடைகள் இடுக.
8. $-1\frac{1}{7}$ இற்கும் $1\frac{3}{5}$ இற்கும் இடையில் 3 இசையிடைகள் இடுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

9. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ . . . என்னும் இ.வி. இன் 5 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

10. $2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ ... என்னும் இ.வி. இன் 6 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

11. $-\frac{2}{7}, -\frac{2}{3}, 2$ ... என்னும் இ.வி. இன் 8 ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

12. இ.வி. இலுள்ள 3 எண்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{13}{15}$; அவற்றின் பெருக்கம் $-\frac{1}{15}$; ஆயின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

13. ஓர் இ.வி. இன் க ஆம் உறுப்பு ந ஆயும் ந ஆம் உறுப்பு க ஆயும் இருந்தால் (க + ந) ஆம் உறுப்பைக் காண்க.

14. இ.வி. இலுள்ள 3 எண்களின் கூட்டுத்தொகை $1\frac{1}{2}$; அவற்றினுடைய தலைகீழ்களின் கூட்டுத்தொகை $\frac{2}{3}$; ஆயின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

15. இரண்டு எண்களின் கூட்டலிடை 13; அவற்றின் பெருக்கலிடை ± 12; அவற்றின் இசையிடையைக் காண்க.

16. அ, உ, எ என்பன கூ.வி. இலும் உ, எ, ஒ என்பன இ.வி. இலும் இருந்தால், அஒ = உஎ என நிறுவுக.

17. அ, உ, எ என்பன இ.வி. இல் இருந்தால், 2அ − உ, உ, 2எ − உ என்பன பெ.வி. இல் இருக்குமென நிறுவுக.

18. அ, உ, எ என்பன கூ.வி. இலும் உ, எ, அ என்பன பெ.வி. இலும் இருந்தால், எ, அ, உ என்பன இ.வி. இல் இருக்குமென நிறுவுக.

19. உ + எ, எ + அ, அ + உ என்பன இ.வி. இல் இருந்தால், $\text{அ}^2, \text{உ}^2, \text{எ}^2$ என்பன கூ.வி. இல் இருக்குமென நிறுவுக.

20. க, ந, ய என்பன கூ.வி. இலும் க, மந, ய என்பன பெ.வி. இலும் இருந்தால், க, $\text{ம}^2\text{ந}$, ய என்பன இ.வி. இல் இருக்குமென நிறுவுக.

விருத்திகளோடு தொடர்புள்ள சில தொடர்கள்

215. சில தொடர்கள் கூட்டல் பெருக்கல் விருத்திகளோடு தொடர்புள்ளவையாய் உள.

$$\text{அ} + (\text{அ} + \text{வ}) + (\text{அ} + 2\text{வ}) + \;\ldots\; + (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ}),$$

$$1 + \text{ப} + \text{ப}^2 + \;\ldots\; \text{ப}^{\text{இ} - 1}$$

என்னும் இரு தொடர்களுடைய ஒத்த உறுப்புக்களை ஒருங்கு பெருக்க நாம் பெறுவது

$$\text{அ} + (\text{அ} + \text{வ})\text{ப} + (\text{அ} + 2\text{வ})\text{ப}^2 + \;\ldots\; (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ} - 1}$$

என்பதே.

இத்தொடர் கூட்டல் பெருக்கற்றொடர் எனப்படும்.

216. $\text{அ} + (\text{அ} + \text{வ})\text{ப} + (\text{அ} + 2\text{வ})\text{ப}^2 + \ldots (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ} - 1}$ **என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகையைக் காணல்.**

$$\text{த}_{\text{இ}} = \text{அ} + (\text{அ} + \text{வ})\text{ப} + (\text{அ} + 2\text{வ})\text{ப}^2 + \;\ldots\; (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ} - 1} \text{ ஆகுக.}$$

$$\therefore \text{பத}_{\text{இ}} = \text{அப} + (\text{அ} + \text{வ})\text{ப}^2 + \;\ldots\; (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 2}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ} - 1} + (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ}}$$

$$\therefore \text{ கழித்தலால், } \text{த}_{\text{இ}}(1 - \text{ப}) = \text{அ} + (\text{வப} + \text{வப}^2 + \ldots \text{வப}^{\text{இ} - 1}) - (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ}}$$

$$= \text{அ} + \frac{\text{வப}(1 - \text{ப}^{\text{இ} - 1})}{1 - \text{ப}} - (\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ}}$$

$$\text{த}_{\text{இ}} = \frac{\text{அ}}{1 - \text{ப}} + \frac{\text{வப}(1 - \text{ப}^{\text{இ} - 1})}{(1 - \text{ப})^2} - \frac{(\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ}}}{1 - \text{ப}}$$

$$= \frac{\text{அ}}{1 - \text{ப}} + \frac{\text{வப}}{(1 - \text{ப})^2} - \frac{\text{வப}^{\text{இ}}}{(1 - \text{ப})^2} - \frac{\text{அ} + \overline{\text{இ} - 1}\cdot\text{வ})\text{ப}^{\text{இ}}}{1 - \text{ப}}$$

இங்கு, $\text{ப} < 1$ எனின், இ என்பது ∞ என்பதை அணுக $\text{ப}^{\text{இ}}$ என்பது 0 என்பதை அணுகும்.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

ஆகவே, $\text{த}_\infty = \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}} + \frac{\text{வப}}{(1-\text{ப})^2} - \frac{\text{வ}\cdot 0}{(1-\text{ப})^2}$

$$- \frac{(\text{அ} + \overline{\text{இ}-1}\cdot\text{வ})0}{1-\text{ப}}.$$

$$= \frac{\text{அ}}{1-\text{ப}} + \frac{\text{வப}}{(1-\text{ப})^2}.$$

217. இ இயற்கை எண்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{\text{இ}(\text{இ}+1)}{2}$ எனக் காட்டல்.

$\text{த}_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + \text{இ}.$

இத்தொடர் கூ.வி. ஆகும்; இதன் முதலுறுப்பு 1 ஆகும்; பொதுவித்தியாசமும் 1 ஆகும்.

$$\therefore \text{த}_1 = \frac{\text{இ}}{2}(2 \times 1 + \overline{\text{இ}-1}\cdot 1)$$

$$= \frac{\text{இ}}{2}(2 + \text{இ} - 1)$$

$$= \frac{\text{இ}(\text{இ}+1)}{2}.$$

இதனைப் பின்வருமாறுங் காட்டலாம்:

$\text{க}^2 - (\text{க}-1)^2 = 2\text{க} - 1$ என்னுஞ் சர்வ சமன்பாடு க இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும். ஆகவே, இச்சமன்பாட்டில் க இற்கு முறையே 1, 2, 3, . . இ என்பனவற்றைப் பிரதியிட நாம் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்:

$$1^2 - 0^2 = 2 \times 1 - 1.$$
$$2^2 - 1^2 = 2 \times 2 - 1.$$
$$3^2 - 2^2 = 2 \times 3 - 1.$$

— — — —

— — — —

$$\text{இ}^2 - (\text{இ}-1)^2 = 2 \times \text{இ} - 1.$$

$$\text{இ}^2 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + \text{இ}) - \text{இ}$$
$$= 2\text{த}_1 - \text{இ}.$$
$$\therefore 2\text{த}_1 = \text{இ}^2 + \text{இ}$$
$$= \text{இ}(\text{இ}+1).$$
$$\therefore \text{த}_1 = \frac{\text{இ}(\text{இ}+1)}{2}.$$

218. இ இயற்கை எண்களுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \frac{1}{6}\text{இ}(\text{இ}+1)(2\text{இ}+1)$ எனக் காட்டல்.

த_1 என்பது இ இயற்கை எண்களின் கூட்டுத் தொகையாயும் த_2 என்பது அவ்வெண்களினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாயும் இருக்க.

$\text{க}^3 - (\text{க}-1)^3 = 3\text{க}^2 - 3\text{க} + 1$ என்னுஞ் சர்வசமன்பாடு க இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும். ஆகவே, இச்சமன்பாட்டில் க இற்கு முறையே 1, 2, 3, . . இ என்பனவற்றைப் பிரதியிட நாம் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்:

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1.$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1.$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1.$$

— — — —

— — — —

$$\text{இ}^3 - (\text{இ}-1)^3 = 3\cdot\text{இ}^2 - 3\cdot\text{இ} + 1.$$

இச்சமன்பாடுகளைக் கூட்டுதலால், நாம் பெறுவது

$$\text{இ}^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 \;.\;.\; \text{இ}^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + \text{இ}) + \text{இ}.1.$$

$$= 3\text{த}_2 - 3\text{த}_1 + \text{இ}$$

$$= 3\text{த}_2 - \frac{3\,\text{இ}(\text{இ}+1)}{2} + \text{இ}.$$

$$\therefore 3\text{த}_2 = \text{இ}^3 + \frac{3\text{இ}(\text{இ}+1)}{2} - \text{இ}.$$

$$= \text{இ}\left\{\text{இ}^2 + \frac{3(\text{இ}+1)}{2} - 1\right\}$$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

$$=\frac{இ(2இ^2+3இ+1)}{2}$$
$$=\frac{இ(இ+1)(2இ+1)}{2}.$$
$$\therefore த_2=\frac{இ(இ+1)(2இ+1)}{6}.$$

219. இ இயற்கை எண்களினுடைய கனங்களின் கூட்டுத் தொகை $=\left\{\frac{இ(இ+1)}{2}\right\}^2$ எனக் காட்டல்.

$த_1$ என்பது இ இயற்கை எண்களின் கூட்டுத்தொகையாயும், $த_2$ என்பது அவ்வெண்களினுடைய வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாயும், $த_3$ என்பது அவ்வெண்களினுடைய கனங்களின் கூட்டுத் தொகையாயும் இருக்க.

$க^4-(க-1)^4=4க^3-6க^2+4க-1$ என்னுஞ் சர்வ சமன்பாடு க இனுடைய பெறுமானங்கள் எல்லாவற்றிற்கும் உண்மையாகும். ஆகவே, இச்சமன்பாட்டில், க இற்கு முறையே 1, 2, 3, . . . இ என்டனவற்றைப் பிரதியிட நாம் பின்வருஞ் சமன்பாடுகளைப் பெறுவோம்:

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1$$
— — — — — .
— — — — — .
$$இ^4-(இ-1)^4=4\cdot இ^3-6\cdot இ^2+4\cdot இ-1.$$

இவற்றைக் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$இ^4=4(1^3+2^3+3^3+..+இ^3)-6(1^2+2^2+3^2+..+இ^2)+4(1+2+3+..+இ)-இ.1$$
$$=4த_3-6த_2+4த_1-இ$$
$$=4த_3-6\frac{இ(இ+1)(2இ+1)}{6}+4\cdot\frac{இ(இ+1)}{2}-இ$$
$$=4த_3-இ(இ+1)(2இ+1)+2இ(இ+1)-இ.$$
$$\therefore 4த_3=இ^4+இ(இ+1)(2இ+1)-2இ(இ+1)+இ$$
$$=இ^4+இ+இ(இ+1)(2இ+1)-2இ(இ+1)$$

$$=இ(இ^3+1)+இ(இ+1)(2இ+1)-2இ(இ+1)$$
$$=இ(இ+1)\left\{(இ^2-இ+1)+(2இ+1)-2\right\}$$
$$=இ(இ+1)\left\{இ^2+இ\right\}$$
$$=இ(இ+1)இ(இ+1)$$
$$=\left\{இ(இ+1)\right\}^2.$$
$$\therefore த_3=\left\{\frac{இ(இ+1)}{2}\right\}^2.$$

220. மேற் கூறியனவற்றைப் பயன்படுத்தும் முறைகளைச் சில உதாரணங்கள் பற்றி விளக்குவோம்.

உ—ம்.

1. $1+3அ+5அ^2+\ ...$ என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$த=1+3அ+5அ^2+\ ......(2இ-1)அ^{இ-1}$ ஆகுக.

$\therefore அத=அ+3அ^2+....(2இ-3)அ^{இ-1}+(2இ-1)அ^{இ}.$

கழித்தலால், $த(1-அ)=1+2அ+2அ^2+\ ...\ 2அ^{இ-1}-(2இ-1)அ^{இ}$

$$=1+\frac{2அ(1-அ^{இ-1})}{1-அ}-(2இ-1)அ^{இ}$$
$$\therefore த=\frac{1}{1-அ}+\frac{2அ(1-அ^{இ-1})}{(1-அ)^2}-\frac{(2இ-1)அ^{இ}}{1-அ}$$

உ—ம்.

