விவரண புள்ளிவிபரவியல்

Descriptive Statistics

A.B. FOUZUL ALEEM "HNDA" CIMA B.Com
Diplomа in Accountancy D.E.

செல்லையா இளங்குமரன்

B. Sc. (Hons.), Grad. I. S., LIDPM.

1987

விவரண புள்ளிவிபரவியல்
DESCRIPTIVE STATISTICS

செல்லையா இளங்குமரன்
B. Sc. (Hons.), Grad. I. S., LIDPM
உதவி விரிவுரையாளர்,
கணித, புள்ளிவிபரவியல்துறை
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்
யாழ்ப்பாணம்.

வெளியீடு:
பட்டப் படிப்புகள் கல்லூரி,
48/1, ஸ்ரான்லி வீதி, யாழ்ப்பாணம்
1987

வெளியீடு — 9
முதற்பதிப்பு ஏப்பிரல் — 1987

அச்சுப்பதிவு :
திருமகள் அழுத்தகம்,
சுன்னாகம்.
1987

விலை
ரூபா 30/-

முன்னுரை

இலங்கைப் பல்கலைக்கழகங்களிலும், உயர்கல்வி நிறுவனங்களிலும் புள்ளியியல் முக்கியமான பாடமாக விளங்குகிறது. அத்துடன் புள்ளியியலானது தூய விஞ்ஞானத்துறையில் (Pure Science) மட்டுமன்றி ஏனைய சமூக விஞ்ஞான (Social Science), மருத்துவ, விவசாயத் துறைகளிலும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுவதனால் இதன் முக்கியத்துவம் மேலும் உணரப்பட்டு வருகிறது. புள்ளியியலின் தேவை வளர்ச்சியடைந்து வருவதற்கேற்ப அதன் பயனை வேண்டி நிற்கும் தமிழ் மாணவர்களுக்குத் தேவையான உசாத்துணை நூல்கள் தமிழில் இல்லாமை ஒரு பெரும் குறைபாடாகும். இக்குறைபாட்டை இந்நூல் ஓரளவுக்காவது நிவர்த்தி செய்யும் என்பதில் ஐயமில்லை.

இந்நூலானது பட்டப்படிப்பை மேற்கொள்ளும் விஞ்ஞானமாணி (B. Sc.), வணிகமாணி (B. Com), முகாமைத்துவமாணி (BBAd), கலைமாணி (B. A.) மாணவர்கள் பயனடையக் கூடிய வகையில் எழுதப்பட்டாலும் ஆசிரியபயிற்சி, வணிக டிப்ளோமா (Dip. in Commerce), IDPM, CIMA, பட்டயக் கணக்காளர் (Chartered Accountancy) மாணவர்களுக்கும் ஏற்ற நூலாக இது விளங்கும். மேலும் இந்நூல் ஆரம்பபகுதிகள் க. பொ. த (உயர்தர) மாணவர்களும் பயனடையும் சில விடயங்களைக் கொண்டுள்ளது. விஞ்ஞான மாணவர் தவிர்ந்த ஏனையோர் இந்நூலில் கையாளப்பட்டுள்ள தேற்றங்களின் நிறுவல்களைத் தேவைப்படாதவிடத்துக் கவனிக்காது விடலாம் என்பது எமது கருத்தாகும்.

இந்நூலின் முதலாம் அத்தியாயம் புள்ளிவிபரவியலின் அறிமுகத்திணைச் சுருக்கமாகத் தருகிறது. இரண்டாம், மூன்றும் அத்தியாயங்கள் புள்ளிவிபரவியலின் ஆரம்ப படிகளான தரவு சேகரித்தல், வகுப்பாக்கல், அட்டவணைப்படுத்தல், சமர்ப்பித்தல் என்பவற்றைத் தெளிவாக விளக்குகிறது. நான்காம், ஐந்தாம், ஆறும் அத்தியாயங்கள் புள்ளிவிபரவியலின் முக்கிய படியான தரவுகளைப் பகுப்பாய்வு செய்தல், விளக்கமளித்தல் என்பவற்றை விளக்குகிறது. விவரண புள்ளிவிபர

வியலின் முக்கியமான இணைவு (Correlation) எனும் அத்தியாயம் பிரயோகப் புள்ளிவிபரவியலின் கீழும் வருவதால் இந்நூலில் சேர்த்துக் கொள்ளப்படவில்லை.

இந்நூலினை வெளியிடுவதற்கு ஊக்கமும், நிதியுதவியும் அளித்த யாழ் பட்டப் படிப்புகள் கல்லூரிக்கும், அதன் இயக்குநர் திரு. இராசா சத்தீஸ்வரன் அவர்களுக்கும், அணிந்துரை வழங்கிய எனது துறைத் தலைவர் திரு. பொ. மகினன் அவர்களுக்கும் எனது நன்றியைத் தெரிவிக்கிறேன்.

நன்றி

கணித, புள்ளிவிபரவியல் துறை
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக்கழகம்,
யாழ்ப்பாணம்.

செ. இளங்குமரன்

அணிந்துரை

தமிழில் கல்வி கற்க வேண்டும் என்னும் ஆர்வம் மாணவர்களிடையே கூடிக்கொண்டுபோகும் இத்தருணத்தில் தமிழில் போதிய அளவு பாடப்புத்தகங்கள் இல்லாமையால் இவர்களின் ஆர்வம் நிறைவேறாமல் இருக்கின்றது. இதில் ஒரு பகுதியைப் பூர்த்தி செய்யும் நோக்கமாக "விவரண புள்ளிவிபரவியல்" என்னும் பாடப்புத்தகத்தை திரு. செ. இளங்குமரன் முன்வந்து தமிழில் எழுதியுள்ளார்.

இது விஞ்ஞானரீதியாகவும், பல்கலைக்கழக மாணவர்களின் படிப்புக்கு உகந்ததாகவும் எழுதப்பட்டுள்ளது. இப்புத்தகத்தில் 2, 3 அத்தியாயங்களில் தரவுகளின் சேகரிப்பு, வகுப்பாக்கல், அட்டவணைப் படுத்தல், சமர்ப்பித்தல், பகுப்பாய்வு, விளக்கமளித்தல் போன்றவை விரிவாகக் கூறப்பட்டுள்ளது. அத்தியாயம் 4, 5, 6 என்பவற்றில் அளவைகள் பற்றி விரிவாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

இந்நூல் குறிப்பாக முதல்வருட புள்ளிவிபரவியல் மாணவர்களுக்கும், பகுதி Iஇல் வர்த்தகம், தொழில் நிர்வாகம், கலைத்துறை விசேட மாணவர்களுக்கும், கற்பிக்கும் ஆசிரியர்கட்கும் இன்றியமையாததாக இருக்கும்.

தலைவர்,
கணித, புள்ளிவிபரவியல் துறை,
யாழ்ப்பாணப் பல்கலைக் கழகம்.

பொ. மகினன்

உள்ளடக்கம்

எனது வழிகாட்டிகளான பெற்றோருக்கும், புள்ளி விபரவியல்துறை வழிகாட்டிகளான பேராசிரியர் J. B. செல்லையா, டாக்டர் S. கணேசலிங்கம் அவர்களுக்கும் சமர்ப்பணம்.

அறிமுகம் :
(Introduction)

1. புள்ளியியல் நோக்கம், பொருள், கேள்வி
(Meaning, Scope & Inquiry of Statistics)

1. 1. பொருள், நோக்கம், கேள்வி

"புள்ளியியல்" எனும் பதம் பல்வேறு கருத்துக்களில் தொக்கி நிற்கிறது. அவை,

(a) காரணிகளின் எண்பெறுமான வெளியீடுகள்,
(b) தரவுகளின் பகுப்பாய்வுக்கும், விளக்கமளித்தலுக்குமான விஞ்ஞான முறைகள்,
(c) மாதிரி அவதானிப்புகளில் அளவீடுகள் என்பனவாகும்.

பெரும்பாலான இயற்கை நிகழ்வுகளில் காலத்துக்குக் காலம் மாற்றங்கள் ஏற்படுகின்றன. இவை பரிசோதனைகளாக உள்ளபோது பௌதிக மாற்றங்கள், இரசாயன மாற்றங்கள் என்பவற்றால் விளக்கப்படுகின்றன. இங்கு கருதப்படும் ஒவ்வொரு சிறப்பியல்பும் காரணிகளால் வரையறுக்கப்படுகின்றன. பௌதிக மாற்றத்தையோ, இரசாயன மாற்றத்தையோ கொண்ட பரிசோதனைகள் யாவும் வெளியீடுகளை (Outcomes) கொண்டவையாகும். இவ்வெளியீடுகள் யாவும் அவதானிப்பினால் அல்லது அளவீடுகளினால் பெறப்படுவதால் அவதானிப்புகள் (Observations) எனப்படுகின்றன.

அவதானிப்புகள் யாவும் ஒரு நோக்கத்திற்காகவே பெறப்படுவதால் அவை அந்நோக்கத்திற்கான தரவுகள் (Data) எனப்படுகின்றன. இத்தரவுகள் இருவகைப் படுத்தப்படலாம். அவை,

(a) எண் பெறுமான தரவுகள் (Quantitative data)
(b) சிறப்பியல்பு தரவுகள் (Qualitative data) என்பனவாகும்.

இங்கு விளக்கப்பட்ட தரவுகள் யாவும் புள்ளிவிபரங்கள் (Statistics) எனவும் சொல்லப்படுகின்றன. புள்ளி விபரங்கள் பற்றிய பாடநெறியாக இருப்பதாலேயே புள்ளிவிபரவியல் எனும் சொல் வழங்கப்பட்டது. புள்ளியியலின் பயன்பாட்டுக்கான சில எடுத்துக்காட்டல்கள் (Illustrations) பின்வருவனவாகும்.

(i) ஓர் வர்த்தக நிறுவனத்தின் நடைமுறை இயங்குதலை ஆராய்வதற்கு உற்பத்தி புள்ளி விபரங்கள் தொகுக்கப்படுகின்றன.

(ii) தரவுகளைக் குறித்துக் காட்டுவதையும், ஆராய்வதையும் புள்ளி விபரங்கள் இலகுவாக்குகின்றன.

(iii) ஓர் பெரிய தரவுத் தொகுதியைப்பற்றிய அநுமானங்களை மேற்கொள்வதற்கு, சிறியமாதிரி கூட்டமொன்றைப் பயன்படுத்துவதன்மூலம் நேரத்தை, செலவைக் குறைப்பதற்கு உதவுகின்றது.

புள்ளியியலின் கேள்வி பின்வரும் வகைகளில் இருத்தல் வேண்டும்.

(i) ஓர் விசாரணையின் நோக்கம் தெளிவான பிரச்சனை வடிவில் கணிதமுறையில் உணர்த்தப்படல்.