2. $க<1$ எனின், $1+2க+3க^2+\ ...$ என்னுந் தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$த=1+2க+3க^2+\ ...$ முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்கள் வரைக்கும் ஆகுக.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

∴ $\text{கத} = \text{க} + 2\text{க}^2 + \ldots$ முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்கள் வரைக்கும்.

∴ $\text{த}(1 - \text{க}) = 1 + \text{க} + \text{க}^2 \ldots\ldots$ முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்கள் வரைக்கும்

$$= \frac{1}{1 - \text{க}}.$$

$$\therefore \text{த} = \frac{1}{(1 - \text{க})^2}.$$

உ—ம்.

3. $1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \ldots\ldots$ என்னுந் தொடரின் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

$$\text{த} = 1 - \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \frac{1}{5}\text{த} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + - \ldots\ldots$$

கூட்டுதலால், நாம் பெறுவது

$$\text{த}(1 + \frac{1}{5}) = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{1 - (-\frac{1}{5})}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}.$$

$$\therefore \text{த} \cdot \frac{6}{5} = \frac{5}{6}.$$

$$\therefore \text{த} = \frac{25}{36}.$$

உ—ம்.

4. $1.3 + 2.5 + 3.7 + \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை த ஆகுக.

தந்த தொடரின் க ஆம் உறுப்பு $\text{க}(2\text{க} + 1)$, அல்லது $2\text{க}^2 + \text{க}$ என்பது தெளிவு. $\text{உ}_{\text{இ}}$ என்பது இ ஆம் உறுப்பைக் குறிக்க. க இற்கு முறையே 1, 2, 3 . . . என்பனவற்றை $2\text{க}^2 + \text{க}$ என்பதிற் பிரதியிட நாம் பின்வருவனவற்றைப் பெறுவோம்:

$$\text{உ}_1 = 2.1^2 + 1.$$
$$\text{உ}_2 = 2.2^2 + 2.$$
$$\text{உ}_3 = 3.3^2 + 3.$$
— — —
— — —
$$\text{உ}_{\text{இ}} = 2 \cdot \text{இ}^2 + \text{இ}.$$

இவற்றைக் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$\text{த} = 2\text{த}_2 + \text{த}_1$$

$$= 2\frac{\text{இ}(\text{இ} + 1)(2\text{இ} + 1)}{6} + \frac{\text{இ}(\text{இ} + 1)}{2}$$

$$= \frac{2\text{இ}(\text{இ} + 1)(2\text{இ} + 1) + 3\text{இ}(\text{இ} + 1)}{6}$$

$$= \frac{\text{இ}(\text{இ} + 1)\left\{4\text{இ} + 2 + 3\right\}}{5}$$

$$= \frac{\text{இ}(\text{இ} + 1)(4\text{இ} + 5)}{6}.$$

பயிற்சி 28 (ஊ)

பின்வருந் தொடர் ஒவ்வொன்றிலும் இ ஆம் உறுப்பையும் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையையுங் காண்க:

1. 2, 3, 5, 9; . . . .
2. 3, 7, 15, 31, ...
3. 5, 11, 29, 83, ...
4. −3, −1, 5, 23, ...
5. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots$
6. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots\ldots$
7. $1.3 + 3.7 + 5.11 + \ldots\ldots$

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

8. $1.4+2.6+3.8+ \ldots$
9. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+ \ldots$
10. $1.3.5+3.5.7+5.7.9+ \ldots$

மேல்வருந் தொடர் ஒவ்வொன்றிலும் முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க:

11. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+ \ldots$

12. $1-\frac{3}{5}+\frac{5}{5^2}-\frac{7}{5^3}+ \ldots$

13. $1+4அ+7அ^2+10அ^3+ \ldots$, $அ<1$ எனின்.

பின்வருவன தம் இ ஆம் உறுப்புக்களாயுள்ள தொடர்களினுடைய இ உறுப்புக்களைக் கூட்டவருங் கூட்டுத் தொகைகளைக் காண்க:

14. $2இ-3$.
15. $\frac{இ}{2}+3$.
16. $2இ(இ-1)$.
17. $இ^2-2இ+3$.
18. $இ(இ-1)(இ+2)$.

19. $அ^2+(அ+1)^2+(அ+2)^2+ \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

20. $11^2+13^2+15^2+ \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய 20 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 9

(அ)

1. அ : இ $=11:3$ எனின், $அ-3இ : அ+3இ$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. இரு பாத்திரங்களிற் பாலும் நீருஞ் சேர்ந்த கலவைகள் உண்டு. பாலும் நீரும் முதற்பாத்திரத்தில் $2:3$ என்னும் விகிதத்திலும் இரண்டாம் பாத்திரத்தில் $4:5$ என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், ஒவ்வொரு பாத்திரத்திலும் எவ்வளவு கலன் கலவை எடுத்தால், 8 கலன் பாலும் 11 கலன் நீரும் பெறலாம்?

3. ந என்பது இருகணியங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமன்; அவற்றுள் ஒன்று க ஒடு நேராயும் மற்றையது க ஒடு நேர்மாறுயும் மாறுகின்றன. $க=2$ எனின், $ந=16$; $க=6$ எனின், $ந=32$; $க=8$ எனின், ந ஐக் காண்க.

4. 100 இற்கும் 300 இற்கும் இடையிலுள்ள எண்களுள் 8 ஆல் வகுக்கப்படும் எண்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

5. $அ<1$ எனின், $1+4அ+7அ^2+ \ldots$ என்னுந் தொடரின் முடிவிலித்தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ஆ)

1. இரண்டு எண்களின் வித்தியாசம் 4; அவற்றின் விகிதம் $3:2$; அவ்வெண்கள் யாவை?

2. $\frac{அ}{இ}=\frac{இ}{உ}=\frac{உ}{எ}$ எனின்,

$$(அஇ+இஉ+உஎ)^2=(அ^2+இ^2+உ^2)(இ^2+உ^2+எ^2)$$

என நிறுவுக.

3. ஒரு கோளத்தின் கனவளவு அதன் ஆரையின் கனத்தோடு மாறுகின்றது; $1\frac{1}{2}$ அடி, 2 அடி, $2\frac{1}{2}$ அடி என்னும் ஆரைகளையுடைய மூன்று உலோகக் கோளங்கள் உருக்கப்பட்டு ஒரு தனிக் கோளமாகச் செய்யப்பட்டன; இதன் ஆரையைக் காண்க.

4. கூ.வி. இலுள்ள ஒரு தொடரின் முதல் இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை $இ(இ-2)$. அவ்விருத்தியினுடைய முதலுறுப்பையும் பொது வித்தியாசத்தையுங் காண்க.

5. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+ \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(இ)

1. $\frac{3\text{க} - 2\text{ந}}{3\text{ந}} = \frac{\text{க} + \text{ந}}{2\text{க}}$ எனின், க : ந என்னும் விகிதத்தைக் காண்க.

2. அ : இ : : உ : எ எனின், அ: அ + உ = அ + இ : அ + இ + உ + எ என நிறுவுக.

3. ஓர் உருளையின் நிறை நீளம் மாருதிருக்க அதன் ஆரையின் வர்க்கத்தோடும், ஆரைமாருதிருக்க அதன் நீளத்தோடும் மாறுகின்றது. இரண்டு உருளைகளினுடைய நீளங்கள் 32 : 27 என்னும் விகிதத்திலும் நிறைகள் 2 : 3 என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், அவற்றின் ஆரைகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

4. 7 நேருறுப்புக்களையுடைய ஒரு பெ.வி. இன் கூட்டுத்தொகை 58. அதன் ஈற்றுறுப்பு நடு உறுப்பின் $\frac{1}{8}$ மடங்காயின், அதன் முதலுறுப்பைக் காண்க.

5. $1 + \frac{3}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^2} + \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ஈ)

1. அ : இ $= (\text{அ} + \text{க})^2 : (\text{இ} + \text{க})^2$ எனின், க ஐக் காண்க.

2. அ : இ : : உ : எ எனின்,
$(\text{அ}^2 + \text{உ}^2)(\text{இ}^2 + \text{எ}^2) = (\text{அஇ} + \text{உஎ})^2$ என நிறுவுக.

3. ந என்பது இருகணியங்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமன் ; அவற்றுள் ஒன்று மாறிலி ; மற்றையது க ஒடு மாறுகின்றது ; க $= 1\frac{1}{2}$ எனின், ந $= 1$; க $= 6$ எனின், ந $= 2\frac{1}{2}$: ந $= 1\frac{5}{6}$ எனின், க ஐக் காண்க.

4. கூ.வி. இலுள்ள 30 உறுப்புக்களின் கூட்டுத்தொகை 180 ; அவ்விருத்தியின் 15 ஆம் உறுப்புக்கும் 16 ஆம் உறுப்புக்கும் இடையிலுள்ள கூட்டலிடையைக் காண்க.

5. $21^2 + 22^2 + 23^2 + \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய முதல் 20 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(உ)

1. $\frac{\text{க}}{\text{ந}} = \frac{3}{4}$ எனின், $\frac{3\text{க} - 2\text{ந}}{7\text{க} + \text{ந}}$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

2. அ: இ : : உ: எ எனின், $\text{அ}^2\text{எ} - \text{இ}\text{உ}^2 = \text{அ}\text{உ}(\text{இ} - \text{எ}$ என நிறுவுக.

3. பாரமான ஒரு பொருள் ஓய்விலிருந்து விழுந்தூரம் நேரத்தின் வர்க்கத்தோடு மாறுகின்றது. ஒரு பொருள் 5 செக்கனில் 400 அடி விழுந்தால், 3600 அடி விழ எத்தனை செக்கன் எடுக்கும்?

4. இரண்டு நேரெண்களின் கூட்டலிடை அவ்வெண்களின் பெருக்கலிடையின் $\frac{5}{3}$ மடங்காயின், அவ்வெண்களின் விகிதத்தைக் காண்க.

5. தன் இ ஆம் உறுப்பு $6\text{இ}^2 - 2^{\text{இ}}$ ஆயுள்ள தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ஊ)

1. 8 கிலோமீற்றர் ஒரு யாருக்குச் சமனெனக் கொண்டு ஒரு மீற்றருக்கு ஒரு யார் என்ன விகிதமெனக் காண்க.

2. அ: இ : : உ: எ எனின்,
$(\text{அ} + \text{உ})^3 : (\text{இ} + \text{எ})^3 : : \text{அ}(\text{அ} - \text{உ})^2 : \text{இ}(\text{இ} - \text{எ})^2$ என நிறுவுக.

3. ந என்பது க ஒடு நேராயும், க என்பது ய இன் வர்க்கத்தொடு நேர் மாருயும் மாறினல், ந என்பது ய இன் வர்க்கத்தோடு நேர்மாருய் மாறுமென நிறுவுக.

4, தங் கூட்டலிடை 40 ஆயும் பெருக்கலிடை 24 ஆயுமுள்ள இரண்டு எண்களைக் காண்க.

5. $\frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} - \frac{4}{4^4} + \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய முடிவிலித் தொகை உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

(எ)

1. இரண்டு எண்கள் 6: 7 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன; ஒவ்வொன்றுக்கும் 3 ஐக் கூட்டினுல், அவை 7: 8 என்னும் விகிதத்தில் இருக்கும்; ஆயின், அவ்வெண்களைக் காண்க.

2. $2க - 4 : 3க + 2 = க - 2 : 2க + 5$. இச்சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

3. ஒரு வாயுத்திணிவின் கனவளவு அதன் தனிவெப்பநிலையொடு நேராயும் அதன் அமுக்கத்தோடு நேர்மாருயும் மாறுகின்றது. அமுக்கம் 320 இரசவங்குலமாயும், தனி வெப்பநிலை 120 ஆயும் இருக்க, அதன் கனவளவு 12 கனவங்குலம்; தனி வெப்பநிலை 160 ஆயும், கனவளவு 8 கனவங்குலமாயும் இருந்தால், அதன் அமுக்கத்தைக் காண்க.