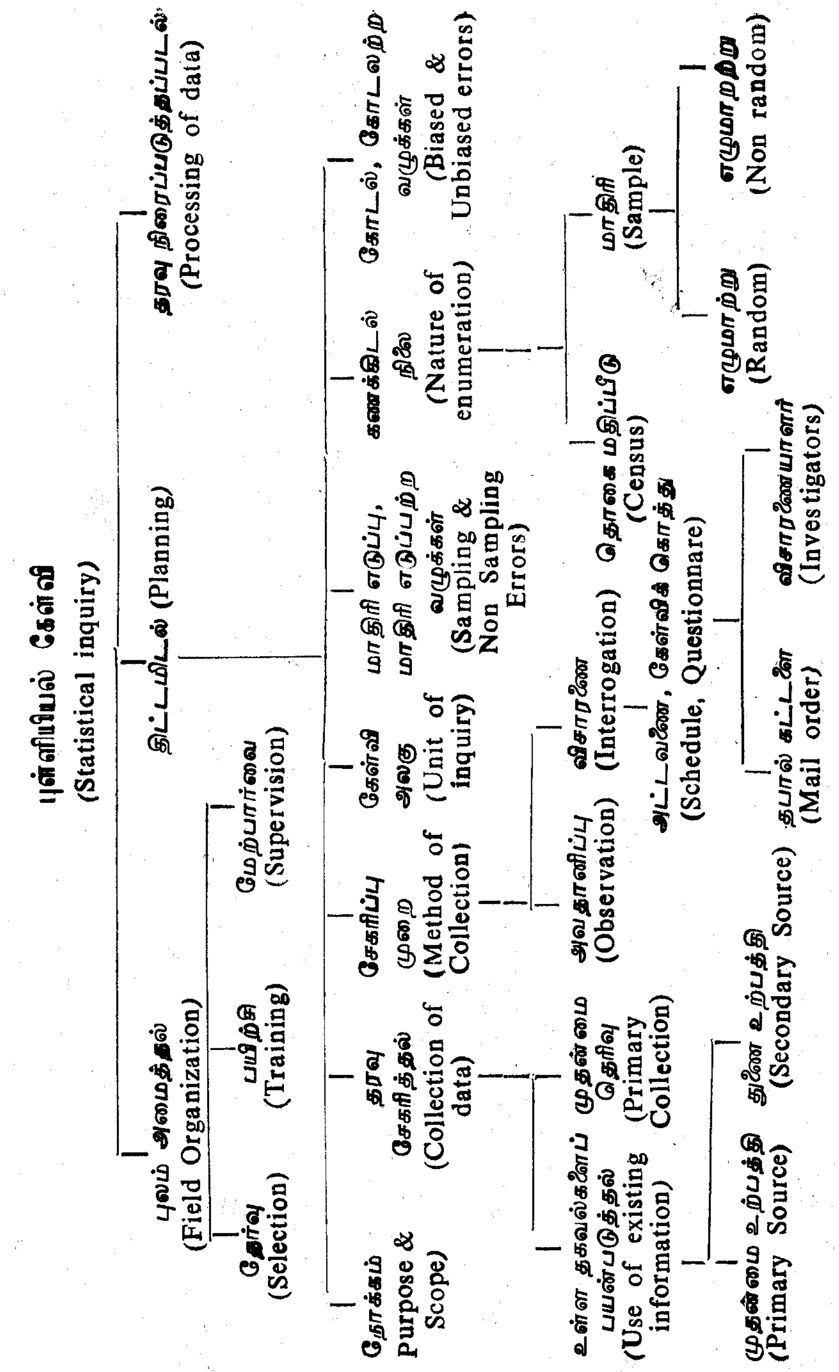
(ii) விசாரணைக்கான தரவு சேகரித்தலுக்கோ அன்றி வேறு தேவைக்கோ கேள்விக் கொத்துகள் பயன்படுத்தப்படல்.

(iii) மாதிரி அளவீட்டுத் திட்டம் பயன்படுத்தப்பட வேண்டியிருப்பின் மாதிரிப் பருமன், மாதிரி எடுத்தல் முறை என்பன தெளிவாகத் திட்டமிடப்படல்.

(iv) பெறப்படும், பயன்படுத்தப்படும் தரவுகள் யாவும் திட்டவட்டமான வரையறைக்குட்பட்டிருத்தல்.

(v) தரவுகளின் பகுப்பாய்வில் அளிக்கப்படும் விளக்கங்கள் யாவும் புள்ளியியல் செயல்முறைகளை வலிதாகப் பயன்படுத்தி அளிக்கப்பட்டவையாகவிருத்தல்.

புள்ளியியல் கேள்வி, வரிப்படமூலம் படிகளில் பின்வருமாறு தரப்படலாம்.



புள்ளியியலின் முக்கிய படிகள் :

மேலே தரப்பட்டவாறு விளக்கமாகப் புள்ளியியல் கேள்வி தரப்பட்டாலும் அதன் முக்கியமான படிகள் பொதுவாகப் பின்வருமாறு இருக்கும். அவை முறையே,

(a) தரவு வடிவங்களைத் தேர்தலும், சேகரித்தலும் (Selection and Collection of data)
(b) தரவுகளின் வகுப்பாக்கலும், அட்டவணைப்படுத்தலும் (Classification and Tabulation of data)
(c) தரவுகளின் குறித்துக் காட்டலும், மேலோட்ட விளக்கமும் (Presentation and nature of data)
(d) தரவுகளின் பகுப்பாய்வு (Analysis of data)
(e) விளக்கமளித்தல் (Interpretation)

1. 2. தரவு (Data)

தரவு உற்பத்தி (**Origin of data**):

தரவுகளின் அல்லது புள்ளி விபரங்களின் இயற்கை நிலை காணப்படும் இடங்கள் யாவும் தரவு உற்பத்திகளாகும்.

அலகு (**Unit or Element**):

ஒவ்வொரு ஏதேச்சையான புள்ளி விபரமும், அது ஆரம்ப நிலையிலுள்ளபோது அதாவது மேலும் பிரிக்கமுடியாத நிலையிலுள்ளபோது அலகு என வரையறுக்கப்படும்.

குடி (**Population**):

ஒரு புள்ளியியல் கேள்வி அல்லது விசாரணையின்போது கருத்திற் கொள்ளப்படும் எல்லா இயல்தகு உறுப்புக்களையும் அல்லது அலகுகளையும் கொண்ட தொகுதி குடி எனப்படும்.

மாதிரி (**Sample**):

அநுபவத்தில் அல்லது செயல்முறையில் ஓர் குடியிலுள்ள எல்லா அலகுகளையும் அல்லது உறுப்புகளையும் எடுத்து பகுப்பாய்வு செய்தல் இலகுவானதல்ல. அவ்வாறு மேற்கொள்ளும்போது நேரமும், செலவும் கூடுதலாகத் தேவைப்படும். இந்நிலையில் குடியினது பொருத்தமான பகுதியொன்று மட்டுமே தெரிவுசெய்யப்பட்டு பகுப்பாய்வுக்குட்படுத்தப்படும். இப்பகுதி மாதிரி எனப்படும். அதாவது குடியிலுள்ள சில உறுப்புக்களின் தொடை அல்லது சேர்க்கை மாதிரி எனப்படும். மேலும் மாதிரி குடியினுடைய ஓர் தொடைப் பிரிவுமாகும்.

தரவு வகைகள் (**Types of data**):

தரவு அல்லது புள்ளிவிபரம் என்பது சேகரிக்கப்பட்ட அல்லது சேகரிக்கப்படவுள்ள அவதானிப்பாகும். எனவே தரவுகளை இருவகைப் படுத்தலாம். அவை,

(a) முதன்மை தரவு
(b) துணை தரவு

என்பனவாகும்.

முதன்மை தரவு (**Primary data**):

தரவுகளின் உற்பத்திகளைத் தரவு சேகரிப்போன் தேடிச்சென்று அவற்றைப் பெற்றுக்கொள்ளும்போது அவை முதன்மைத் தரவுகளெனப்படும். எனவே ஒரு புள்ளியியல் கேள்வியின்போது தரவுகள் ஆராய்ச்சியாளனிடம் இல்லாவிடில் அவை உற்பத்தியில் பெறப்படும்போது முதன்மை தரவுகளாகவிருக்கும்.

துணைதரவு (**Secondary data**):

ஓர் நோக்கத்திற்குத் தரவு தேவைப்படும்போது அவை ஏற்கனவே ஓர் புள்ளியியலாளனால் சேர்த்துவைக்கப்பட்டிருந்தால் அவற்றைப் பாவிப்பதே செலவை, நேரத்தை மீதப்படுத்தும் வழியாகும். இந்நிலையில் பெறப்படும் பழைய தரவுகள் துணை தரவுகள் எனப்படும்.

பரமானம் (**Parameter**):

ஒரு குடியினைக் கருதும்போது அது தொடர்பான சில சிறப்பு ஒருமைகள் முக்கியமானவையாகவிருக்கின்றன. உதாரணமாகக் குடி சராசரி, குடி மொத்தம் போன்றவை. இவை பொதுவாகத் தெரியாப் பெறுமானங்களாகவேயிருக்கும். இவை அக்குடியின் உடமைகள் எனப்பட்டு பரமானங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

ஓர் புள்ளியியல் அலகு திருப்தி செய்யவேண்டிய நிபந்தனைகள் பின்வருவனவாகும்.

(a) வழுவற்றதாகவும், குறிப்பிடத்தக்கதாகவுமிருத்தல்.
(b) ஏகவினமானதாயிருத்தல், அல்லாவிடில் பெறப்படும் முடிவுகள் நம்பத்தகாதவையாயிருக்கும்.
(c) நிலையானதாயிருத்தல், நிலையற்றுக் காணப்படுமாயின் பகுப்பாய்விற்கு முன்னர் அவற்றில் திருத்தங்கள் செய்யப்படவேண்டியிருக்கும்.
(d) புள்ளியியல் கேள்விக்குப் பொருத்தமானதாயிருத்தல்.
(e) ஆராய்வதற்குத் தகுதியுடையதாயிருத்தல்.

மாதிரி வழுக்கள் (**Sampling errors**):

மாதிரி கோடலுற்றுக் காணப்படின், அதாவது அம்மாதிரி குடியைச் சரியாகப் பிரதிபலிக்காவிடில் அது வழுவுடையதெனவும், ஏற்றுக்கொள்ள முடியாதெனவும் சொல்லப்படும். இந்நிலையில் பின்வரும் நடவடிக்கைகள் மாதிரியில் வழுவினை அல்லது கோடலைக் குறைக்கக்கூடியவையாகவிருக்கும்.

(i) ஆராய்ந்து மாதிரி அலகுகளைத் தெரிதல்.
(ii) மாதிரியில் எழுமாறாக ஒன்றை இன்னொன்றால் பிரதியிடல்.
(iii) மாதிரி அலகுகளின் தெரிவுக்கு முழு குடியையும் பயன்படுத்தாது விடல்.
(iv) எழுமாற்றுத் தெரிவினை ஒழுங்கின்றிச் செய்தல்

புள்ளியியல் ஒழுங்குவிதி (The law of Statistical regularity):

பகுப்பாய்வுக்குத் தெரியப்படும் மாதிரி பின்வரும் ஒழுங்குகளுக்கு அமைவாயிருத்தல் விரும்பத்தக்கதாகும்.

(a) ஒவ்வொரு அலகின் தெரிவும் முற்றாக எழுமாறாயிருத்தல்.
(b) அசாதாரணமான அலகுகளின் தாக்கத்தைக் குறைக்குமுகமாக மாதிரிப் பருமனை இயன்றளவு பெரிதாக வைத்திருத்தல்.

1.3. புள்ளிவிபர சிறப்பியல்பு, மாறி (Statistical Characteristic, Variable)

சிறப்பியல்பு:

ஓர் அலகினது அல்லது உறுப்பினது சிறப்பு அம்சம் சிறப்பியல்பு எனப்படும். இச் சிறப்பியல்பு இருவகைப்படுத்தப்படும்.