4. 126 அங்குல நீளமுள்ள ஒரு கம்பி தம்முடைய நீளங்கள் கூ.வி. இல் இருக்குந் துண்டுகளாக வெட்டப்படுகின்றது. மிகச் சிறிய துண்டு 6 அங். ஆயும் மிகப் பெரியதுண்டு 22 அங்குலமாயும் இருந்தால், அத்துண்டுகளினது தொகையைக் காண்க.

5. 5, 10, 19, 36 . . . என்னுந் தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ஏ)

1. 2 : 3 என்னும் விகிதத்திலுள்ள இரண்டு எண்களின் கூட்டுத் தொகைக்கு அவற்றின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 5 : 26 என்னும் விகிதத்தில் இருந்தால், அவ்வெண்களைக் காண்க.

2. க: ந = அ: இ எனின், $\frac{க^3}{ந} + \frac{ந^3}{க} : \frac{அ^3}{இ} + \frac{இ^3}{அ} = கந : அஇ$ என நிறுவுக.

3. ஒரு கொண்டாட்டத்தின் செலவுகளின் ஒரு பகுதி மாருதிருக்க மற்றைப் பகுதி வந்த விருந்தினரினுடைய தொகைக்கு விகிதசமம். 60 விருந்தினரின் செலவு 50 ரூபா ஆயும், 90 விருந்தினரின் செலவு 60 ரூபா ஆயுமிருந்தால், 120 விருந்தினரின் செலவைக் காண்க.

4. ஒரு பெ.வி. இன் இரண்டாம் உறுப்பு 9 ஆயும், முதன் மூன்று உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகை 39 ஆயும் இருந்தால், முதல் 5 உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

5. $2 - 4 + 6 - 8 + 10 - \ldots$ என்னுந் தொடரினுடைய 2இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

(ஐ)

1. $2க - 3 : 3ந + 2 = ந + 2 : 5க + 3ந + 1 = 3 : 14$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து க, ந என்பனவற்றைக் காண்க.

2. $2க - 3ந + ய = 4$, $3க + 2ந - ய = 5$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளிலிருந்து க: ந: ய என்னும் விகிதங்களைக் காண்க.

3. ஒரு கோளத்தின் நிறை அதன் ஆரையின் கனத்தோடும், அதன் திரவியத்தின் அடர்த்தியோடும் மாறுகின்றது. இரு கோளங்களினுடைய ஆரைகள் 2: 3 என்னும் விகிதத்திலும், அடர்த்திகள் 3 : 4 என்னும் விகிதத்திலும் இருந்தால், அவற்றினுடைய நிறைகளின் விகிதத்தைக் காண்க.

4. முதலுறுப்பு 2 ஆயுள்ள ஒரு கூ.வி. இன் மூன்று உறுப்புக்களோடு முறையை 2, 1, 4 என்பனவற்றைக் கூட்டினுல், பெ.வி. உள்ள மூன்று உறுப்புக்கள் பெறப்படும். அக் கூட்டல் விருத்தியின் பொது வித்தியாசத்தையும் அப் பெருக்கல் விருத்தியின் பொது விகிதத்தையுங் காண்க.

5. தன் இ ஆம் உறுப்பு $இ(இ+1)(இ+2)$ ஆயுள்ள ஒரு தொடரினுடைய இ உறுப்புக்களின் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	3	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	55 2	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5 02	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	5933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

விடைகள்

பயிற்சி 15 (அ). பக்கம் 224.

1. $அ^2இ^2$. 2. $2அ^2$. 3. $2க^3ந^5$. 4. $4க^4ந^4$.
5. $2க^2ந$. 6. 4. 7. பமவ. 8. பமவ. 9. $2க^2ந^2ய^2$.
10. $6க^3ந^3ய^3$. 11. $அ - இ$. 12. $கந(க + ந)$.
13. $கந(க - ந)$. 14. $4கநய(க + ந - ய)$. 15. $6அஇ(க - 1)$.
16. $9அ^2இ^2(க - அ)$. 17. $4(3க - 2)$. 18. $5(க + 1)(க + 2)$.
19. $2(க + 2)^2$. 20. $3(1 - க)^2$. 21. $(க + 2)$. 22. $4க^2$.
23. $(3க + 1)^2$. 24. $5(1 - க)^2$.

பயிற்சி 15 (ஆ). பக்கம் 230.

1. $க + 1$. 2. $க + 2$. 3. $அ - 2$. 4. $அ^2(அ + இ)$.
5. —. 6. $க - 1$. 7. $க - 1$. 8. $2க - 3$. 9. $3க - 4ந$.
10. $6க - ந$. 11. $4அ - இ$. 12. $அ - 1$. 13. —.
14. $க(க - 1)$. 15. $2க - 3$. 16. $3க - 4ந$. 17. $1 + 3க$.
18. $3அ$. 19. $க + 3$. 20. $க - 1$. 21. $4க^2 - 4க + 1$.
22. —. 23. $4க^2 - 2க + 1$. 24. —. 25. $க - 1$.
26. $8க^3 - 12க^2 - 26க + 15$. 27. $க + 1$. 28. $1 - 2க - க^2$.
29. $2க^2 - 3க + 2$. 30. $க^2 - க - 1$.

பயிற்சி 15 (இ). பக்கம் 233.

1. $அ^3இ^3உ^3$. 2. $96அ^4இ^4உ^3$. 3. $24அ^2இ^2உ^2$
4. $க(க^2 - 1)(க^2 + க + 1)$. 5. $க(க + 1)^2(க^2 - க + 1)$.
6. $(க + 1)(க - 2)(2க - 1)$. 7. $க(2க - 3)(9க^2 - 4)$.
8. $(5க - 1)(2க + 3)(2க + 5)$. 9. $(8க + 1)(க - 2)(2க - 1)$.
10. $(க - 1)(4க + 1)(க^2 + க + 1)$. 11. $க^6 + ந^6$.
12. $(க - 1)(2க^2 + 2க - 1)(3க^2 - 2க - 2)$.
13. $(2க - 1)(4க^2 + 2க - 1)(4க^2 - 6க - 3)$.
14. $(க - 1)(2க + 1)(2க - 3)(க + 1)^2$.
15. $(க - 1)(2க - 1)(2க^2 + க - 2)$.
16. $(9க^2 - 1)(4க^2 + 4க - 3)$. 17. $(2க - 1)(3க + 1)(3க - 1)^2$.
18. $1 - க^6$. 19. $(க^6 - ந^6)$ 20. $(2க - 1)(8க^3 - 1)$.
21. $(க - 1)(3க - 1)(2க + 1)(9க^2 - 7க + 2)$.
22. $(2க + 5)(5க - 2)(3க - 2)(4க - 1)$.
23. $(2க + 3)(3க - 2)(4க^2 - 9)$. 24. $36க^4 - 97க^2 + 36$.

பயிற்சி 16 (அ). பக்கம் 238.

1. $\frac{6அ - 4இ + 3உ}{12}$. 2. $\frac{2இஉ + 3உஅ - 4அஇ}{அஇஉ}$.
3. $\frac{6உ - 4அ - 3இ}{12அஇஉ}$. 4. $\frac{4அ^2 - 3இ^2 + 2உ^2}{12அஇஉ}$.
5. $\frac{4அக - 2இந + உய}{8அஇஉ}$. 6. $\frac{8அ^2நய - 6இ^2யக - 3உ^2கந}{24அஇஉகநய}$.
7. $\frac{அ - இ}{அ}$. 8. $\frac{அ + இ}{இ}$. 9. $\frac{க(ந + 1)}{ந}$. 10. $\frac{3ந - க}{ந}$.
11. $\left(\frac{க + ந}{ந}\right)^2$. 12. $\left(\frac{க - ந}{ந}\right)^2$. 13. $\frac{க}{க + அ}$.
14. $\frac{க}{க - அ}$. 15. $\frac{2க}{க^2 - அ^2}$. 16. $\frac{2க}{அ^2 - க^2}$. 17. $\frac{க}{க - 1}$.
18. $\frac{1}{(க - 1)^2}$. 19. $\frac{க}{(க + 2)^2}$. 20. $\frac{4கந}{(க^2 - ந^2)^2}$.
21. $\frac{2ந^2}{(க + ந)(க - ந)^2}$. 22. 0. 23. $\frac{1}{(க - 1)(க^3 + 1)}$.
24. $\frac{1}{6(1 + 3க)}$. 25. $\frac{17க}{9க^2 - 1}$. 26. $\frac{3}{2(1 - 4க^2)}$. 27. $\frac{1}{3}$.
28. $\frac{5(4க^2 - 28க + 5)}{2(2க + 5)(2க - 5)^2}$. 29. $-\frac{4க - 5ந}{கந(க - ந)}$. 30. $\frac{க^3}{(க - ந)^3}$.
31. $\frac{4அ^3}{க^4 - அ^4}$. 32. $\frac{2}{1 - க^4}$. 33. $\frac{ந^2}{(1 - ந)(1 + ந^3)}$.
34. $\frac{4}{ந^4 - 1}$. 35. $\frac{6(2 - க^2)}{(1 - க^2)(4 - க^2)}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

36. $-\frac{18க}{(9க^2-1)(9க^2-4)}$. 37. $-\frac{2அ(2அ^2-13)}{(அ^2-4)(அ^2-9)}$.

38. $\frac{120}{(9க^2-1)(9க^2-16)}$. 39. 0. 40. $\frac{1}{அ+2}$.

41. $\frac{க(1+2க)}{(1-க)^2(1-க^3)}$. 42. $\frac{8க^3}{(4க^2-1)(4க^2-2க+1)}$.

பயிற்சி 16 (ஆ). பக்கம் 243.

1. 0. 2. 1. 3. $-\frac{க^2+ந^2+ய^2-கந-நய-யக}{(க-ந)(ந-ய)(ய-க)}$.

4. $\frac{2(க^2+ந^2+ய^2-கந-நய-யக)}{(க-ந)(ந-ய)(ய-க)}$ 5. 0. 6. 0.

7. 0. 8. 0. 9. −1. 10. 0.

11. $-\frac{3}{(க-3)(க-4)(க-5)}$. 12. $\frac{2}{(க-2)(க-3)(க-4)}$.

13. $\frac{19}{(க-2)(க-3)(க-4)}$. 14. $-\frac{6}{(2க-1)(2க-3)(2க-5)}$.

15. $-\frac{1}{(2க-1)(3க+1)(5க-1)}$. 16. $-\frac{4}{(1-2க)(2+3க)}$.

பயிற்சி 16 (இ). பக்கம் 246.

1. அகந. 2. $\frac{1}{2அகந}$. 3. 9க. 4. $\frac{2இ}{3அந}$. 5. $\frac{1}{3}$.

6. $\frac{க}{அ}$. 7. 1. 8. $\frac{1}{ம^3}$. 9. $\frac{அ^3உ}{இக^2}$. 10. $\frac{1}{க^3}$

11. $\frac{1}{2க+3ந}$. 12. 1. 13. $\frac{1}{(3க-1)^2}$. 14. $\frac{1}{3க-2}$.

15. $\frac{1}{1+2க}$. 16. $\frac{1}{1+2க}$. 17. 1. 18. $\frac{க}{க-1}$. 19. 1.

20. $\frac{1}{(அ+3)^2}$. 21. $\frac{4அ^2-2அ+1}{(2அ+1)^2}$. 22. $\frac{1}{க+1}$. 23. 1.

24. 1. 25. $\frac{1}{1-க}$. 26. 1. 27. 1. 28. $\frac{1}{அ}$.

பயிற்சி 16 (ஈ). பக்கம் 252.

1. $\frac{அ}{அ-1}$. 2. 2. 3. $\frac{க-1}{க+1}$. 4. $\frac{அக-இந}{அக+இந}$.

5. $\frac{5(4+க)}{4(5-க)}$. 6. $\frac{4க+1}{3க+1}$. 7. $\frac{அ(2அ+1)}{அ+1}$. 8. $-\frac{அ}{அ-1}$.

9. $-\frac{அ}{அ^2-1}$. 10. 2. 11. $\frac{4}{16க^4-1}$. 12. $-\frac{48க}{(9க^2-4)^2}$.

13. $-\frac{256}{க^8-256}$. 14. $\frac{க^2-12}{(க-4)^2(க-3)^2}$. 15. $-\frac{அ}{இக}$.