(i) மாறிச் சிறப்பியல்பு (Variable characteristic)
(ii) பண்புச் சிறப்பியல்பு (Attribute characteristic)

உதாரணமாக ஒரு குழுவிலுள்ள மனிதர்களின் சிறப்பியல்புகளை நோக்குவோமாயின் அவர்களின் உயரங்கள், நிறைகள், வயதுகள் போன்றன எண் பெறுமானங்களினால் உணர்த்தப்படுவதால் அவை அம் மனிதர்களுள் ஒருவருக்கு ஒருவர் மாறுபவையாகவுமிருப்பதால் மாறிச் சிறப்பியல்புகளெனப்படும். ஆனால் அவர்களின் தோற்றங்கள், நிறங்கள் போன்றவை பண்புகளால் உணர்த்தப்படுவதுடன் வித்தியாசமானவையாகவுமிருப்பதால் பண்புச்சிறப்பியல்புகள் எனப்படுகின்றன.

புள்ளிவிபரமாறி (Statistical Variable):

ஓர் புள்ளியியல் அலகின் மாறிச் சிறப்பியல்பு அலகுக்கு அலகு வேறுபடுத்தப்படுவதை ஓர் மாறியினால் குறிக்கலாம். இம்மாறி புள்ளியியல் மாறி எனப்படும். இப்புள்ளிவிபர மாறிகள் இருவகைப்படும்.

(a) தொடர்ச்சியான மாறி (Continuous Variable):
(b) பின்னகமான மாறி (Discreate Variable)

உதாரணமாக ஒரு காரின் மைல் — மணி கதியினை நிமிடத்துக்கு நிமிடம் பதிவோமாயின் அது ஒரு தொடர்ச்சியான பெறுமானங்களைக் கொண்டதாக விருக்கும். இங்கு கதி தொடர்ச்சியான மாறியாகும். ஒரு நகரத்திலுள்ள குடும்பங்களிலுள்ள பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கைகளைப் பதிவோமாயின் அது ஒரு முழு எண்களைக்கொண்ட தொடையாக விருக்கும். இங்கு பிள்ளைகளின் எண்ணிக்கை என்பது ஒரு பின்னகமான மாறியாகும்.

2. தரவுகளின் சேகரிப்பு, வகுப்பாக்கல், அட்டவணைப்படுத்தல்

(Collection, Classification & Tabulaton of data)

2.1. தரவு சேகரித்தல் (Collection of data)

புள்ளியியலின் ஆரம்ப முக்கியபடி தரவு சேகரித்தலாகும். முதலாவது அத்தியாயத்தில் தரவுகளைப்பற்றிய விளக்கங்களைப் பெறலாம். புள்ளியியல் கேள்விக்கேற்ப தரவுகளின் உற்பத்திகளைத் தீர்மானித்தல் தரவுசேகரிக்கும் புள்ளியியலாளனின் முதல் நடவடிக்கையாகும். இருவகையான தரவுகள் இருக்கலாம் என முன்னர் விளக்கப்பட்டுள்ளது. அங்கு துணைதரவின் வரைவிலக்கணப்படி தரவு சேகரித்தல் பொருத்தமற்றதாகும். எனவே முதன்மைத் தரவுகளுக்கு மட்டுமே தரவு சேகரித்தல் பொருத்தமானது.

சேகரிப்பு முறைகள் (Methods of Collection)

(a) தனிப்பட்ட நேரடி புலனாய்வுமுறை:
(Direct personal investigation)

இம்முறை நேர்முகப்பரீட்சை, அவதானிப்பு என்னும் இரு முறைகளில் நடைபெறும். முதல்முறையில் சேகரிப்பவர் குடியில் அல்லது உற்பத்தியில் நேரடியாக ஒவ்வொரு உறுப்பையும் சந்தித்து உரையாடல் மூலம் தகவல்களைப் பதிவுசெய்தல் ஆகும். மற்றைய முறையில் உரையாடலின்றி ஒவ்வொரு உறுப்பையும் அவதானித்து தகவல்களைப் பதிவு செய்தலாகும். அவதானிப்பைவிட உரையாடல் சிறந்தது. ஏனெனில் சந்தேகத்துக்கிடமானவை உரையாடலில் நிச்சயப்படுத்தப்படலாம்.

அநுகூலம், பிரதிகூலம்; இம்முறையில் நேரடியாக தரவு பெறப்படுவதால் நம்பத்தகுந்தவை (reliable) ஆகும். இங்கு உடன் சேர்க்கையான தகவல்களைப் பெறவும் சந்தர்ப்பமுண்டு. ஆனால் மாதிரிப் பருமன் மிகப் பெரிதாக உள்ளபோது நேரத்தையும், செலவையும் கூட்டுவது ஓர் குறைபாடாகும்.

(b) மறைமுகமான வாய்மூல புலனாய்வு முறை:
(Indirect Oral investigation)

இம்முறை ஒவ்வொரு உறுப்பையும் நேரடியாக அணுகமுடியாத இடங்களில் அல்லது சேகரிப்பதற்கு சிக்கலான சந்தர்ப்பங்களில் அல்லது பகுதி தகவல்கள் வித்தியாசமாயுள்ள இடங்களில் பயன்படுத்தப்படும். இம்முறையில் சேகரிப்போன் மூன்றும் மனிதனையோ, அல்லது சாட்சிகளையோ தகவல்களைப் பெறப் பயன்படுத்தலாம்.

அநுகூலம், பிரதிகூலம்; இம்முறை ஓர் மிகப் பெரிய உற்பத்திக்கு அதாவது குடிப்பருமன் மிகப் பெரியதாயுள்ள குடிகளுக்கு சிறந்த தாகும். மேலும் நேரம், செலவினை இம்முறை குறைக்கலாம். ஆனால் தரவுகள் மூன்றும் மனிதனால் பெறப்படுவதால் நம்பத்தகாதவையாக வும் இருக்கலாம்.

(c) உள்ளூர் முகவர், உள்ளூர் தொடர்புமுறை:
(Information from Local agencies and Correspondents)

இம்முறையில் சேகரிப்போனுலல்லாமல், பதிலாக உள்ளூர் முகவர் களை நியமித்தோ அல்லது உள்ளூர் தொடர்பின் மூலமோ அவர்கள் சேகரித்தவற்றைச் சேகரித்தலாகும். எனவே இது துணைதரவுக்கே பொருந்தும்.

அநுகூலம், பிரதிகூலம்; பரந்த பிரதேசத்தில் பல முகவர்களால் பெறப்படுவதால் செலவு குறைக்கப்படும், பரந்த பிரதேசம் கருத்தில் கொள்ளப்படும். ஆனால் தரவுகள் நம்பத்தகுந்தவையல்ல.

(d) தபால் மூல கேள்விக்கொத்து, அனுபந்தமுறை:
(Mailed questionnare and Schedules)

இம்முறையில் கேள்விகளையும், விடைகளுக்கான இடைவெளிகளை யும் கொண்ட கேள்விக்கொத்துகள் தயாரிக்கப்பட்டு உற்பத்தி உறுப் புக்களுக்கு தபால்மூலமோ அல்லது நேரடியாகவோ விநியோகிக்கப் படும். இவை உறுப்புக்களினுல் இரகசியமாக நிரப்பப்பட்ட பின்னர் மீளப் பெற்றுக்கொள்ளப்படும். இம்முறையே பொதுவாக ஆராய்ச்சி நிறுவனங்களினுல் கையாளப்படும் முறையாகும். இங்கு கேள்விக்கொத் தின் தரம், தகவல்களின் நம்பத்தகவு என்பனவே நோக்கத்தை வெற்றியாக்கும்.

அநுகூலம், பிரதிகூலம்; இது செலவைக் குறைக்கும், பரந்த பிரதே சத்தைப் பிரதிபலிக்கும், உறுப்புக்களைச் சுதந்திரமாக விடையளிக்க வசதி செய்யும் முறையாகும். ஆனால் நேரத்துக்குக் கிடைக்காத, முற்றாக நிரப்பப்படாத, பிழையான தகவல்களைக் கொண்டவையாகக் கேள்விக் கொத்துக்கள் காணப்படலாம்.

ஒரு கேள்விக்கொத்தில் அமையவேண்டியவை பின்வருவனவாகும்.

(i) பருமனில் சிறிதாயிருத்தல்.

(ii) கேள்விகள் எளியனவாக, விளக்கமானவையாக, பல பொருளற் றனவாக, தர்க்கரீதியான வரிசையிலுள்ளனவாகவிருத்தல்.

(iii) சுருக்கமான விடைகளை (ஆம், இல்லை) தரக்கூடியனவாக, சுருக்கமானவையாக கேள்விகள் இருத்தல்.

சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகள் திருப்தி செய்யவேண்டியவை பின் வரு வனவாகும்:

(i) நம்பத்தகவு (Reliablity)
(ii) பொருத்தம் (Suitablity)
(iii) போதுமானவை (Adequacy)

கணக்கிடல் **(Enumeration):**

சேகரிக்கப்பட்ட தரவுகள் அடுத்தபடியாகக் கணக்கிடப்படல்வேண் டும். இதற்கு இரண்டு முறைகள் கையாளப்படும்.

(i) தொகை மதிப்பீடு (Census)
(ii) மாதிரி மதிப்பீடு (Sample)

2.2. வகுப்பாக்கல், அட்டவணைப்படுத்தல்

பச்சைத்தரவு **(Row data):**

பொதுவான தரவுக் கட்டங்களை நோக்கும்போது அவை புதிதாகப் பெறப்பட்டிருப்பின் அவற்றிலுள்ள புள்ளிவிபரங்கள் யாவும் ஒழுங் காகவோ, கூட்டமாகவோ அல்லது வெவ்வேறாகப் பிரிக்கப்பட்டவை யாகவோ இருப்பதில்லை. இவ்வாறான தரவுக்கூட்டங்கள் பச்சைத் தர வுகள் எனப்படும். அதாவது இத்தரவுக்கூட்டத் தரவுகள் ஏகவின மற்றவையாகவிருக்கும்.

வகுப்பாக்கல் **(Classification):**

ஒரு பச்சைத் தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களை அவற்றின் ஏகவினத் தன்மைக்கு அமைவாகவோ அல்லது சிறப்பியல்புகளுக்கமைவாகவோ அல்லது அறிமுகப்படுத்தப்பட்ட புள்ளிவிபர மாறிகளின் வீச்சுக்களுக் கமைவாகவோ பிரித்து வேறாக்குதல் வகுப்பாக்கல் எனப்படும். இவ் வாறு பெறப்படும் ஒவ்வொரு உபகூட்டமும் ஏகவினமான தரவுகளைக் கொண்டவையாக விருத்தல் வேண்டும்.

வகுப்பாக்கல் விதிகள் **(Rules of Classitication):**

ஒரு பச்சைத்தரவு வகுப்பாக்கப்படுகையில் பின்வரும் விதிவகைகள் பின்பற்றப்படும்.

ஒவ்வொரு தரவினதும்

(a) பூரணத்துவம் (Exhaustive)
(b) தனியாக்கப்படல் (Mutually Exclusive)
(c) பொருத்தம் ஒற்றுமை (Suitablity)
(d) நிலையான தன்மை (Stability)

(e) ஏகவினத்தன்மை (Homogenity)

(f) இணக்கம் (Flexiblity)

சில பொதுவான வகுப்பாக்கல் விதங்கள் பின்வருவனவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்டவையாகவிருக்கலாம்.

(a) புவியியல் பிரதேச ரீதியானவை

(b) வரிசை, உலக, சரித்திர சம்பந்தமானவை

(c) பண்பு சிறப்பியல்புகளுக் கமைவானவை

(d) எண் பெறுமான, அளவீட்டு வகைகள்.

அட்டவணைப்படுத்தல் (Tabulation):

வகுப்பாக்கப்பட்ட தரவுக்கூட்டங்கள் தொடர்ந்த பகுப்பாய்வுக்கோ அன்றி மேலோட்டமான விளக்கமளித்தலுக்கோ ஒழுங்காக வெளிப்படுத்தப்படல் அவசியமானதாகும். எனவே வகுப்பாக்கப்பட்ட தரவுகளைத் தெளிவாகவும், சுருக்கமாகவும் சிறப்பியல்புகளுக்கேற்ப வெளிப்படுத்துவதே அட்டவணைப்படுத்தலின் நோக்கமாகும்.

2.3. மீடிறன் பரம்பல்கள் (Frequency distributions)

தரவுக்கூட்டங்களின் வகுப்பாக்கலும், அட்டவணைப்படுத்தலும் ஆரம்ப புள்ளியியலில் மீடிறன் பரம்பல்களை அமைப்பதன்மூலம் நடத்தப்படுகின்றன.

எண்ணுருவில் ஒருமுகப்படுத்தப்படாத தரவுகளைப் பந்தி உருவில் அமைத்து அவற்றைத் திட்டமாக வகுப்பாக்கிப் பெறப்படுவதே மீடிறன் பரம்பல்களாகும். தரவுகள் பல தொகுதிகளாகவோ அல்லது வகுப்புக்களாகவோ வேறுக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு தொகுதிக்குமுரிய தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவதானிக்கப்பட்டு வரவுக்குறிகளின் (Tally marks) மூலம் பதியப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு வகுப்புக்குமுரிய தரவுகளின் எண்ணிக்கை அவ்வகுப்புக்கான மீடிறன் (Frequeney) எனப்படும். ஒவ்வொரு வகுப்பும் வகுப்பாயிடைகள் (Class intervals) எனப்படும். எல்லாம் சம அகலங்களை (மேல், கீழ் எல்லைகளின் வித்தியாசம்) கொண்டிருப்பின் அவற்றின் அகலங்கள் சம அகலங்களெனவும், வகுப்பாயிடைகள் சம அகல வகுப்பாயிடைகள் எனவும் சொல்லப்படும்.

மீடிறன் பரம்பல்களை யமைத்தல் (Construction of Frequency tables)

ஒரு பச்சைத் தரவுக்கூட்டம் மீடிறன் பரம்பலாக மாற்றப்படுவதற்குப் பின்வரும் படிகளினூடாக அணுகப்படும்.

(i) வீச்சு (Range):

தரவுக்கூட்டமொன்றின் மிகப்பெரிய, மிகச்சிறிய பெறுமானங்களின் வித்தியாசம் அத்தரவுக் கூட்டத்தின் வீச்சு எனப்படும். இது முதலில் அறியப்படும்.

(ii) வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை: (Number of class intervals)

ஒரு தரவுக்கூட்டத்தின் வீச்சுப் பெறுமானத்தை வைத்துக்கொண்டே வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை தீர்மானிக்கப்படும். மேலும் அவை

(a) மொத்த உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கை

(b) உறுப்புக்களின் எண் பெறுமானம்

என்பனவற்றிலும் தங்கியிருக்கும். பொதுவாக வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை அவற்றின் பருமனுக்குச் சமமாயிருக்குமாறு தேர்ந்தெடுக்கப்படும். அநேகமான மீடிறன் பரம்பல்கள் அவற்றின் எல்லா வகுப்பாயிடைகளினதும் பருமன்கள் சமமாயிருக்குமாறே தெரிவு செய்யப்படுகின்றன.

ஸ்ரேஜ் என்பவர் வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை பின்வருமாறிருக்கலாமென அபிப்பிராயம் தெரிவித்தார். இது ஸ்ரேஜ் விதி எனப்படும்.

$$K = 1 + 3.222 \text{ மட}_{10} N$$

இங்கு N திரட்டு மீடிறனும், K வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கையும் ஆகும். K கிட்டிய முழு எண்ணுக்குத் திருத்தப்படும்.

(iii) வகுப்பாயிடைகளின் அகலம்: (width of class intervel)

எல்லா வகுப்பாயிடைகளிலும் சம அகலங்களைக் கொண்டிருக்க வேண்டுமெனத் தீர்மானிக்கப்படின்

$$\text{அகலம்} = \frac{\text{வீச்சு}}{\text{வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கை}}$$

ஸ்ரேஜ் விதியின்படி,

$$W = \frac{R}{1 + 3.222 \text{ மட}_{10} N}$$

(iv) மத்திய பெறுமானம் (Mid Value):

வகுப்பாயிடைகள் ஒவ்வொன்றும் வசதியானதொரு மையப் பெறுமானத்தைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

(v) வரவுக்குறி (Tally Mark);

வகுப்பு மீடிறன்களைப் பெறுவதற்கு வரவுக்குறிகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வரவுக்குறிகள் N என்ற வடிவத்திலுள்ள, ஒவ்வொன்றும் ஐந்து தரவுகளைக் குறிக்கும் குறியீடுகளால் தரப்படுகின்றன.

(vi) மீடிறன் (Frequency):

ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையிலுமுள்ள வரவுக்குறிகள் கணக்கிடப்பட்டு அவை மீடிறன்களாகக் குறிக்கப்படுகின்றன.

உதாரணம் 2.1; ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் இருபத்தைந்து தொழிலாளர்களின் நாளாந்த வருமானம் ரூபாக்களில் பின்வரும் பச்சைத் தரவுக் கூட்டத்தினுல் தரப்படுகிறது.

15	14	16	21	21	17	20	18	13
14	20	17	14	13	19	19	22	
16	15	16	22	18	18	17	19	

இதன் மீடிறன் பந்தி அட்டவணை பின்வருமாறிருக்கும்.

கூலி (ரூபாக்களில்) X	வரவுக் குறி	மீடிறன் F
13	II	2
14	III	3
15	II	2
16	III	3
17	III	3
18	III	3
19	III	3
20	II	2
21	II	2
22	II	2

இங்கு கூலியை புள்ளிவிபரமாறி X குறிக்கிறது. இம் மீடிறன் பரம்பல் ஓர் பின்னகப் பரம்பலாகக் கருதப்படலாம். ஏனெனில் X இனது பெறுமானங்கள் யாவும் பின்னகமாயுள்ளன. இவ்வாறு பெரிய தரவுக் கூட்டங்களுக்கு மீடிறன் பரம்பல் அமைப்பது இலகுவானதல்ல. எனவே பின்வரும் வகையிலான, முன்னர் விபரிக்கப்பட்ட படிகளுடனுன, தொடர்ச்சியான பெறுமானங்களைக் கொண்ட புள்ளிவிபரமாறியாக X உள்ள, மீடிறன் பரம்பல் அமைக்கப்படலாம்.

கூலி வகுப்பு X	வரவுக்குறி	மீடிறன் F	மத்திய பெறுமானம்
13 — $<$ 15	~~IIII~~	5	14
15 — $<$ 17	~~IIII~~	5	16
17 — $<$ 19	~~IIII~~ I	6	18
19 — $<$ 21	~~IIII~~	5	20
21 — $<$ 23	IIII	4	22

இங்கு கூலிவகுப்பையே புள்ளிவிபரமாறி X குறிக்கிறது. இருந்தபோதிலும் பகுப்பாய்வின்போது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடையினதும் மையப் பெறுமானமே அவ்வகுப்புக்கான மாறிப் பெறுமானமாகக் கொள்ளப்படும்.

இம்மீடிறன் பரம்பலைப் பாவித்து தரவுக்கூட்டத்தின் இயல்புகளை மேலோட்டமாக விளக்கமுடியும். உதாரணமாக 17 ரூபாவும், அதற்குக் கூடவும் ஆனல் 19 ரூபாவிலும் குறைவாகவும் ஊதியம் பெறுவோரின் எண்ணிக்கை 6 என்பதை அட்டவணை காட்டுகிறது.

திரட்டுமீடிறன் (Cumulative Frequency):

மீடிறன்களை வரிசையாக தொடர்ச்சியாக கூட்டிப் பெறப்படுபவை திரட்டு மீடிறன்களாகும். இவை,

(a) குறைந்த வகை திரட்டு மீடிறன் (Less than type)

(b) கூடியவகை திரட்டு மீடிறன் (Greater than type) என இரு வகைப்படும்.

இவை முறையே புள்ளிவிபரமாறியின் பெறுமானங்களின் ஏறு வரிசையிலும், இறங்கு வரிசையிலும் கூடப் பெறப்படுபவையாகும்.

உதாரணம் 2.2; உதாரணம் 2.1 இனைக் கருதுவோம்.

கூலி வகுப்பு	மீடிறன்	குறைந்தவகை திரட்டு மீடிறன்	கூடியவகை திரட்டு மீடிறன்
12 — $<$ 15	5	5	25
15 — $<$ 17	5	10	20
17 — $<$ 19	6	16	15
19 — $<$ 21	5	21	9
21 — $<$ 23	4	25	4

இத்திரட்டு மீடிறன் பரம்பலில் இருந்து பின்வரும் கேள்விகளுக்கு விடைகாண முடியும்.

(a) 17 ரூபாவிலும் குறையக் கூலி பெறுவோர், 10 பேர் என்பது மூன்றும் நிரலிலிருந்து பெறப்படும்.

(b) 19 ரூபாவும், அதிலும் கூட கூலிபெறுவோர், 9 பேர் என்பது நான்காம் நிரலிலிருந்து பெறப்படும்.

(c) 15 ரூபாவும், அதிலும் கூட ஆனுல் 21 ரூபாவிலும் குறைய கூலி பெறுவோர் என்பது $5+6+5=16$ என இரண்டாம் நிரலிலிருந்தோ அல்லது $21-5=16$ என மூன்றும் நிரலிலிருந்தோ அல்லது $20-4=16$ என நான்காம் நிரலிலிருந்தோ பெறப்படும்.

மீடிறன் பரம்பலின் வகைகள்:
(Types of frequency distribution)

வகுப்பாயிடைகளின் அமைவினை அடிப்படையாகக் கொண்டு மீடிறன் பரம்பல் இருவகைப்படுத்தப்படும்.

(a) தொடர்ச்சியான வகை (Continuous case)

(b) பின்னகமான வகை (discreate case)

தொடர்ச்சியான வகை பரம்பல்கள் எனப்படுபவை அடுத்தடுத்து வரும் இரு வகுப்பாயிடைகளில் முறையே மேல் எல்லை, கீழ் எல்லை என்பன ஒரே பெறுமானமுடையவையாக வுள்ளவையாகும். ஆனுல் சில பரம்பல்களில் அவை சமமற்றிருக்கலாம். அவ்வாருன பரம்பல்கள் தொடர்ச்சியானதும் பின்னகமானதும் எனப்படும்.

உதாரணம்: 2.3; மேலே விளக்கப்பட்ட உதாரணம் தொடர்ச்சியான மீடிறன் பரம்பலுக்கானதாகும், பின்னகமான மீடிறன் பரம்பல், தொடர்ச்சியானதும் பின்னகமானதுமான மீடிறன் பரம்பல் என்பன இங்கு தரப்படுகின்றன.