16. $\frac{ய(க-ந+ய)}{க(க+ந+ய)}$. 17. $\frac{10அ^2}{(4அ^2-1)(9அ^2-1)}$.

18. $-\frac{200க^2}{(25க^2-4)^2}$. 19. 1. 20. $\frac{2}{(க-1)(க-2)(க-3)}$.

21. $\frac{அ^2+3இ^2}{அ+2இ}$. 22. $\frac{1}{க+ந}$. 23. $\frac{6}{(க-1)(க-2)(க-3)(க-4)}$.

24. 1. 25. $\frac{1}{அஇஉ}$. 26. 1.

பயிற்சி 17 (அ). பக்கம் 260.

1. $-\frac{1}{16}$. 2. −13. 3. $-\frac{1}{6}$. 4. $-1\frac{3}{4}$. 5. $2\frac{1}{3}$.

6. $-\frac{1}{9}$. 7. 6. 8. −2. 9. $2\frac{2}{11}$. 10. $\frac{6}{13}$. 11. $2\frac{1}{2}$.

12. $-5\frac{1}{2}$. 13. $2\frac{7}{10}$. 14. 3. 15. $6\frac{1}{2}$. 16. $-5\frac{1}{2}$.

17. 9. 18. $2\frac{1}{6}$. 19. $\frac{3}{4}$. 20. $-1\frac{1}{6}$. 21. 3. 22. $-2\frac{1}{6}$.

பயிற்சி 17 (ஆ). பக்கம் 264.

1. அ + இ. 2. அ. 3. −(அ − 2இ) 4. $\frac{உஅ}{இ}$

5. $\frac{3அ^2+2இ^2}{2அ}$. 6. $-\frac{அ}{அ+இ}$. 7. $\frac{அஇஉ}{அ+இ+உ}$

8. $\frac{அ^2+இ^2}{அ+இ}$. 9. அ − இ. 10. இ. 11. $\frac{1}{அ+இ}$. 12. இ.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. $\frac{\text{அ}^2+\text{இ}^2}{\text{அ}+\text{இ}}$. 14. $-(\text{அ}+\text{இ})$. 15. $\frac{\text{இ}(\text{அ}+\text{இ})}{\text{அ}(\text{அ}-\text{இ})}$. 16. 0.
17. 6அ. 18. $2\frac{1}{2}\text{அ}$. 19. -3அ. 20. -4அ.
21. $\text{க}=\frac{\text{அ}^2+\text{அஇ}+\text{இ}^2}{\text{அ}+\text{இ}}$, $\text{ந}=\frac{\text{அஇ}}{\text{அ}+\text{இ}}$. 22. $\text{க}=\frac{\text{ப}+\text{ம}}{2\text{அ}}$,
$\text{ந}=-\frac{\text{ப}-\text{ம}}{2\text{இ}}$.
23. $\text{க}=\frac{\text{ப}^2-\text{ம}^2}{\text{அப}-\text{இம}}$, $\text{ந}=\frac{\text{ப}^2-\text{ம}^2}{\text{இப}-\text{அம}}$. 24. $\text{க}=\frac{\text{அஇ}}{\text{அ}+\text{இ}}$,
$\text{ந}=\frac{\text{அஇ}}{\text{அ}+\text{இ}}$.
25. $\text{க}=\frac{\text{அ}^2-\text{இ}^2}{\text{அ}-2\text{இ}}$, $\text{ந}=\frac{\text{அ}^2-\text{இ}^2}{2\text{அ}-\text{இ}}$. 26. $\text{க}=2\text{அ}+\text{இ}$, $\text{ந}=\frac{3\text{அ}-\text{இ}}{2}$.
27. $\text{க}=\frac{\text{அ}+3\text{இ}}{8}$, $\text{ந}=-\frac{\text{அ}-3\text{இ}}{4}$. 28. $\text{க}=-\frac{\text{அ}^3(\text{அ}-\text{இ})}{\text{இ}(2\text{அ}-\text{இ})}$.
$\text{ந}=\frac{\text{அ}(\text{அ}-\text{இ})(\text{அ}^2-\text{அஇ}+\text{இ}^2)}{2\text{அ}^2-2\text{அஇ}+\text{இ}^2}$.

பயிற்சி 17 (இ). பக்கம் 269.

1. 40 மைல். 2. 240 யார். 3. மணிக்கு $4\frac{1}{2}$ மைல். 4. 16.
5. 650 ரூபா. 6. 105 மைல், மணிக்கு 3 மைல்.
7. 1200 ரூபா. 8. 390 ரூபா, 450 ரூபா. 9. 35 அடி.
10. 18 அடி, 8 அடி. 11. 80. 12. 80; 18 ரூபா.
13. 35 நிமிடம். 14. மு.ப. 9 மணி 48 நிமிடம்.
15. 66 அடி.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 6. பக்கம் 272.

அ. 1. $\text{க}-1$. 2. $\text{க}^2(\text{க}+1)(\text{க}^2-4)(\text{க}^4+2\text{க}^2+4)$.
3. $\frac{2\text{அ}^2-3\text{இ}^2}{(3\text{அ}+\text{இ})(\text{அ}^2-4\text{இ}^2)}$. 4. $\frac{\text{அஇ}}{\text{அ}+\text{இ}}$. 5. மணிக்கு 20 மைல்.

ஆ. 1. $\text{க}-2$. 2. $(4\text{க}^2-9)(4\text{க}^2-4\text{க}+3)$.
3. $\frac{\text{அ}^2+4\text{அ}-37}{(\text{அ}+1)(\text{அ}^2-9)}$. 4. அ. 5. மணிக்கு $3\frac{3}{4}$ மைல்.

இ. 1. $1-4\text{க}^2$; $(1+5\text{க})(1+6\text{க})(1-4\text{க}^2)$. 2. $\frac{2\text{க}}{\text{க}^6-1}$.
3. $-(\text{அ}+\text{இ})$. 4. $\text{க}=\frac{\text{அ}+\text{இ}}{4\text{உ}}$, $\text{ந}=\frac{\text{அ}-\text{இ}}{6\text{உ}}$.
5. 40 அடி, 30 அடி.

ஈ. 2. $\text{அ}^3\text{இ}^3(\text{அ}+\text{இ})(\text{அ}-\text{இ})^3(\text{அ}^2+\text{இ}^2)(\text{அ}^2+\text{அஇ}+\text{இ}^2)$.
3. 0. 4. $\frac{3}{10}$. 5. 72 அடி, 50 அடி.

உ. 1. $\text{ந}=\frac{\text{ய}(1+\text{க})}{(1-\text{க})}$. 2. $\frac{8}{256\text{அ}^8-1}$. 3. $\text{க}-2$. 4. -6.
5. 192 யார்.

ஊ. 1. $\text{வ}=-\frac{\text{கப}}{\text{க}-\text{ப}}$. 2. $2\text{க}+1$. 3. $-\frac{10\text{க}}{(\text{க}^2-4)(\text{க}^2-9)}$
4. $\text{க}=\frac{\text{அ}+\text{இ}+1}{\text{அ}+\text{இ}}$, $\text{ந}=\frac{\text{அ}+\text{இ}+1}{\text{அ}+\text{இ}}$ 5. 360.

எ. 1. $-\frac{2(\text{அ}^2-3\text{அஇ}+\text{இ}^2)}{(\text{அ}+\text{இ})(3\text{அ}-\text{இ})}$. 2. $2\text{க}^2-\text{க}-6$.
3. $\frac{\text{க}+1}{\text{க}^2(\text{க}-1)}$. 4. -5. 5. 50 நிமிடம்.

ஏ. 1. $\frac{2\text{அ}^2(\text{அ}^2+\text{இ}^2)}{(\text{அ}^2-\text{இ}^2)^2}$.
2. $\text{க}-3$; $(\text{க}-3)(\text{க}^2-1)(2\text{க}-1)(3\text{க}-1)$.
3. $\frac{4}{(9\text{க}^2-1)^2}$. 4. $1\frac{1}{2}$. 5. மணிக்கு $1\frac{1}{2}$ மைல்.

ஐ. 1. $\text{இ}^2+5\text{இ}+4$. 2. $\text{க}+1$. 3. 0. 4. $3\frac{1}{2}\text{அ}$.
5. 12 மணி, $32\frac{8}{11}$ நிமிடம்.

பயிற்சி 18 (அ). பக்கம் 279.

1. 3; 3; 1. 2. 8; −6; −12. 3. $\text{அ}-\text{இ}+\text{உ}$; உ; $\text{அப}^2+\text{இப}+\text{உ}$. 4. 385. 5. $\text{இ}+1$. 6. 2இக; -2உ; $-(5\text{அ}+7\text{இ}+\text{உ})$. 7. $\text{பஅ}^2+\text{மஅ}+\text{வ}$; $\text{பஅ}^2-\text{மஅ}+\text{வ}$; வ.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 18 (ஆ). பக்கம் 283.

1. 4. 2. 0. 3. 67. 4. 103. 5. $\frac{1}{4}$. 6. $-1\frac{1}{3}$.
15. ப $= -24\frac{1}{2}$, ம $= 15$. 16. அ $= 5$, இ $= -6$.
17. அ $= -31$, இ $= 36$. 20. க $-$ ந, ந $-$ ய, ய $-$ க.
21. அ $-$ இ, இ $-$ உ, உ $-$ அ. 23. $(\text{க}-1)(\text{க}-2)(\text{க}+3)$.
24. $(\text{க}-2)(\text{க}+2)(\text{க}+4)$ 25. $(2\text{க}-1)(2\text{க}+1)(3\text{க}+5)$.
26. $(2\text{க}+1)(3\text{க}-1)(5\text{க}-1)$. 27. $(\text{க}-2)(2\text{க}+1)(2\text{க}+3)$.
28. $(2\text{க}+\text{ந})(3\text{க}-\text{ந})(4\text{க}-\text{ந})$. 29. $(\text{க}+\text{ந})(\text{க}-3\text{ந})(\text{க}^2+3\text{ந}^2)$.
30. $(2\text{க}-\text{ந})(2\text{க}+\text{ந})(3\text{க}-\text{ந})(3\text{க}+\text{ந})$.
31. $-(\text{அ}-\text{இ})(\text{இ}-\text{உ})(\text{உ}-\text{அ})$. 32. $(\text{அ}-\text{இ})(\text{இ}-\text{உ})(\text{உ}-\text{அ})$.
33. $-(\text{க}-\text{ந})(\text{ந}-\text{ய})(\text{ய}-\text{க})$. 34. $(\text{க}+\text{ந})(\text{ந}+\text{ய})(\text{ய}+\text{க})$.
35. $3(\text{அ}-\text{இ})(\text{இ}-\text{உ})(\text{உ}-\text{அ})$.

பயிற்சி 19. (அ) பக்கம் 288.

1. 2, 3. 2. -3, -4. 3. -5, 6. 4. 4, -7.
5. 1, -1. 6. 1, 3. 7. $-\frac{1}{2}$, 3. 8. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$. 9. $1\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$.
10. $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{3}$. 11. $1\frac{1}{3}$, $-1\frac{2}{3}$. 12. $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$. 13. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$.
14. $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$. 15. -6, $-\frac{5}{6}$. 16. 6, $1\frac{1}{6}$. 17. அ, அ -1.
18. $-$அ, அ $+1$. 19. $\frac{\text{இ}}{\text{அ}}$, $-\frac{\text{இ}(\text{அ}-1)}{\text{அ}}$.
20. $-\frac{\text{இ}}{\text{அ}}$, $\frac{\text{இ}(\text{அ}+1)}{\text{அ}}$. 21. 3, 5. 22. -5, -9.
23. -2, 3. 24. -7, 9. 25. 1, $2\frac{1}{2}$. 26. 1, $-2\frac{1}{2}$.
27. $-\frac{2}{5}$, $-2\frac{1}{2}$. 28. $\frac{2}{7}$, $-3\frac{1}{2}$. 29. $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{3}$. 30. $\frac{3}{4}$, $-1\frac{1}{3}$.
31. $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{5}$. 32. $\frac{3}{5}$, $-\frac{2}{5}$. 33. $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{7}$. 34. $-\frac{2}{5}$, $-\frac{2}{5}$.
35. 1, $1\frac{1}{6}$. 36. $\frac{9}{10}$, -1. 37. $1\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{2}$. 38. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$.
39. $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{4}$. 40. $\frac{4}{5}$, $-\frac{1}{6}$. 41. $\frac{1}{2}$, 0. 42. $-\frac{1}{4}$, $-1\frac{1}{3}$.
43. $-\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$. 44. $\frac{7}{9}$, $-1\frac{1}{12}$. 45. $\frac{1}{3}$, 0. 46. 2, $-1\frac{1}{4}$.
47. 3, $-$அ. 48. 3. 49. அ, அ -1. 50. அ, $-(\text{அ}-1)$.