பின்னகப் பரம்பல்

மாறி	மீடிறன்
15	6
25	8
35	14
45	12
55	7

தொடர்ச்சியும் பின்னகமானதுமான பரம்பல்

மாறிவகுப்பு	மீடிறன்
0 — 20	4
21 — 40	6
41 — 60	7
61 — 80	5

இருமாறி மீடிறன் பரம்பல்கள்:
(Bi-Variate frequency distribution)

சில தரவுக் கூட்டங்களில் மீடிறன்கள் இரண்டு புள்ளிவிபர மாறிகளுடன் சேர்க்கையாகப் பெறப்படக்கூடியவையாகவிருக்கும். இவற்றுக்கான மீடிறன் பரம்பல் பின்வரும் உதாரணத்திஞல் விளக்கப்படும்.

உதாரணம்: 2.4;

Y / X	$10-<20$	$20-<30$	$30-<40$	மொத்தம்
$10-<15$	5	6	4	15
$15-<20$	9	7	2	18
$20-<25$	6	5	6	14
மொத்தம்	20	18	12	50

தொடர்பு மீடிறன் பரம்பல்கள்:
(Relative frequency distribution)

ஒரு மீடிறன் பரம்பலில் ஒவ்வொரு வகுப்பினதும் மீடிறன் சதவீதத்திற்கோ அல்லது நியமமாக்கப்பட்ட எண்ணுக்கோ மாற்றப்பட்டு தரப்படுமாயின் அம்மீடிறன்களைக் கொண்ட பரம்பல் தொடர்பு மீடிறன் பரம்பல் எனப்படும்.

உதாரணம்: 2.5; உதாரணம்: 2.1 இனை எடுத்துக்கொள்வோம். இதில் நியமமாக்கப்பட்ட எண் 50 எனக் கொள்க.

கூலி வகுப்பு	மீடிறன்	நியம எண்ணுக்கு தொடர்பு மீடிறன்	சதவீதத்திற்கு தொடர்பு மீடிறன்
$13-<15$	5	10	20
$15-<17$	5	10	20
$17-<19$	6	12	24
$19-<21$	5	10	20
$21-<23$	4	8	16
மொத்தம்	25	50	100

ஓரமீடிறன் பரம்பல்கள்:
(Marginral Frequency distributions)

இருமாறி மீடிறன் பரம்பல்களிலிருந்து குறித்த ஒரு மாறிக்காக அமைக்கப்படுபவை ஓரமீடிறன் பரம்பல் அல்லது தனிமீடிறன் பரம்பல் எனப்படும்.

x, y என்பன தரப்பட்ட இரு புள்ளி விபரமாறிகளாகவும் அவற்றுக்கான இருமாறி மீடிறன் பரம்பலும் தரப்படின் x இனைக் கவனிக்காது y இன் மீடிறன்களைத் திரட்டிப் பெறப்படுவது y இனதும், y இனைக் கவனிக்காது x இன் மீடிறன்களைத் திரட்டிப் பெறப்படுவது x இனதும் ஓரமீடிறன் பரம்பல்களெனப்படும்.

உதாரணம் 2 . 6; உதாரணம் 2 . 4 இனை எடுத்துக்கொள்வோம். x , y என்பனவற்றின் ஓரமீடிறன் பரம்பல்கள் பின்வருமாறிருக்கும்.

X	F
10—<15	15
15—<20	18
20—<25	17

Y	F
10—<20	20
20—<30	18
30—<40	12

நிபந்தனை மீடிறன் பரம்பல்கள்:
(Conditional Frequency distributions)

இருமாறி மீடிறன் பரம்பலில் குறித்தவொரு மாறிக்கு, மற்ற மாறியின் நிலையான பெறுமானத்துக்கோ அல்லது நிலையான வகுப்புக்கோ மீடிறன்களைத் தொகுத்துப் பெறப்படுபவை நிபந்தனை மீடிறன் பரம்பல்களாகும்.

உதாரணம்: 2 . 7; உதாரணம்: 2 . 4 இனை எடுத்துக்கொள்வோம்.

X இனது நிபந்தனைப் பரம்பல்கள் பின்வருவனவாகும்.

$10 < y < 20$ இற்கு

X	F
10—<15	5
15—<20	9
30—<25	6

$20 < y < 30$ இற்கு

X	F
10—<15	6
15—<20	7
20—<25	5

$30 \leq y < 40$ இற்கு

X	F
10—<15	4
15—<20	2
20—<25	6

y இனது நிபந்தனைப் பரம்பல்கள் பின்வருவனவாகும்.

$10 \leq x < 15$ இற்கு

Y	F
10—<20	5
20—<30	6
30—<40	4

$15 \leq x < 20$ இற்கு

Y	F
10—<20	9
20—<30	7
30—<40	2

$20 \leq x < 25$ இற்கு

Y	F
10—<20	6
20—<30	5
30—<40	6

மீடிறன் அடர்த்தி (Frequency density):

ஓர் வகுப்பாயிடையின் மீடிறன் அடர்த்தி என்பது அவ்வகுப்பில் ஓரலகுக்கான உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையாகும். இவற்றைக் கணிப்பதன் மூலம் / அடர்த்திகூடிய வகுப்பாயிடையை அதாவது தரவுக் கூட்டத்தின் செறிவு வீச்சினை அறிய முடியும்.

மீடிறன் அடர்த்தி = வகுப்பு மீடிறன்/வகுப்பின் பருமன்

ஓர் மீடிறன் பரம்பலில் அமைந்திருக்க வேண்டியவை.

(i) புள்ளியியல் கேள்வியை, பொருத்தத்தை திருப்தி செய்யுமாறு விஞ்ஞான முறையில் தயாரிக்கப்பட்டிருத்தல்.

(ii) முற்றுக சுயமாக, இலகுவாக விளங்கக்கூடியதாக இருத்தல்.

(iii) நீண்டு ஒடுங்கியதாகவோ அல்லது குறுகி அகன்றதாகவோ இல்லாததாகவிருத்தல்.

(iv) தர்க்கரீதியாக உறுப்புக்கள் ஒழுங்காக்கப்பட்டிருத்தல்;

3. தரவுகளின் குறித்துக்காட்டல், பகுப்பாய்வு, முடிவுகளில் விளக்கமளித்தல்

(Presentation, analysis & Interpretation of data)

3 . 1. குறித்துக்காட்டல் அல்லது சமர்ப்பித்தல் (Presentation)

வகுப்பாக்கி அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட தரவுக் கூட்டத்தினை, மேலோட்டமான விளக்கமளித்தலுக்காக மேலும் வெளிக்கொணர்தலே குறித்துக்காட்டல் அல்லது சமர்ப்பித்தல் எனப்படும். இதற்கு கேத்திரகணித உருவங்கள். வரைபுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இங்கு எண்பெறுமான தரவுகள் மட்டுமன்றி எண்பெறுமானமற்ற தரவுகளும் பயன்படுத்தப்படலாம். உருவங்கள், வரைபுகளுக்கேற்ப இவை இரு வகைப்படுத்தப்படும்.

(a) வரிப்படமூலம் குறித்தல்
(Diagramatic Presentation)

(b) வரைபுமூலம் குறித்தல்
(Graphical Presentation)

இதில் முதலாவது முறை பலவகைத் தரவுகளுக்குப் பயன்படுத்தக் கூடியதாகவிருந்த போதிலும் இரண்டாவது முறையே தொடர்ந்த பகுப்பாய்வுகளுக்கு மிக உபயோகப்படுகிறது. பொதுவாக தரவுகளைத் திரட்டுவதும், அவற்றைப் பகுப்பாய்வுக்குத் தயார் செய்வதும் குறித்துக் காட்டலாகும்.

3 . 2. வரைபடங்கள்மூலம் தரவுகளைக் குறித்தல்

கேத்திர கணித உருவங்களின்படி, பரிமாணங்களின்படி வரிப்படங்கள் பின்வருமாறு பாகுபடுத்தப்படும்.

(i) ஒருபரிமாண வரிப்படங்கள் (One dimentional diagrams)
(ii) இருபரிமாண வரிப்படங்கள் (Two dimentional diagrams)
(iii) முப்பரிமாண வரிப்படங்கள் (Three dimentional diagrams)
(iv) சித்திரவரையங்கள் (Pictograms)
(v) புள்ளிவிபர நிலப்படங்கள் (Cartograms)

ஒரு பரிமாண வரிப்படம்—சலாகை வரிப்படம் (Bar diagram):

இவை ஒரே திசையில் நீளத்தில் அளக்கப்படுவதால் சலாகைகளால் அல்லது பார்களால் குறிக்கப்படுகின்றன. சலாகை வரிப்படங்களின் வகைகள் பின்வருவனவாகும்.

(a) எளிய சலாகை வரிப்படம் (Simple)
(b) கூறுக்கப்பட்ட சலாகை வரிப்படம் (Sub-devided)
(c) கூட்டு சலாகை வரிப்படம் (Multiple)
(d) விகிதாசார சலாகை வரிப்படம் (Percentage)
(e) விலகல் சலாகை வரிப்படம் (Deviation)

இச்சலாகை வரிப்படங்களில் எண்பெறுமானங்களுக்கு விகிதசமமாகுமாறு நீளங்களையும், சம அகலங்களையும் கொண்ட செவ்வகங்கள் அல்லது செவ்வக கூட்டங்கள் சம இடைவெளிகளில் கிடையாகவோ அல்லது நிலைக்குத்தாகவோ வரையப்படும். நடு மூன்று வகைகளிலும் ஒவ்வொரு மட்டத்திலும் தரவுகள் வேறுக்கப்படுவதற்கு நிறங்கள் அல்லது குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவற்றுக்கான சுட்டிகள் ஒவ்வொரு படத்திலும் காட்டப்படும்.

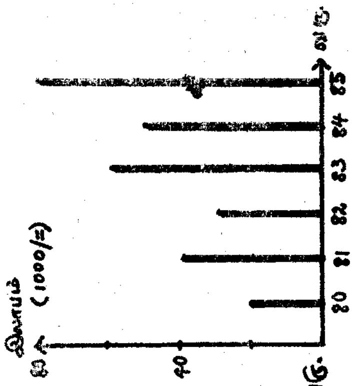
எளிய சலாகை வரிப்படம்:

இவை ஒற்றை மாறியின் வெவ்வேறு மட்டங்களைக் காட்டுவதற்கு வரையப்படும். உதாரணமாக விற்பனை, உற்பத்தி, சனத்தொகை போன்றன இடங்களுக்கோ, காலங்களுக்கோ அமைவாக உள்ள தரவுக் கூட்டங்கள்.

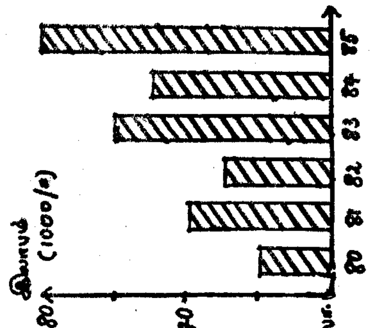
உதாரணம் 3 . 1: ஒரு நிறுவனத்தின் இலாபம் பற்றிய விபரம் 1980இலிருந்து 1985 வரை பின்வருமாறு இருந்தது.

வருடம்	(1000 ரூபாக்களில்) இலாபம்
1980	20
1981	40
1982	30
1983	60
1984	50
1985	80

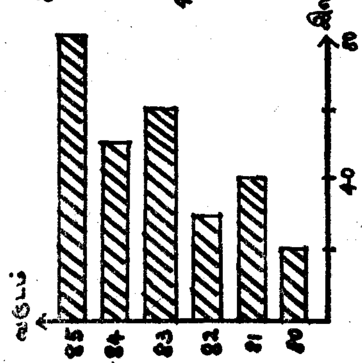
இவ்வகைதரவுகளுக்கு சிலவேளைகளில் கோட்டுவரைப் படங்களும் (Line graphs) வரையப்படுகின்றன. F1, F2 என்பன எளிய சலாகை வரிப் படங்களையும், F3 கோட்டுவரைப் படத்தையும் காட்டுகிறது.



F 3



F 2



F 1

கூறுக்கப்பட்ட, கூட்டுச் சலாகை வரிப் படங்கள்:

இங்கும் மாறியின் வெவ்வேறு மட்டங்கள் ஆனால் ஒவ்வொரு மட்டத்திலும் கூறுகள் காணப்படும் வகைக்கே வரையப்படுகின்றன.

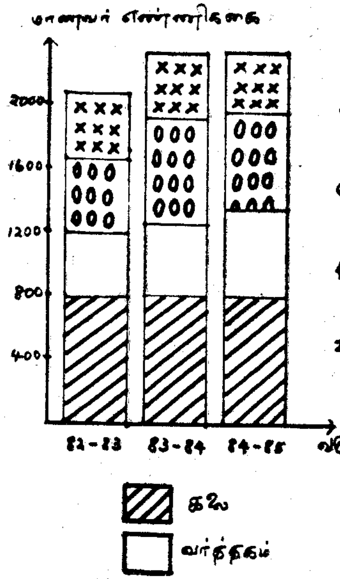
உதாரணம்: 3.2: யாழ்ப்பாண பல்கலைக்கழகத்தில் 1982/83, 1983/84, 1984/85 எனும் கல்வியாண்டுகளில் கல்வி பயின்றுகொண்டிருந்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை பாடநெறிகள் அடிப்படையாக, அண்ணளவாக பின்வருமாறிருந்தது.

மாணவர் எண்ணிக்கை

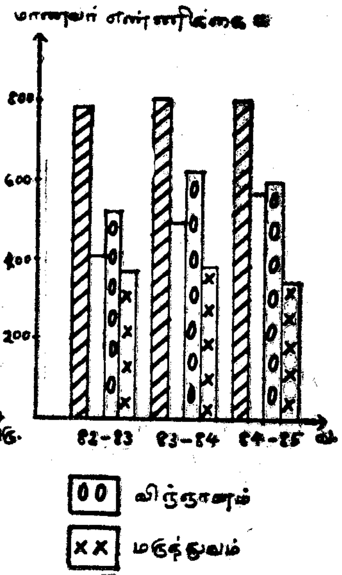
வருடம்	பாடநெறிகள்				மொத்தம்
	கலை	வர்த்தகம்	விஞ்ஞானம்	மருத்துவம்	
1982/83	790	410	520	370	2090
1983/84	810	490	630	380	2310
1984/85	800	570	600	340	2310

(மூலம்: பல்கலைக்கழக மானியங்கள் ஆணைக்குழு)

கூறுக்கப்பட்ட, கூட்டுச் சலாகை வரிப்படங்கள் இவ்வுதாரணத்துக்கு முறையே F4, F5 என்பனவற்றால் காட்டப்படுகின்றன.



F 4



F 5

விகிதாசார சலாகை வரிப்படம்:

இது ஒரு மாறியின் வெவ்வேறு மட்டங்கள் கூறுகளுடன் ஆனல் ஒவ்வொரு மட்டமும் நூற்று வீதத்தில் கூறுகளுடன் தரப்பட்டவற்றுக்கு வரையப்படும். இவை ஒவ்வொரு மட்டத்தினதும் தொடர்பு மாறலை ஆராய்வதற்குப் பயன்படுகின்றன.

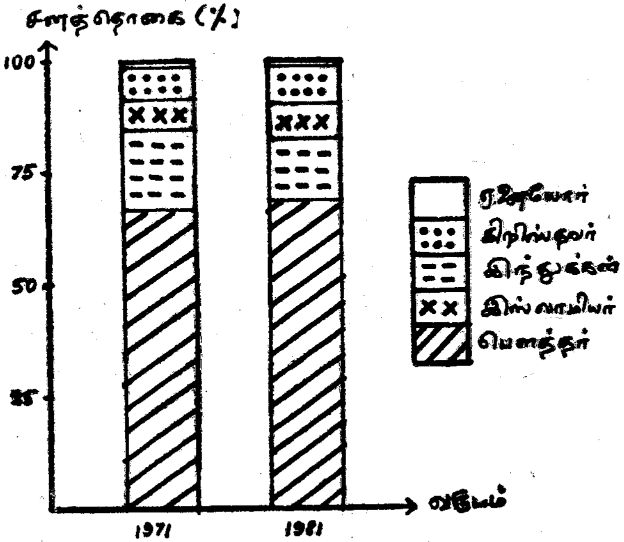
உதாரணம்: 3.3; இலங்கையின் சனத்தொகை 1971ஆம், 1981ஆம் ஆண்டுகளில் குடிசன தொகை மதிப்பீட்டின்போது பின்வருமாறிருந்தது.

சனத்தொகை (1000இல்)

வருடம்	மதங்கள்				
	பௌத்தர்	இந்துக்கள்	இஸ்லாமியர்	கிறிஸ்தவர்	ஏனையோர்
1971	8536.9	2238.7	901.8	1004.3	8.3
1981	10288.3	2297.8	1121.7	1130.6	8.3

(மூலம்: புள்ளிவிபர தொகை மதிப்பீட்டுத் திணைக்களம்)

மதங்கள்	1971			1981		
	1000இல்	%இல்	திரட்டு%	1000இல்	%இல்	திரட்டு%
பௌத்தர்கள்	8536.9	67.27	67.27	10288.3	69.30	69.30
இந்துக்கள்	2238.7	17 64	84.91	2297.8	15.48	84.78
இஸ்லாமியர்கள்	901.8	7.11	92.02	1121.7	7.55	92.33
கிறிஸ்தவர்கள்	1004.3	7.91	99.93	1130.6	7.61	99.94
ஏனையோர்	8.3	0.07	100.00	8.3	0.06	100.00
மொத்தம்	12690.0	100.00	—	14846.8	100.00	—



F 6

விலகல் சலாகை வரிப்படம்:

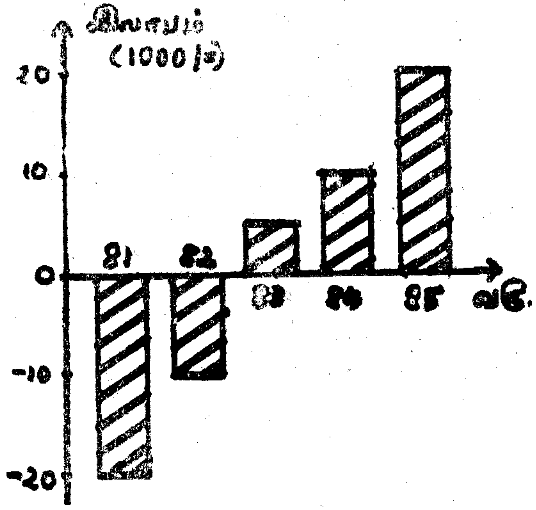
இவ்வகை படங்கள் தேறிய அளவீடுகளை ஒரு மாறியின் வெவ்வேறு மட்டங்களில் காட்டுவதற்குப் பயன்படுகின்றன. உதாரணமாக அதிகம், இலாபம், பற்றுக்குறை, நட்டம் போன்றன இப்படங்களினுல் காட்டப்படும்.

உதாரணம்: 3.4; ஒரு நிறுவனத்தின் 1981இலிருந்து 1985 வரையிலான வரவு, செலவுகளைப் பின்வரும் அட்டவணை தருகிறது.

ஆயிரம் ரூபாக்களில் வரவு, செலவு

வருடம்	வரவு	செலவு	இலாபம்
1981	50	70	—20
1982	60	70	—10
1983	80	75	+05
1984	100	90	+10
1985	120	100	+20

இங்கு இலாபத்திற்கான விலகல் சலாகை வரிப்படம் F7இல் தரப்பட்டுள்ளது.



F 7

இருபரிமாண, முப்பரிமாண வரிப்படங்கள்:

இருபரிமாண வரிப்படங்கள் இருதிசைகளில் அளக்கப்படுவதால் வட்டங்கள், சதுரங்கள், செவ்வகங்கள் போன்றனவற்றின் பரப்புகளால் தரவுகள் குறிக்கப்படுகின்றன. ஒரு வட்டத்தினுள்ளே கூறுக்கிக் குறிக் கப்படும் படங்கள் பரிதி வரைப்படங்கள் (Pie diagrams) எனப்படும். முப்பரிமாண வரிப்படங்கள் மூன்று திசைகளில் அளக்கப்படுவதால் செவ்வக குற்றிகள், கனங்கள், உருளைகள் என்பனவற்றின் கனவளவு களால் தரவுகள் குறிக்கப்படுகின்றன.

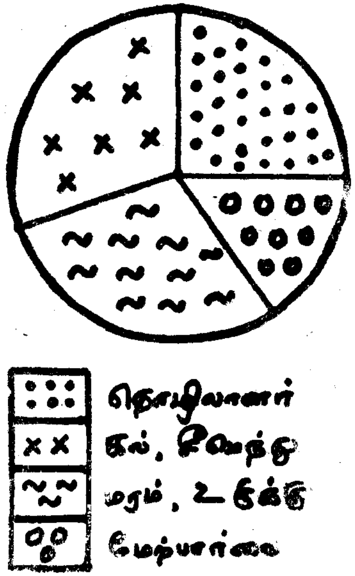
பரிதி வரைப்படம் (Pie diagrams)

தரவின் கூறுகளின் விகிதசமத்திற்கேற்ப வட்ட பரிதியைப் பாகை களால் பிரித்துப் பரப்புகளில் (ஆரைச் சிறைகளில்) குறிக்கப்படுபவை பரிதி வரைப்படங்கள் ஆகும்.

உதாரணம்: 3,5; ஒரு கட்டிட நிர்மாணத்தின்போது செலவுகள் பல்வேறு வகைகளில் நூற்று வீதத்தில் பின்வருமாறிருந்தன.

இதற்கான பரிதி வரைபடம் F 8இல் தரப்படுள்ளது,

செலவு வகை	செலவு வீதம்	பரிதி பாகை
தொழிலாளர்	25%	90
கல், சிமெந்து	30%	108
மரம், உருக்கு	30%	108
மேற்பார்வை	15%	54
மொத்தம்	100%	360



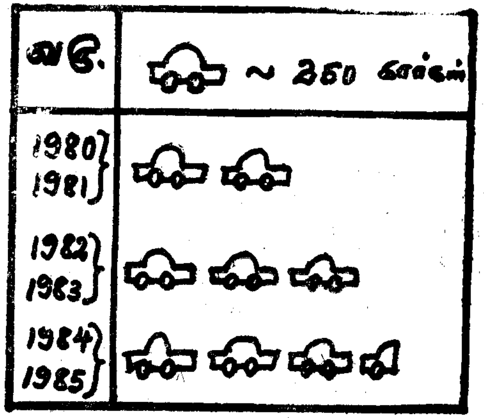
F 8

சித்திர வரையங்கள் (Pictogram):

தரவு கூட்ட மட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் மடங்குகளாக மாற்றப் பட்டு மடங்குகளின் எண்ணிக்கையளவு பொருத்தமான சித்திரங்களை வரைந்து காட்டுதல் சித்திரவரையங்கள் எனப்படும்,

உதாரணம்: 3.6; ஓர் கார் தொழிற்சாலையின் கார் உற்பத்தி 1980—81, 1982—83, 1984—85 எனும் வருடங்களில் முறையே அண்ணளவாக 500, 750, 875 ஆகவிருந்தன.