பயிற்சி 19 (ஆ). பக்கம் 292.

1. 8, 12. 2. 16, -5. 3. 12, -11. 4. 12, -6.
5. $5\frac{1}{2}$, -10. 6. $4\frac{1}{3}$, -12. 7. $\frac{2}{5}$, $-1\frac{1}{6}$. 8. $\frac{6}{7}$, $-1\frac{1}{6}$.
9. $\frac{2}{9}$, $-\frac{1}{3}$. 10. $\frac{5}{9}$, $-\frac{1}{3}$. 11. $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{6}$. 12. $\frac{3}{5}$, $-1\frac{1}{2}$.
13. $1\frac{2}{3}$, $1\frac{2}{3}$. 14. -4, $-5\frac{1}{2}$. 15. 2, $-1\frac{2}{3}$. 16. $\frac{2}{3}$, -1.
17. $1\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{3}$. 18. $1\frac{6}{7}$, $-\frac{2}{7}$. 19. $\frac{1}{12}$, -3.
20. $1\frac{1}{5}$, -1. 21. $\frac{19}{36}$, $-\frac{1}{2}$. 22. 8, -1. 23. -1, -30.
24. 4, -2. 25. அ, 2அ. 26. 2அ, $-$அ. 27. ·62, -1·62.
28. ·69, -2·19. 29. 1·15, $-$·65. 30. 5·16, -1·16.
31. ·56, $-$·36. 32. ·61, $-$·28. 33. ·65, $-$·22.
34. 2·08, $-$·48. 35. 1·44, $-$·69. 36. 3·79, $-$·79.
37. 1·42, $-$·59. 38. 2·24, $-$·07. 39. 1·28, $-$·78.
40. 1·18, $-$·85. 41. ·46, -1·46. 42. 1·57, $-$·74.

பயிற்சி 19 (இ). பக்கம் 296.

1. $\frac{2}{3}$, $-1\frac{3}{4}$. 2. $-\frac{1}{5}$, $-1\frac{3}{4}$. 3. 3, $-\frac{1}{5}$. 4. $1\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{5}$.
5. $-\frac{2}{5}$, $-1\frac{1}{2}$. 6. 9, -8. 7. $\frac{2}{5}$, $-2\frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{4}$, $-\frac{4}{5}$.
9. $1\frac{1}{10}$, $-\frac{10}{11}$. 10. $1\frac{1}{6}$, $-\frac{6}{7}$. 11. 13, -12.
12. $4\frac{1}{2}$, -4. 13. $2\frac{2}{3}$, $-2\frac{1}{3}$. 14. $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$. 15. $\frac{1}{4}$, -1.
16. $\frac{3}{8}$, -2. 17. 1·62, $-$·62. 18. ·56, -3·56.
19. ·43, $-$·23. 20. 1·15, $-$·35. 21. 2·14, $-$·47.
22. 3·71, -1·21. 23. 1·87, $-$·54. 24. 1·80, $-$·55.
25. ·94, $-$·36. 26. ·56, $-$·15. 27. 1·70, $-$·70.
28. 1·68, $-$·68. 29. 1·61, $-$·86. 30. 1·92, $-$·92.

பயிற்சி 19 (ஈ). பக்கம் 299.

1. 0, 1, -2. 2. 2, 4, -3. 3. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$.
4. $1\frac{1}{2}$, 5, $-\frac{2}{3}$. 5. 0, -2, -3. 6. 0, 1, -1.
7. 3, -2, -4. 8. $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$. 9. 3, 5, -3, -5.
10. 1, 3, -1, -3. 11. 3, 4, -3, -4. 12. 1, 4, -1, -4.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

13. $\frac{1}{4}$, 4, $-\frac{1}{4}$, −4. 14. $\frac{1}{2}$, 2, $-\frac{1}{2}$, −2. 15. $\frac{1}{3}$, 3, $-\frac{1}{3}$, −3.
16. $\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{1}{2}$, −1. 17. 1, −1, அ, −அ. 18. அ, −அ, இ, −இ.
19. 3, 4, −4, −5. 20. 3, 4, −2, −3. 21. 1, −1, 3, −3.
22. 1, −1, 2, −2. 23. 1, −1, 4, 6. 24. 6, 7, −1, −2.
25. அ, 2அ, 5அ, −2அ. 26. அ, 3அ, −4அ, −6அ.

பயிற்சி 20 (அ). பக்கம் 302.

1. 3, 6. 2. 21. 3. 20, 21. 4. 21, 23. 5. 11, 13.
6. 12, 10. 7. 12. 8. 93. 9. 32 யார், 24 யார்.
10. 48 யார், 32 யார். 11. 6 அடி. 12. 12 அடி, 9 அடி.
13. 8 அங். 6 அங். 14. 20 த.மீ. 15. 3·09 அங்., 1·91 அங்.
16. 10·68 அங்., 1·32 அங். 17. 19·63 அடி.
18. முதல் 20 இயற்கையெண். 19. 1$\frac{1}{2}$ செக்கன்.
20. 23. 21. 25, 24.

பயிற்சி 20 (ஆ). பக்கம் 308.

1. 8. 2. 30. 3. 20 ரூபா. 4. 20 ரூபா அல்லது 80 ரூபா.
5. 6 ரூபா. 6. 15 நிமிடம், 12 நிமிடம். 7. 12 நிமிடம்.
8. மணிக்கு 8 மைல். 9. மணிக்கு 5 மைல்.
10. 240 நாள்கள். 11. மணிக்கு 5 மைல்.
12. மணிக்கு 2 மைல், அல்லது மணிக்கு 4$\frac{1}{2}$ மைல்.
13. மணிக்கு 7$\frac{1}{2}$ மைல். 14. 6 அடி. 15. 64 அடி, 20 அடி.
16. 900 ரூபா. 17. 1200 ரூபா. 18. 75 ரூபா.
19. 75 ரூபா. 20. 93 ஆண்டு.

பயிற்சி 21 (அ). பக்கம் 320.

1. 2·65. 2. 1·69. 3. 1·43. 4. ·72. 5. 1$\frac{1}{2}$, −3.
6. 2, −1$\frac{1}{2}$. 7. $\frac{2}{3}$, −1$\frac{1}{4}$. 8. $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$. 9. 2, $-\frac{3}{4}$.
10. 1$\frac{2}{3}$, −1$\frac{1}{2}$. 11. 2·15, −·15. 12. 1·30, −2·30.
13. 1·67, −1·33. 14. 1·79, −1·12. 15. 1·24, −3·24.
16. ·79, −3·79. 17. 2·32, −·52. 18. 1·19, −·19.
19. 4·33, 2·33. 20. ·88, −1·88.

பயிற்சி 21 (ஆ). பக்கம் 329.

1. 6·25 ; (1·5, 6·25). 2. ·88 ; (−·75, ·88).
3. 1·5. 4. −·5. 5. 6·02. 6. க=$-\frac{1}{2}$, க=$\frac{3}{5}$.
9. −2·25. 10. −3. 11. −5. 12. −1 ; ·25, −1.
13. 1·5, −·6 ; −1. 14. −3·06 ; −3·8. 15. −·25.
16. க=−1·87, க=·54 ; 4·33.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 7. பக்கம் 331.

அ. 1. −25 ; 1 ; 2அ^3 − 3அ^2 − அ + 1.
2. (க−3)(க+2)(2க+1). 3. 1$\frac{1}{3}$, $-\frac{3}{4}$. 4. 16.
5. ·67, −1·33.

ஆ. 2. (க−2)(க+1)(3க+2). 3. $-\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$. 4. 7 ரூபா.
5. ·67, −1·67.

இ. 1. 225. 2. (2க−1)(2க+1)(3க+4). 3. ·42, ·22.
4. 60 அடி, 40 அடி. 5. ·30, −3·30.

ஈ. 1. −1. 2. (க+1)(க^2−4க+8). 3. 1·13, −·30.
4. மணிக்கு 6 மைல். 5. ·5, −1.

உ. 1. 76. 2. (க−1)(க^2+7க+14) 3. ·43, −1·93.
4. 4·69 அங், 27·31 அங். 5. 16·33.

ஊ. 3. 1$\frac{1}{3}$, −2. 4. 12 நிமிடம். 5. 4.

எ. 3. 3அ, 4அ, −அ, −2அ. 4. 4800 ரூபா.
5. ·96; 1.

ஏ. 1. 8. 2. 3(அ+இ)(இ+உ)(உ+அ).
3. 3அ, −3அ, $\frac{அ}{3}$, $-\frac{அ}{3}$. 4. மணிக்கு 1$\frac{1}{2}$ மைல்.
5. −5; ·6, −·8

ஐ. 1. அ=$\frac{1}{4}$, இ=−16$\frac{1}{2}$. 3. அ, அ, 3அ, −அ. 4. 75 ரூபா.
5. 36; க=−2·33, க=1·67.

பயிற்சி 22 (அ). பக்கம் 342.

1. (i). அ$^{\frac{5}{6}}$. (ii). இ$^{-\frac{1}{12}}$. (iii). க. (iv). ந$^{\frac{1}{10}}$.
2. (i). 2. (ii). 3. (iii). 2. (iv). −6.
3. (i). அ$^{\frac{3}{2}}$. (ii). −2இ$^{\frac{2}{3}}$. (iii) 2க$^{\frac{1}{2}}$. (iv). −4ந$^{-\frac{4}{3}}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

4. (i). $\sqrt[3]{\text{அ}^2}$. (ii). $\sqrt[4]{\text{இ}^{-3}}$. (iii). $\sqrt[5]{\text{ப}^4}$. (iv). $\sqrt[6]{\text{ம}^{-5}}$.

7. $\frac{3}{\text{அ}^{\frac{1}{3}}}$. 8. $\frac{4}{\text{அ}^{\frac{3}{4}}}$. 9. $\frac{2\,\text{இ}^3}{\text{அ}^2}$. 10. $\frac{5}{\text{அ}^3\text{இ}^4}$ 11. $\frac{1}{5}\text{க}^2$.

12. $\frac{1}{6}\text{க}^{-\frac{1}{3}}$. 13. $\frac{3\,\text{இ}^3\text{ந}^3}{4\,\text{அ}^2\text{க}^2}$. 14. $\frac{3\,\text{இ}^3\text{க}^3}{7\,\text{அ}^2\text{ந}^2}$. 15. $\frac{15\,\text{க}^{\frac{1}{2}}}{\text{ந}}$.

16. $\frac{1}{4\,\text{அ}^2\text{க}^3\text{த}}$. 17. $\text{க}^{\frac{1}{3}}$. 18. $3\,\text{த}^{\frac{2}{3}}$. 19. $6\,\text{அ}^{\frac{1}{12}}$. 20. $\frac{3}{4}\text{அ}^{\frac{9}{20}}$.

21. $\frac{1}{6}\text{அ}^{\frac{1}{6}}$. 22. $\frac{4}{\text{க}^{\frac{3}{4}}}$. 23. ந^2. 24. $\frac{2}{\text{க}^{\text{அ}-\text{இ}}}$. 25. $6\,\text{க}^{\text{அ}-\text{இ}}$

26. $\frac{3}{\text{க}^3\text{ந}^6}$. 27. $\frac{1}{6\,\text{க}^{\frac{3}{2}}\text{ந}}$. 28. 3. 29. -8. 30. -12.

பயிற்சி 22 (ஆ). பக்கம் 346.

1. $\text{க}^{\frac{2}{3}} - \text{ந}^{\frac{2}{3}}$. 2. $\text{க}^{-\frac{4}{3}} - 1$. 3. $4\,\text{க} - 4\,\text{க}^{\frac{1}{2}} + 1$.

4. $\text{அ} - \text{அ}^{\frac{1}{2}} - 6$. 5. $6\,\text{அ} + 5\,\text{அ}^{\frac{1}{2}}\text{இ}^{\frac{1}{3}} - 6\,\text{இ}^{\frac{2}{3}}$. 6. $2\,\text{அ}^{\frac{1}{3}} - 1$.