இதற்கான சித்திர வரையம் F9இல் தரப்பட்டுள்ளது.



F 9

புள்ளி விபர நிலப்படங்கள் (Cartograms)

இவை புள்ளியியல் ரீதியான புறவுருவப் படங்களில் அவற்றுடன் தொடர்பான சனத்தொகை, மழைவீழ்ச்சி போன்றனவற்றைக் குறித்துக்காட்டப் பயன்படும். (இது ஒரு தனியான பகுதியாதலால் இங்கு சேர்த்துக் கொள்ளப்படவில்லை).

3 . 3. வரைபு முறை குறித்துக்காட்டல்கள்

வகுப்பாக்கி அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகள் கேத்திரகணித வரைபுகளாலும் சமர்ப்பிக்கப்படலாம். ஓர் கணிதவியலாளனுக்கு வரிப்படமுறையைவிட வரைபுமுறை முக்கியமானதாகும். ஏனெனில் தொடர்ந்த பகுப்பாய்வுகள் யாவும் கணித வரைபு முறையிலேயே அணுகப்படுகின்றன. வரைபு முறை குறித்துக்காட்டல்கள் பின்வரும் படிகளூடேயே நடைபெறுகின்றன.

(a) இழைவரையம் (Histogram)
(b) மீடிறன் பல்கோணி (Frequency polygon)
(c) மீடிறன் வளையி (Frequency Curve)
(d) திரட்டு மீடிறன் வளையிகள் அல்லது ஒகிவுகள் (Cumulative frequency curves or Ogives)

இழைவரையம்

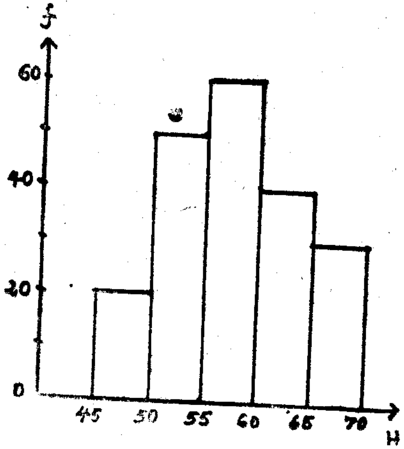
இவை எளிய சலாகை வரிப்படங்களின் நிலைக்குத்தான வகை போல் ஆனால் தொடர்ச்சியானவையாக, அதாவது செவ்வகங்களிடையே இடைவெளிகளின்றி வரையப்பட்டுப் பெறப்படுபவையாகும். சம அகலங்களைக் கொண்ட வகுப்பாயிடைகளுக்கு X அச்சில் சம அகலங்களிலும், வகுப்பு மீடிறன்கள் Y அச்சில் உயரங்களிலும் குறிக்கப்பட்டு செவ்வகங்கள் அமைக்கப்படும். வகுப்பு அகலங்கள் சமமற்ற வகையில் X அச்சில் அகலமும் ஆனால் வகுப்புமீடிறன் செவ்வகத்தின் பரப்புக்கு விகிதசமமாகுமாறு Y அச்சில் உயரமாகவும் குறிக்கப்படும்.

உதாரணம் 3 . 7 ; ஒருபாடசாலையில் கல்விகற்ற 200 மாணவர்களின் உயரங்கள், நிறைகள் பற்றிய விபரங்கள் பின்வரும் இரு மீடிறன் பரம்பல்களினால் தரப்படுகின்றன

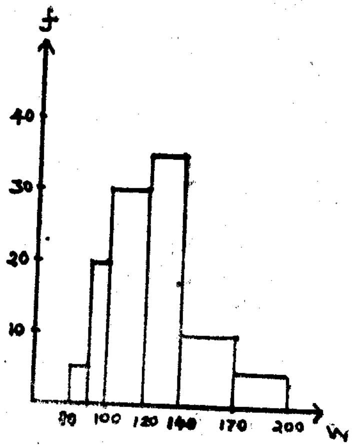
உயர வகுப்பு H (அங்குலங்களில்)	மாணவர் எண்ணிக்கை f
45—50	20
50—55	50
55—60	60
60—65	40
65—70	30

நிறைவகுப்பு W (இறுத்தலில்)	மாணவர் f எண்ணிக்கை
80—90	5
90—100	20
100—120	60
120—140	70
140—170	30
170—200	15

இங்கு உயரபரம்பல் சம அகல வகுப்பாயிடைகளையும் ஆனால் நிறைப்பரம்பல் சமமற்ற அகல வகுப்பாயிடைகளையும் உடையதைக் காணலாம். எனவே நிறைப்பரம்பலின் கடைசி நான்கு வகுப்பாயிடைகளுக்குமான மீடிறன்கள் மாற்றப்படவேண்டியவை. இதில் நடு இரண்டும் முதல் இரண்டை விட இருமடங்கு அகலமுடையதால் மீடிறன் அரை மடங்காகவும். இறுதி இரு வகுப்புக்களின் அகலங்கள் மும்மடங்காக இருப்பதால் மீடிறன் மூன்றிலொருபங்காகவும் மாற்றப்பட்ட மீடிறன்கள் முறையே 5, 20, 30, 35, 10, 5 என்பன ஆகும். மேலே தரப்பட்ட இருவகை பரம்பல்களும் முறையே F 10, F 11, என்பனவற்றில் தரப்பட்டுள்ளன.



F 10

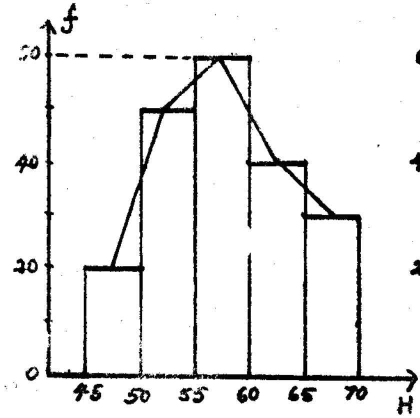


F 11

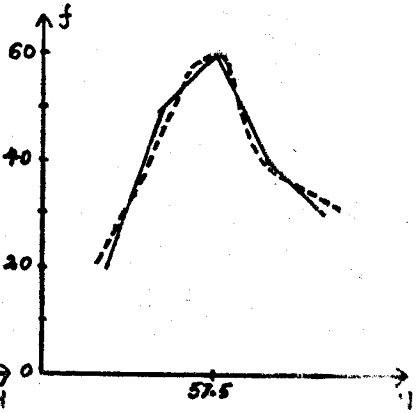
மீடிறன்பல்கோணியும், மீடிறன்வளையியும்:

மாறிக்கு எதிராக மீடிறனை குறித்த புள்ளிகளை, அதாவது இழைவரையத்தின் உச்சிப்புள்ளிகளை ஒழுங்காக அடுத்தடுத்து இணைத்துப் பெறப்படும் உருவம் மூடப்படாத பல்கோணியுருவிலிருக்கும், இது மீடிறன் பல்கோணி எனப்படும். இம்மீடிறன் பரம்பலின் வகுப்பாயிடை அகலங்களைக் குறைக்கும்பொழுது வகுப்பாயிடைகளின் எண்ணிக்கைகள் கூடும். அப்போது மீடிறன் பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடுவதால் மேலும் அகலம் குறைக்கப்படும் பொழுது மீடிறன் பல்கோணி ஓர் வளையியாக உருமாறும். இது மீடிறன் வளையி எனப்படும். அல்லது மீடிறன் பல்கோணியினை மருவிச் செல்லுமாறு வரையப்படும் வளையி மீடிறன் வளையி எனப்படும்.

உதாரணம் 3 . 8 : உதாரணம் 3 . 7 இலுள்ள உயரத்துக்கான மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். மீடிறன் பல்கோணியும், மீடிறன் பல்கோணியும், மீடிறன் வளையியும் F 12, F 13இல் தரப்பட்டுள்ளன. F 13இல் கோட்டுத்துண்ட வளையி மீடிறன் வளையியாகும்.



F 12



F 13

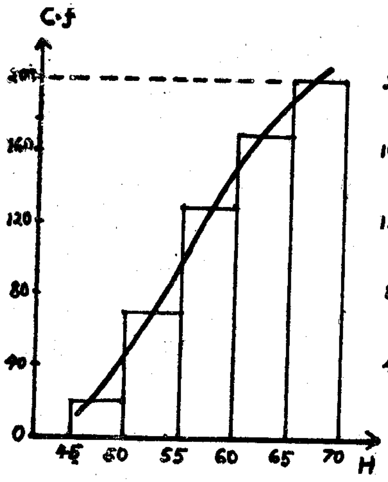
திரட்டு மீடிறன் வளையி அல்லது ஒகிவு :

மீடிறன் பரம்பலொன்றுக்கு இரண்டுவகை திரட்டுமீடிறன்களைக் காணமுடியும் என முன்பு விளக்கப்பட்டுள்ளது. மீடிறன் பல்கோணியிலிருந்து மீடிறன் வளையி எவ்வாறு பெறப்பட்டதோ அதேபோல் இரண்டுவகை திரட்டு மீடிறன்களாலும் அமைக்கப்படும் இருவகை திரட்டு மீடிறன் பல்கோணிகளிலிருந்து முறையே இரண்டுவகை திரட்டு மீடிறன் வளையிகளையும் பெறமுடியும். இவை பொதுவாக ஒகிவு எனவும் சொல்லப்படும்.

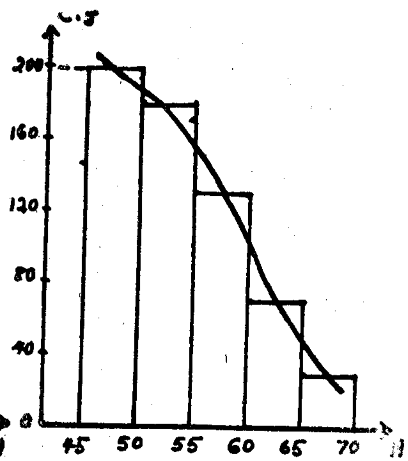
உதாரணம் 3 . 9 : உதாரணம் 3 . 7 இலுள்ள உயரத்துக்கான மீடிறன்பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். திரட்டுமீடிறன் அட்டவணை பின்வருமாறிருக்கும் :

உயர வகுப்பு	மீடிறன்	குறைந்த வகை திரட்டு மீடிறன்	கூடியவகை திரட்டு மீடிறன்
45—50	20	20	200
50—55	50	70	180
55—60	60	130	130
60—65	40	170	70
65—70	30	200	30

குறைந்தவகை, கூடியவகை திரட்டுமீடிறன் வளையிகள் முறையே F14, F15இல் காட்டப்பட்டுள்ளன.



F 14



F 15

முன்னுள்ள அத்தியாயத்தில் தொடர்பு மீடிறன் விளக்கப்பட்டுள்ளது. அதற்கு தொடர்பு திரட்டு மீடிறன் காணமுடியும். இத்தொடர்பு திரட்டு மீடிறனுக்கும் இதேபோன்ற ஒகிவுகளை வரைய முடியும். இதன்மூலம் மீடிறன் பரம்பல்கள் ஒப்பிடப்படுகின்றன.