7. $\text{க}^{\frac{4}{3}} - \text{க}^{-\frac{2}{3}}$. 8. $\text{க}^{\frac{4}{3}} + 4\,\text{க}^{\frac{2}{3}}\text{ந}^2 + 16\,\text{ந}^4$. 9. $6\,\text{ப}^{-2} - 2\,\text{ப}^{-1} + 3$.

10. $4\,\text{ப}^{\frac{2}{3}} + 9\,\text{ம}^{\frac{2}{3}} + \text{வ}^{\frac{2}{3}} - 6\,\text{ப}^{\frac{1}{3}}\text{ம}^{\frac{1}{3}} + 3\,\text{ம}^{\frac{1}{3}}\text{வ}^{\frac{1}{3}} + 2\,\text{ப}^{\frac{1}{3}}\text{வ}^{\frac{1}{3}}$.

11. $2\,\text{ப}^{\frac{1}{2}} - 3\,\text{ப}^{\frac{1}{6}} - \text{ப}^{-\frac{1}{6}}$.

12. $\frac{1}{\text{அ}^{\frac{1}{12}}}$. 13. $\frac{1}{\text{அ}^3}$. 14. $\frac{1}{\text{க}^{\frac{7}{12}}}$. 15. $-\frac{16}{3\,\text{க}^{\frac{3}{2}}}$. 16. $\frac{1}{3\,\text{க}\text{ந}}$.

17. $\frac{3}{2\,\text{க}\text{ந}^2}$. 18. $\text{ப}^3\text{ம}^{\frac{1}{3}}$. 19. 1.

20. $\frac{\text{க}^{\frac{1}{4}}}{\text{ந}^{\frac{1}{6}}}$. 21. $\frac{1}{\text{க}^{\frac{3}{8}}}$. 22. $\frac{\text{க}^{\frac{4}{3}}}{\text{ப}^{\frac{5}{3}}}$. 23. 1.

24. $\text{அ} + \text{இ}$. 25. $\frac{1}{\text{அ} - \text{இ}}$. 26. $\frac{1}{(\text{க}^2 - \text{ந}^2)^{2\,\text{இ}}}$, 27. $\frac{\text{ந}^5}{\text{க}}$.

28. $\text{க}^{\frac{1}{3}} - 3\,\text{ந}^{\frac{1}{3}}$. 29. $\frac{2\,\text{க}^{\frac{1}{2}} - 3\,\text{ந}^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{க}^{\frac{1}{2}} + 3\,\text{ந}^{\frac{1}{2}}}$. 30. $\frac{2\,\text{க}^{\frac{1}{2}}}{\text{க}^{\frac{1}{2}} + 1}$ 31. $\frac{\text{க}^{\frac{2}{3}} + 2}{\text{க}^{\frac{2}{3}} - 2}$.

32. 1. 33. 2. 34. 6. 35. $\frac{3}{5}$.

பயிற்சி 22 (இ). பக்கம் 353.

1. $\sqrt{128}$. 2. $\sqrt{32}$. 3. $\sqrt{12}$. 4. $\sqrt{27}$

5. $\sqrt{80}$. 6. $\sqrt{63}$. 7. $\sqrt{44}$. 8. $\sqrt{144}$

9. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$. 10. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 11. $\frac{2(\sqrt{2} - 1)}{1}$. 12. $\frac{3(\sqrt{3} + 1)}{2}$.

13. $\frac{3(3 + \sqrt{2})}{7}$. 14. $\frac{4(2 - \sqrt{3})}{1}$. 15. $\frac{\text{அ} + \sqrt{\text{இ}}}{\text{அ}^2 - \text{இ}}$.

16. $\frac{\text{அ}(2\,\text{அ} - \sqrt{3}\,\text{இ})}{4\,\text{அ}^2 - 3\,\text{இ}^2}$. 17. $\sqrt{50}$, $2\sqrt{32}$, $5\sqrt{8}$, $4\sqrt{18}$.

18. $\sqrt{108}$, $2\sqrt{48}$, $4\sqrt{27}$, $7\sqrt{12}$. 19. $2\sqrt{72}$, $3\sqrt{48}$, $4\sqrt{36}$, $6\sqrt{20}$. 20. $3\sqrt{288}$, $4\sqrt{243}$, $3\sqrt{576}$, $6\sqrt{180}$.

21. 20. 22. 120. 23. 20. 24. 12. 25. 30.

26. $\frac{5}{12}$. 27. $\frac{1}{8}$. 28. $\text{அ}^2\text{இ}^2$. 29. $3\,\text{இ}\sqrt[3]{2\,\text{அ}}$. 30. $\frac{\sqrt{2\,\text{க}}}{\text{ந}}$.

31. $\sqrt[3]{\text{அ}}$. 32. $36\,\text{அ}$. 33. $\sqrt{2}$. 34. $3\sqrt{3}$. 35. 0.

36. 0. 37. 0. 38. 0.

பயிற்சி 22 (ஈ). பக்கம் 356.

1. $2\,\text{அ} + 2\sqrt{\text{அ}^2 - 1}$. 2. $2 + 2\sqrt{1 - 4\,\text{அ}^2}$.

3. $5(\text{க} - \text{ந}) - \sqrt{6\,\text{க}^2 - 14\,\text{க}\text{ந} + 4\,\text{ந}^2}$. 4. $2\,\text{க} - 2\sqrt{\text{க}^2 - \text{ந}^2}$.

5. $5 + 2\sqrt{6}$. 6. $8 + 3\sqrt{7}$. 7. $97 + 56\sqrt{3}$. 8. $7 - 4\sqrt{3}$.

3951—Ta

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

9. $\sqrt{\text{ந}}$. 10. $\dfrac{\text{அ}+\text{இ}}{\text{அ}-\text{இ}}$. 11. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$.

12. $\dfrac{5(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{6}$. 13. $\dfrac{2(5\sqrt{\text{அ}}+2\text{அ})}{25-4\text{அ}}$.

14. $\dfrac{49+20\sqrt{6}}{1}$. 15. $\dfrac{\sqrt{\text{அ}}+2\sqrt{\text{இ}}}{\text{அ}-4\text{இ}}$.

16. $\dfrac{4\text{அ}+9\text{இ}+12\sqrt{\text{அஇ}}}{4\text{அ}-9\text{இ}}$. 17. $\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

18. $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{6}$. 19. 6. 20. $\dfrac{11\sqrt{3}+1}{2}$

21. $\dfrac{24\sqrt{\text{க}}}{4\text{க}-9}$. 22. $\dfrac{\text{க}+1}{\text{க}-1}$. 23. ·70. 24. ·28. 25. ·51.

26. ·19.

பயிற்சி 23 (அ). பக்கம் 363.

1. $\text{மட}_2 64=6$. 2. $\text{மட}_3 243=5$. 3. $\text{மட}_4 256=4$.

4. $\text{மட}_5 125=3$. 5. $2^8=256$. 6. $3^6=729$.

7. $\text{அ}^{\text{ம}}=\text{ப}$. 8. $\text{இ}^{\text{ப}}=\text{ம}$.

9. $1+2\,\text{மட}\,3+\text{மட}\,5$; $3\,\text{மட}\,2+2\,\text{மட}\,3-3\,\text{மட}\,5$.

10. 2·9473. 11. $\text{மட அ}-\text{மட இ}-\text{மட உ}$.

12. $2\,\text{மட அ}-\text{மட இ}-2\,\text{மட உ}$. 13. $\frac{1}{2}\text{மட அ}-\text{மட இ}-\frac{1}{2}\text{மட உ}$.

14. $\frac{1}{3}\text{மட அ}-\frac{3}{2}\text{மட இ}+\frac{1}{4}\text{மட உ}$. 17. 0. 18. 0.

பயிற்சி 23 (ஆ). பக்கம் 367.

1. 3; 2; $\bar{1}$, 1; $\bar{4}$; 0. 2. $\bar{1}\cdot7534$; $2\cdot7534$; $\bar{2}\cdot7534$, $\bar{4}\cdot7534$.

3. $\bar{2}\cdot2152$. 4. $\bar{1}\cdot9601$. 5. $4\cdot8623$. 6. $\overline{18}\cdot6856$.

7. $\bar{1}\cdot6633$. 8. $\bar{1}\cdot4138$. 9. $\overline{19}\cdot1755$. 10. $\bar{1}\cdot6921$.

11. $\bar{5}\cdot6652$. 12. $\bar{2}\cdot0350$. 13. ·8039. 14. $\bar{1}\cdot2352$.

15. $\bar{1}\cdot5643$. 16. 1·7557. 17. $\bar{1}\cdot7318$. 18. $\bar{1}\cdot8596$.

19. 1·7997. 20. $\bar{2}\cdot9327$.

பயிற்சி 23 (இ). பக்கம் 377.

1. 208·7. 2, 1921. 3. 2·253. 4. ·3119.
5 7·515. 6. 1·925. 7. ·1394. 8. ·000 1999.
9. 46·22. 10. ·001682. 11. ·0002191. 12. ·03186.
13. 1310. 14. ·003218. 15. ·001160. 16. ·08000.
17. ·07236. 18. ·01008. 19. ·8075. 20. ·3632.
21. ·2681. 22. ·0003562. 23. 83·20. 24. 15·63.
25. 6·668. 26. 1·043. 27. 1·510. 28. 3·743.
29. 4·025. 30. –6·341. 31. ஏறத்தாழ 28 ஆண்டு.
32. ஏறத்தாழ $42\frac{1}{2}$ ஆண்டு. 33. ஏறத்தாழ $389\frac{1}{2}$ ரூபா.
34. ·1736 கனமீ. அண்ணளவாக. 35. 2·758 ச.மீ. அண்ணளவாக.

பயிற்சி 24 (அ). பக்கம் 383.

1. $\text{க}=2,\ \text{ந}=1$; $\text{க}=1,\ \text{ந}=2$. 2. $\text{க}=3,\ \text{ந}=-1$; $\text{க}=1,\ \text{ந}=-3$. 3. $\text{க}=1,\ \text{ந}=-1$; $\text{க}=-\frac{1}{2},\ \text{ந}=2$. 4. $\text{க}=3,\ \text{ந}=-1$; $\text{க}=2,\ \text{ந}=-1\frac{1}{2}$. 5. $\text{க}=-1,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=1\frac{1}{3},\ \text{ந}=1\frac{1}{2}$. 6. $\text{க}=2,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=-3,\ \text{ந}=1\frac{1}{3}$. 7. $\text{க}=2,\ \text{ந}=1$; $\text{க}=0,\ \text{ந}=-1$. 8. $\text{க}=2,\ \text{ந}=1$; $\text{க}=-2\frac{4}{5},\ \text{ந}=-2\frac{1}{5}$. 9. $\text{க}=-1,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=-\frac{1}{2},\ \text{ந}=-1\frac{3}{4}$. 10. $\text{க}=3,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=-2,\ \text{ந}=3$. 11. $\text{க}=-1,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=-2,\ \text{ந}=-1$. 12. $\text{க}=4,\ \text{ந}=-3$; $\text{க}=3,\ \text{ந}=-4$. 13. $\text{க}=-3,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=2,\ \text{ந}=3$. 14. $\text{க}=3,\ \text{ந}=2$; $\text{க}=2,\ \text{ந}=3$. 15. $\text{க}=3,\ \text{ந}=-1$; $\text{க}=-1,\ \text{ந}=3$. 16. $\text{க}=-4,\ \text{ந}=-2$; $\text{க}=2,\ \text{ந}=4$. 17. $\text{க}=1,\ \text{ந}=-3$; $\text{க}=3,\ \text{ந}=-1$. 18. $\text{க}=-2,\ \text{ந}=3$; $\text{க}=3,\ \text{ந}=-2$. 19. $\text{க}=5,\ \text{ந}=2$; $\text{க}=-2,\ \text{ந}=-5$. 20. $\text{க}=\frac{1}{2},\ \text{ந}=\frac{1}{3}$; $\text{க}=\frac{1}{3},\ \text{ந}=\frac{1}{2}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

21. க $=3$, ந $=-4$; க $=4$, ந $=-3$. 22. க $=-\frac{1}{2}$, ந $=-\frac{1}{6}$; க $=-\frac{1}{6}$, ந $=-\frac{1}{2}$. 23. க $=4$, ந $=-6$; க $=6$, ந $=-4$. 24. க $=3$, ந $=2$; க $=1\frac{16}{23}$, ந $=8\frac{2}{3}$.

பயிற்சி 24 (ஆ). பக்கம் 388.

1. க $=\pm 1$, ந $=\pm 3$; க $=\pm 3$, ந $=\pm 1$. 2. க $=3$, ந $=1$; க $=-3$, ந $=-1$; க $=1\frac{1}{3}$, ந $=-3\frac{1}{6}$; க $=-1\frac{1}{3}$, ந $=3\frac{1}{6}$.
3. க $=1$, ந $=-\frac{2}{3}$; க $=-1$, ந $=\frac{2}{3}$; க $=\frac{\sqrt{15}}{5}$, ந $=-\frac{\sqrt{15}}{5}$; க $=-\frac{\sqrt{15}}{5}$, ந $=\frac{\sqrt{15}}{5}$. 4. க $=\pm 2$, ந $=\pm 1$; க $=\pm\frac{5}{2}$, ந $=\pm\frac{1}{2}$. 5. க $=\pm 1$, ந $=\pm 2$; க $=\pm\frac{5}{6}\sqrt{2}$, ந $=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
6. க $=\pm 1$, ந $=\pm 1$; க $=\pm\frac{7}{2}$, ந $=\mp 4$, 7. க $=\pm 2$, ந $=\pm 1$.
8. க $=\pm 5$, ந $=\pm 2$. 9. க $=\pm 1$, ந $=\mp 2$; க $=\pm 2\sqrt{2}$, ந $=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$. 10. க $=\pm 3$, ந $=\mp 1$; க $=\pm\frac{1}{3}\sqrt{6}$, ந $=\pm\frac{7}{12}\sqrt{6}$.
11. க $=0$, ந $=\pm 1$. 12. க $=1\frac{1}{4}$, ந $=-\frac{1}{2}$. 13. க $=2$, ந $=0$.
14. க $=1\frac{1}{2}$, ந $=-\frac{3}{4}$; க $=4\frac{1}{2}$, ந $=-\frac{1}{4}$; க $=\frac{1}{2}$, ந $=-2\frac{1}{4}$.
15. க $=2$, ந $=1\frac{1}{3}$; க $=1$, ந $=2\frac{2}{3}$; க $=4$, ந $=\frac{2}{3}$. 16. க $=2$, ந $=3$.
17. க $=2$, ந $=1$. 18. க $=\pm 1\frac{1}{2}$, ந $=\pm\frac{2}{3}$; க $=\pm\frac{2}{3}$, ந $=\pm 1\frac{1}{2}$.
19. க $=\pm\frac{5}{4}$, ந $=\pm\frac{1}{2}$; க $=\pm 1\frac{1}{16}$, ந $=\mp\frac{5}{8}$. 20. க $=\pm 1$, ந $=\mp 5$; க $=\pm 5$, ந $=\mp 1$.

பயிற்சி 24 (இ). பக்கம் 389.

1. க $=2$, ந $=-1$; க $=-1$, ந $=2$. 2. க $=3$, ந $=-2$; க $=2$, ந $=-3$. 3. க $=2$, ந $=-2$; க $=1$, ந $=-4$.
4. க $=1$, ந $=-1$; க $=-3$, ந $=\frac{1}{3}$. 5. க $=\pm 3$, ந $=\mp 1$; க $=\pm 1$, ந $=\mp 3$. 6. க $=\pm 3$, ந $=\mp 2$; க $=\pm 2$, ந $=\mp 3$.
7. க $=\frac{1}{4}$, ந $=-\frac{1}{2}$; க $=-\frac{1}{2}$, ந $=\frac{1}{4}$. 8. க $=\frac{1}{5}$, ந $=-1$; க $=1$, ந $=-\frac{1}{5}$. 9. க $=2$, ந $=-4$; க $=4$, ந $=-2$.

10. க $=\frac{1}{4}$, ந $=-\frac{1}{2}$; க $=-\frac{1}{2}$, ந $=\frac{1}{4}$. 11. க $=1$, ந $=-\frac{1}{2}$; க $=\frac{1}{2}$, ந $=-1$. 12. க $=\frac{1}{3}$, ந $=-\frac{1}{2}$; க $=-\frac{1}{2}$, ந $=\frac{1}{3}$.
13. க $=-3$, ந $=-2$; க $=-2$, ந $=-3$. 14. க $=5$, ந $=-2$; க $=2$, ந $=-5$. 15. க $=\frac{1}{3}$, ந $=1$; க $=-1$, ந $=-\frac{1}{3}$.
16. க $=\frac{1}{6}$, ந $=-\frac{1}{3}$; க $=-\frac{1}{3}$, ந $=\frac{1}{6}$. 17. க $=1$, ந $=-2$, ய $=-3$; க $=-1$, ந $=2$, ய $=3$. 18. க $=2$, ந $=-3$, ய $=-4$.
19. க $=2$, ந $=1$, ய $=-1$. 20. க $=2$, ந $=-2$, ய $=4$.

பயிற்சி 24 (ஈ). பக்கம் 393.

1. 10 அடி, 12 அடி. 2. 15 அடி, 12 அடி ; 18 அடி, 10 அடி. 3. 8, 3. 4. மணிக்கு 30 மைல், மணிக்கு 40 மைல். 5. 6, 4. 6. 10, 6. 7. 3, 2. 8. 83. 9. 25, ரூபா 6. 10. 210 மைல்.

பயிற்சி 25 பக்கம் 403.

1. (i) க $=2\cdot 6$, ந $=5\cdot 9$; க $=-1\cdot 4$, ந $=-6\cdot 3$. (ii) க $=1\cdot 7$, ந $=3\cdot 5$; க $=-2\cdot 4$, ந $=-2\cdot 5$. (iii) க $=\pm 3\cdot 5$, ந $=\pm\cdot 8$; க $=\pm\cdot 27$, ந $=\pm 11\cdot 0$. (iv) க $=\cdot 9$, ந $=4\cdot 6$; க $=-1\cdot 5$, ந $=-2\cdot 6$. (v) க $=-3$, ந $=-6$; க $=6$, ந $=3$. (vi) க $=6\cdot 2$, ந $=3\cdot 2$; க $=1\cdot 1$, ந $=-1\cdot 9$. (vii) க $=1\cdot 3$, ந $=5\cdot 6$; க $=-3\cdot 7$, ந $=-4\cdot 4$. (viii) க $=2\cdot 8$, ந $=2\cdot 9$; க $=-4\cdot 3$, ந $=-1\cdot 9$. (ix) க $=\pm 4\cdot 4$, ந $=\pm\cdot 9$; க $=\pm\cdot 9$, ந $=\pm 4\cdot 4$.

2. (1) க $=-2$, க $=-4$ என்பனவற்றிற்கிடையில். (2) -9. (3) க $=3\cdot 64$, அல்லது $-1\cdot 64$.

3. (1) க $=-1\cdot 35$, க $=1\cdot 85$ என்பனவற்றிற் கிடையில். (2) $6\cdot 13$. (3) க $=1\cdot 85$, அல்லது $-1\cdot 35$.

4. (1) க $=-5\cdot 42$, க $=4\cdot 42$ என்பனவற்றிற்கிடையில். (2) $-10\cdot 13$. (3) க $=2\cdot 39$, அல்லது $-1\cdot 89$.

5. (1) க $=1\cdot 5$. (2) 16. (3) க $=1\cdot 37$, அல்லது $-2\cdot 37$.

6. க $=2\cdot 1$, அல்லது $-2\cdot 6$.

7. (1) 3. (2) $6\cdot 13$. (3) க $=\cdot 82$, அல்லது $-1\cdot 82$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

8. க $= \cdot 45$, அல்லது $-1 \cdot 12$.
9. (1) $1 \cdot 5$. (2) $- \cdot 67$.
10. க $= 1 \cdot 5$, அல்லது -3.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 8. பக்கம் 406.

(அ) 1. $3\text{க}^{\frac{1}{2}} - 4\text{ந}^{\frac{1}{3}}$. 2. (i) $50 \cdot 70$, (ii) $91 \cdot 26$.
3. க $=1$, ந $=-3$; க $=5\frac{1}{4}$, ந $=5\frac{1}{2}$. 4. $14'$; $7'$.
5. (i) க $=-1 \cdot 45$, க $=3 \cdot 45$ என்பனவற்றிற்கிடையில், (ii) $-5 \cdot 75$, (iii) க $=3 \cdot 24$, அல்லது $-1 \cdot 24$.

(ஆ) 1. $\frac{\text{அ}^2\text{இ}^2 + \text{அஇ} + 1}{\text{இ}^2}$. 2. (i) 5, 7, 3 ; (ii) $1246 \cdot 5$.
3. க $=1$, ந $=-1$; க $=-1$, ந $=2$. 4. 5 ; 3.
5. (i) க $=-1 \cdot 65$, க $=3 \cdot 65$ என்பனவற்றிற் கிடையில், (ii) 8 ; (iii) க $=-1 \cdot 65$, அல்லது $3 \cdot 65$.

(இ) 1. $\text{க} - \text{க}^{\frac{1}{2}}$. 2. (i) $7 \cdot 045$; (ii) $342 \cdot 6$.
3. க $=2$, ந $=-2$; க $=3\frac{1}{5}$ ந $=-1\frac{2}{5}$. 4. 6 ; 3.
5. (i) $1 \cdot 15$; (ii) $14 \cdot 13$; (iii) க $=1 \cdot 81$, அல்லது $-3 \cdot 31$.

(ஈ) 1. $\text{க}^{\frac{2}{3}} + \text{ந}^{\frac{2}{3}} + \text{ய}^{\frac{2}{3}} + \text{க}^{\frac{1}{3}}\text{ந}^{\frac{1}{3}} - \text{ந}^{\frac{1}{3}}\text{ய}^{\frac{1}{3}} + \text{ய}^{\frac{1}{3}}\text{க}^{\frac{1}{3}}$. 2. (i) $\cdot 08687$; (ii) $\cdot 9051$.
3. க $=3$, ந $=1$; க $=1\frac{2}{5}$, ந $=4\frac{1}{5}$. 4. 7 ; 4.
5. க $=2 \cdot 21$, அல்லது $-2 \cdot 71$.

(உ) 1. $\text{க} - \text{ந} + 1 + 3\text{க}^{\frac{1}{3}}\text{ந}^{\frac{1}{3}}$. 2. (ii) $2 \cdot 305$.
3. க $=0$, ந $=0$; க $=2$, ந $=-2$. 4. 24 ; 60.
5. க $= \cdot 54$, அல்லது $-1 \cdot 54$.

(ஊ) 1. 1. 2. (i) $\cdot 6830$; (ii) $2 \cdot 885$ 3. க $=-1$, ந $=-2$; க $=3$, ந $=2$. 4. $12'$; $20'$. 5. (i) க $=1 \cdot 60$; (ii) க $= \cdot 86$; (iii) -5.

(எ) 1. $\frac{1}{3}$. 2. (i) $\cdot 9374$; (ii) $\cdot 2536$; (iii) 5741.
3. க $=-1$, ந $=2$; க $=4$, ந $=-\frac{1}{2}$. 4. மணிக்கு 300 மைல்.
5. க $=\pm 1$, ந $=\pm 2$; க $=\pm 2$, ந $=\pm 1$.

(ஏ) 1. $\frac{7}{8}$ 2. (i) $3 \cdot 11$; (ii) $3 \cdot 77$. 3. க $=0$, ந $=0$; க $=24$, ந $=3\frac{3}{7}$. 4. 300 மைல். 5. க $=4 \cdot 88$, ந $=1 \cdot 44$; க $=-2 \cdot 88$, ந $=-2 \cdot 44$.

(ஐ) 1. $2\text{அ} + 2\sqrt{\text{அ}^2 - \text{இ}^2}$. 2. (i) 1, 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; (ii) $2 \cdot 418$. 3. க $=\pm 2$, ந $=\mp 1$; க $=\pm\frac{5}{3}\sqrt{2}$, ந $=\mp\frac{1}{4}\sqrt{2}$.
4. 53. 5. க $=4 \cdot 3$, ந $=-7 \cdot 6$; க $=-4$, ந $=-7$.

பயிற்சி 26 (அ). பக்கம் 417.

1. (i) $9:10 > 5:6$; (ii) $11:12 > 8:9$; (iii) $15:16 > 12:13$.
2. (i) $15:17 > 6:7$; (ii) $4:7 > 6:13$; (iii) $9:7 > 81:64$.
3. 1:8. 4. 8:11. 5. 2:1. 6. 5:2, அல்லது 2:3.
7. 3:4, அல்லது 3:1. 8. $\text{இ}^2 : 3\text{அ}^2$. 9. $\frac{1}{9}$. 10. $\frac{5}{6}$.
11. $2\frac{5}{6}$ 12. $\frac{203}{331}$. 16. 9, 24. 17. 15. 18. 1: 2.

பயிற்சி 26 (ஆ). பக்கம் 425.

12. 1:2:3. 13. 2:3:4. 14. 1:3:5. 15. 3:4:5.

பயிற்சி 26 (இ). பக்கம் 432.

1. க $=21$. 2. க $=10\frac{1}{2}$. 3. க $=\text{அ}^2\text{இ}^3$. 4. க $=\pm(\text{அ}^2 - \text{இ}^2)$.
5. உ^4. 6. $\text{அ}^2 - \text{இ}^2$. 7. $12(\text{ப} + \text{ம})^6$. 8. $(\text{அ}^2 - \text{அஇ} + \text{இ}^2)^2$.
9. $\pm(4\text{அ}^2 - \text{இ}^2)$. 10. ± 1. 11. க $=0$, அல்லது 2.
12. க $=0$, அல்லது -1. 13. க $=3$, ந $=1$. 14. க $=3$, ந $=2$.
25. 3. 30. 16, 24. 31. 5. 32. 7:11.

பயிற்சி 27 (அ). பக்கம் 439.

1. ந $=\frac{5}{2}$க ; $\frac{5}{6}$. 2. ந $=\frac{10}{\text{க}}$; $3\frac{1}{3}$. 3. ந $=\frac{10}{\text{க}^2}$; ± 5.
4. $2\frac{1}{2}$. 5. $346\frac{1}{2}$ சதுரவடி. 6. $1437\frac{1}{3}$ கனவடி.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

7. 64 அடி. 8. $ந = க + 5\sqrt{க}$. 9. $க = \frac{1}{2}ந^2 + \frac{1}{5ய}$. 10. $10\frac{1}{3}$.
11. $ந = 3க + 2க^2 + க^3$. 12. 12″.

பயிற்சி 27 (ஆ). பக்கம் 444.

1. 162. 2. 10. 3. 40. 6. −3. 7. 32:27.
8. 81 ரூபா. 9. 7:6. 10. 16:25.

பயிற்சி 28 (அ). பக்கம் 450.

1. 5, 38. 2. 3, 25. 3. −4, −13. 4. $-\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{2}$.
5. $-1\frac{1}{2}$, $-9\frac{1}{2}$. 6. −4அ, −27அ. 7. −(அ+2), −6(அ+2).
8. 2அஉ, $அ^2 + 12அஉ + உ^2$. 9. 2, 8, 14, . . .
10. 5 9, 13, . . . 11. 18, 13, 8, . . . 12. 24, 21, 18, . . .
13. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 0, . . . 14. 12க, 9க, 6க. . . . 15. 3இ+11.
16. 8(இ+1). 17. 5(3−இ). 18. 19−10இ.
19. $2-\frac{1}{2}இ$. 20. க+இந. 21. 11 ஆம் உறுப்பு.
22. 20 ஆம் உறுப்பு. 23. 24 ஆம் உறுப்பு. 24. 19, 100.
25. 24, 156, 26. $3\frac{1}{6}$, $16\frac{1}{2}$. 27. $7\frac{1}{3}$, $57\frac{1}{2}$.
28. 13·1, 81·5. 29. ·3, 36. 30. க−21ந, 12(க−10ந).
31. 12. 32. 9, அல்லது 10. 33. 6, அல்லது 10. 34. 20.
35. 7. 36. 15. 37. 15. 38. 72. 39. 56. 40. $4\frac{1}{2}$.
41. இ(இ+1). 42. 10. 43. 11, அல்லது 15. 44. 33.

பயிற்சி 28 (ஆ). பக்கம் 455.

1. $10\frac{1}{2}$, 9, $7\frac{1}{2}$. 2. 24, 12, 0,−12. 3. −12,−7,−2, 3, 8, 13.
4. 2·5, 4·7, 6·9, 9·1. 5. 5·2, 2·3, −·6, −3·5, −6·4.
6. 24, 18, 12, . . . 7. $3\frac{1}{3}$, 3, $2\frac{2}{3}$, . . . 8. $1\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, . . .
9. $9\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{4}$, . . . 10. $12\frac{1}{2}$. 11. 1, 3, 5, 7.
12. −3, 0, 3, 6, 9. 13. 2க(க−2). 14. 1120.
15. இ(இ−1). 16. 20(13ப−3ம). 17. $\frac{1}{4}ப(ப-1)(ப+3)$.
18. 5, 8, 11, 14, அல்லது 14, 11, 8, 5. 19. $இ(\overline{இ+1}.ப+ம)$.
21. 7.

பயிற்சி 28 (இ). பக்கம் 464.

1. 128, 256. 2. 729, 2187. 3. $\frac{1}{32}$, $-\frac{1}{64}$.
4. $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$. 5. 8 ஆம் உறுப்பு. 6. 9 ஆம் உறுப்பு.
7. 13 ஆம் உறுப்பு. 8. 6 ஆம் உறுப்பு 9. 24, −12, 6, . . .
10. 36, −12, 4,... 11. இ ஒற்றை எண்ணெனின் $\frac{1}{3^{இ-3}}$.
இ இரட்டை எண்ணெனின் $-\frac{1}{3^{இ-3}}$.

12. 255. 13. $1\frac{121}{243}$
14. $\frac{341}{512}$. 15. $170\frac{21}{32}$. 16. $1093\frac{5}{9}$. 17. $2\frac{1}{64}$.
19. ±16. 20. ±6. 21. ±18. 22. ±2.
23. $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{9}{32}$, $\frac{27}{64}$. 24. $1\frac{1}{2}$, 1, $\frac{2}{3}$, அல்லது $-1\frac{1}{2}$, 1, $-\frac{2}{3}$.
25. 64, −16, 4, −1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{16}$. 26. $\frac{5}{2}$, −1, $\frac{2}{5}$ அல்லது $-\frac{5}{2}$, −1, 27.
27. 7. 28. 5. 29. 5. 30. 7. 31. ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$), அல்லது
($-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{12}$). 32. $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, அல்லது $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$.

பயிற்சி 28 (ஈ). பக்கம் 470.

1. 32. 2. $\frac{3}{5}$. 3. $\frac{2}{7}$. 4. $1\frac{1}{2}$. 5. 1. 6. 12·8.
7. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{61}{90}$, (iii) $\frac{56}{99}$. 8. (i) $\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{361}{990}$, (iii) $\frac{91}{198}$.
9. (i) $\frac{5}{9}$, (ii) $\frac{127}{495}$, (iii) $\frac{34}{495}$. 10. 30, −20, $13\frac{1}{3}$, . .
11. $\frac{99}{160}$. 12. $\frac{1}{128}$. 13. $13\frac{1}{2}$. 14. இ+1.

பயிற்சி 28 (உ). பக்கம் 475.

1. $3\frac{3}{4}$. 2. −36. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{2}{3}$வ. 5. $1\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$.
6. $1\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$. 7. 2, 6, −6. 8. −2, −8, 4. 9. $\frac{1}{9}$.
10. $\frac{5}{12}$. 11. $\frac{2}{21}$. 12. $-\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{5}$. 13. $\frac{கந}{க+ந}$.
14. −3, 3, $1\frac{1}{2}$. 15. $11\frac{1}{13}$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

பயிற்சி 28 (ஊ). பக்கம் 483.

1. $2^{\text{இ}-1}+1,\ 2^{\text{இ}-1}+\text{இ}$. 2. $2^{\text{இ}+1}-1,\ \frac{4}{3}(2^{\text{இ}}-1)$.

3. $3^{\text{இ}}+2,\ \frac{3}{2}(3^{\text{இ}}-1)+2\text{இ}$. 4. $3^{\text{இ}-1}-4,\ \frac{1}{2}(3^{\text{இ}}-1)-4\text{இ}$.

5. $(2\text{இ}-1)^2,\ \frac{\text{இ}}{3}(4\text{இ}^2-1)$. 6. $4\text{இ}^2,\ \frac{2}{3}\text{இ}(\text{இ}+1)(2\text{இ}+1)$.

7. $(2\text{இ}-1)(4\text{இ}-1),\ \frac{\text{இ}}{3}(8\text{இ}^2+3\text{இ}-2)$.

8. $2\text{இ}(\text{இ}+1),\ \frac{2}{3}\text{இ}(\text{இ}+1)(\text{இ}+2)$.

9. $\text{இ}(\text{இ}+1)(\text{இ}+2),\ \frac{\text{இ}}{4}(\text{இ}+1)(\text{இ}+2)(\text{இ}+3)$.

10. $4\text{இ}(\text{இ}+1)(2\text{இ}-1),\ \frac{2}{3}\text{இ}(\text{இ}+1)(\text{இ}+2)(3\text{இ}-1)$.

11. 4. 12. $\frac{5}{12}$. 13. $\frac{1}{1-\text{அ}}+\frac{3\text{அ}}{(1-\text{அ})^2}$. 14. $\text{இ}(\text{இ}-2)$.

15. $\frac{1}{4}\text{இ}(\text{இ}+13)$. 16. $\frac{2}{3}\text{இ}(\text{இ}^2-1)$. 17. $\frac{\text{இ}}{6}(\text{இ}^2-3\text{இ}-13)$.

18. $\frac{1}{12}\text{இ}(\text{இ}+1)(3\text{இ}^2+7\text{இ}-10)$.

19. $\frac{\text{இ}}{6}\left\{2\text{இ}^2+3\text{இ}(2\text{அ}-1)+6\text{அ}^2-6\text{அ}+1\right\}$. 20. 20661.

பரீட்சைப் பத்திரங்கள் 9. பக்கம் 484.

அ. 1. $\frac{1}{10}$. 2. 10 கலன், 9 கலன். 3. $41\frac{1}{2}$ 4. 5000.
5. $\frac{1}{1-\text{அ}}+\frac{3\text{அ}}{(1-\text{அ})^2}$.

ஆ. 1. 12, 8. 3. 3 அடி. 4. $-1,\ 2$.
5. $\frac{1}{24}\text{இ}(\text{இ}+1)(\text{இ}+5)(3\text{இ}+4)$.

இ. 1. 3: 2. 3. 3: 4. 4. 256.
5. $3-\frac{1}{2\cdot 3^{\text{இ}-2}}-\frac{3}{2}(2\text{இ}-1)\frac{1}{3^{\text{இ}}}$.

ஈ. 1. $\frac{\text{அ}^{\frac{3}{2}}\text{இ}^{\frac{1}{2}}-\text{அ}^{\frac{1}{2}}\text{இ}^{\frac{3}{2}}}{\text{அ}-\text{இ}}$. 3. 4. 4. 6. 5. 19270.

உ. 1. $\frac{1}{25}$. 3. 15 செக்கன். 4. 1: 9, அல்லது 9: 1.
5. $\text{இ}(\text{இ}+1)(2\text{இ}+1)-2(2^{\text{இ}}-1)$.

ஊ. 1. 8: 1. 4. 8, 72. 5. $\frac{4}{15}$.

எ. 1. 6, 7. 2. க$=3$. 3. 640 இரசவங்குலம்.
4. 9. 5. $\frac{1}{2}\text{இ}(\text{இ}+1)+2^{\text{இ}+2}-4$.

ஏ. 1. 4, 6. 3. 70 ரூபா. 4. $40\frac{1}{3}$. 5. -2இ.

ஐ. 1. க$=3$, ந$=14$. 2. க: ந: ய$=2:1:3$. 3. 2: 9
4. 5, 2. 5. $\frac{1}{4}\text{இ}(\text{இ}+1)(\text{இ}+2)(\text{இ}+3)$.

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org

Digitized by Noolaham Foundation.
noolaham.org | aavanaham.org