மீடிறன் வளையிகளின் வகைகள் (Types of frequency Curves)

(a) சமச்சீர் வளையிகள்

(b) சமச்சீரற்ற வளையிகள்

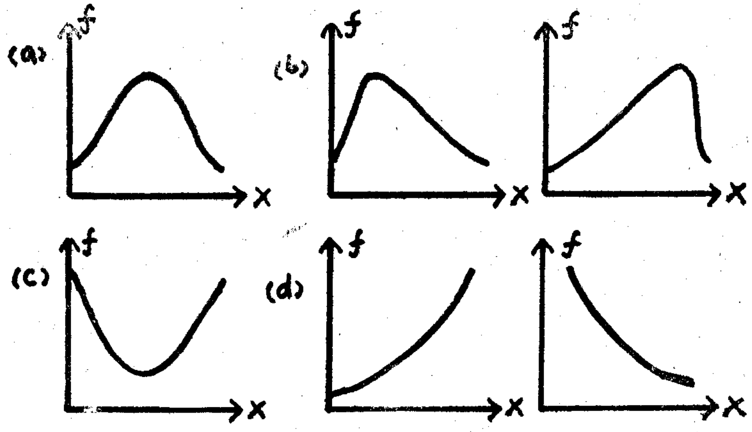
(i) இடப்பக்கம் சரிந்த வளையிகள்

(ii) வலப்பக்கம் சரிந்த வளையிகள்

(c) U — வடிவ வளையிகள்

(d) J — வடிவ வளையிகள்

இவை முறையே படம் F16இல் தரப்பட்டுள்ளன.



F 16

லோறன்ஸ் வளையி (Lorenz Curve):

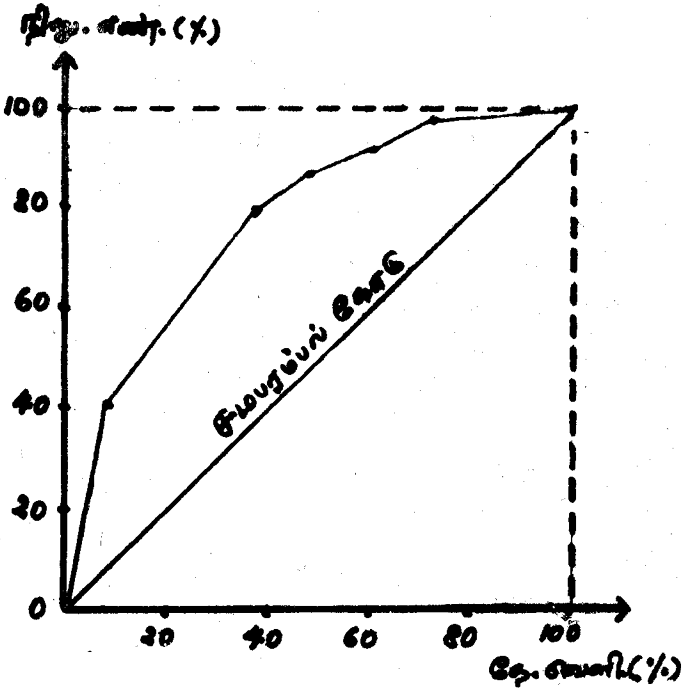
லோறன்ஸ் வளையி தொடர்பு திரட்டு மீடிறன் வளையிக்குத் தொடர்புடையதாகும். ஓர் மீடிறன் பரம்பலில் அதற்குத் தொடர்பாக இன்னுமொரு சிறப்பியல்பு தரப்படுமாயின், அதாவது ஒவ்வொரு வகுப்பாயிடைக்கும் ஒத்த இன்னொரு மாறிப் பெறுமானங்கள் தரப்படுமாயின் மீடிறனுக்கும் அம்மாறிக்குமே இவ்வளையி வரையப்படும். ஆனால் அவை திரட்டாக மாற்றப்பட்டு சதவீதத்தில் வரைவுபடுத்தப்படும்.

உதாரணம் 3 . 10 : ABC கம்பனி பற்றிய விபரங்கள் :

சராசரி தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	தேறிய வெளியீடு (மில்லியன் ரூபாக்களில்)
20 —< 200	205	16
200 —< 600	200	60
600 —< 1000	35	18
1000 —< 1500	30	26
1500 —< 2000	20	26
2000 —< 3000	10	54

நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	திரட்டு மீடிறன்	திரட்டு வீதம்	தேறிய வெளியீடு	திரட்டு வெளியீடு	திரட்டு வீதம்
205	205	41	16	16	8
200	405	81	60	76	38
35	440	88	18	94	47
30	470	94	26	120	60
20	490	98	26	146	73
10	500	100	45	200	100

இங்கு வகுப்பாயிடைகள் கவனத்தில் கொள்ளப்படவில்லை என்பதனைக் கவனிக்கவும்.



F 17

ஓர் குறிப்பிட்ட கணியம் (தேறிய வெளியீடு) குடியினூடு சமமாகப் பரப்பப்பட்டுள்ளதா என வரைபு முறையில் அறிவதற்கு லோறன்ஸ் வளையி பயன்படும்.

சமமாகப் பரம்பியிருக்க வேண்டுமாயின் 41%, — 41%, 81% — 81%, ………, 98% — 98%, 100% — 100% என்றவாறு புள்ளிகள் அமைந்திருக்கவேண்டும். ஆனால் இவ்வுதாரணத்தில் குறிப்பிட்டளவு சமமற்று பரம்பியுள்ளதைக் காணலாம். அதாவது அதிகளவு தேறிய வெளியீடுகள் பெரிய நிறுவனங்களிலிருந்து வருவதைக் காணலாம்.

லோறன்ஸ் வளையிகளின் பயன்கள்:

சேமிப்பு, வரிவழங்கல், இலாபம், வித்தியாசமான குழுக்களில் உற்பத்தி, பரீட்சைப் புள்ளிகள், கூலி ஆகியவற்றின் பரம்பல்களுக்கு இவை மிக உபயோகமானவை.

3.4. தரவுகளின் பகுப்பாய்வு, விளக்கமளித்தல்

வகுப்பாக்கி அட்டவணைப்படுத்தப்பட்ட தரவுகளில் மேலோட்டமாக விளக்கங்களை அளிப்பதற்கு வரிப்பட அல்லது வரைபுமுறை குறித்துக் காட்டல்களைப் பயன்படுத்தலாம். ஆனால் இவ் விளக்கங்கள் கணித விஞ்ஞான முறையில் அநேகமாக அமைந்திருப்பதில்லை. அதாவது திட்டவட்டமான விளக்கங்களைத் தருவதில்லை. எனவே தொடர்ந்த பகுப்பாய்வுகள் அவசியமாகும். இதற்கு முன்பு விளக்கப்பட்டபடி மீடிறன் வளையிகளே பயன்படுத்தப்படுகின்றன. ஏனெனில் ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் வகுப்பாக்கம், ஒழுங்கு, சமர்ப்பணங்களை ஓர் மீடிறன் பரம்பலே கணிதமுறையில் தருகின்றது. எனவே ஓர் தரவுக் கூட்டத்தைப் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கு அதன் மீடிறன் வளையியைப்பற்றி ஆராய்தல் போதுமானதாகும். பொதுவான மீடிறன் வளையியைப் பற்றிய ஆய்வுகள் பின்வருவனவாகும்.

(a) மையநாட்ட அளவை (Measure fo Central Tendency)
(b) விலகல் அளவை (Measure of dispersion)
(e) ஓராய அளவை (Measure of Skewness)
(d) குடில அளவை (Measure of Kurtosis)

மையநாட்ட அளவையும், விலகலளவையும்:

ஓர் தரவுக் கூட்டப் பெறுமானங்களை நோக்குவோமாயின் அவற்றில் பெரும்பாலானவை ஓர் மையப் பெறுமானத்தைச் சூழ்ந்து காணப்படுவதைக் காணலாம். இதனை மீடிறன் வளையியின் வடிவம் இலகுவாகத் தரும். எனவே இம்மையப் பெறுமானத்தை ஆராய்ந் தறிதல் அவசியமாகும். இதனை அளவிடுவதற்காக வரையறுக்கப்படு மளவைகள் மையநாட்ட அளவைகள் எனப்படும். மேலும் பெறுமானங்கள்

குறிப்பிட்டளவு சிதறியும் காணப்படும். எனவே இதன் சிதறல் அல்லது விலகல் பற்றி ஆராய்ந்தறிதலும் அவசியமாகிறது. இதனை அளவிடுவதற்காக வரையறுக்கப்படு மளவைகள் விலகலளவைகள் எனப்படும். இவையிரண்டும் மிக முக்கியமான அளவைகளாகும்.

ஓராய அளவையும், குடில அளவையும்:

ஓர் தரவுக்கூட்ட மையப் பெறுமானம், விலகல் அளக்கப்பட்டாலும், அம்மையப் பெறுமானம் சார்பாகத் தரவுக் கூட்டப் பெறுமானங்கள் சமச்சீரானதா, இல்லையா என்பதை ஆராய்தலும் அவசியமாகும், இதனை மீடிறன் வளையி இலகுவாகக் காட்டியபோதிலும் அளவைகள் ஒப்பீட்டு ரீதியாக முக்கியமானவை. இவ்வளவைகள் ஓராய அளவைகளெனப்படும். மேலும் ஓர் நியம தரவுக் கூட்டம் அல்லது உத்தம தரவுக் கூட்டம் ஓர் உத்தம அல்லது நியம மீடிறன் வளையியைக் கொண்டிருக்கும். எனவே இவ்வளையி சார்பாகத் தரப்படும் பரம்பல்களின் வளையிகள் தட்டையானவையா அல்லது குவிந்து உயர்ந்தவையா என்பதை அறிவது அவசியமாகும். இதற்கான அளவை குடில அளவை எனப்படும்.

முடிவுகளில் விளக்கமளித்தல்;

(Interpretation of Results)

பகுப்பாய்வுபற்றிய விடயங்கள் மேலே விளக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவான நான்குவகை பகுப்பாய்வுகளும் ஒவ்வொரு தரவுக்கூட்டத்திலும் மேற்கொள்ளப்படும். இப் பகுப்பாய்வு முடிபுகள் உதாரணமாக இடை, நியம விலகல், ஓராயம், குடிலம் பற்றிய கணிப்பீடுகள் விளக்கமளித்தலுக்கு எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டு விளக்கங்கள் மேற்கொள்ளப்படும். பின்வரும் அத்தியாயங்களில் இவற்றைக் காணலாம்.

4. மையநாட்ட அளவைகள்

(Measure of central terderey)

ஒரு தரவுக் கூட்டத்தின் மையப்பகுதியில் அவை கொத்தாக இருப்பதனுல் மையநாட்ட அளவை முக்கியமானது என முன்பு விளக்கப்பட்டுள்ளது. அதாவது புள்ளிவிபரமாறியினைப் பிரதிபலிக்கும் தரவுக் கூட்ட மையப் பெறுமானத்தினை அறிவதற்கு மையநாட்ட அளவை பிரயோசனப்படுகிறது.

ஒரு மையநாட்ட அளவையின் உடமைகள் :

(i) புள்ளிவிபரமாறியின் பெறுமானங்களின் அலகினையே, பரிமாணத்தினையே இதுவும் கொண்டிருக்கும்.

(ii) தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் யாவற்றையும் பயன்படுத்தித் திட்டமான சூத்திரத்தினுல் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்,

(iii) எளிய கணிப்பீட்டினைக் கொண்டிருப்பதோடு, மாதிரி ஏற்ற இறக்கம் (Fluctuation) மிகச் சிறிதாக இருக்கும்.

(iv) தொடர்ந்த கணித செய்கைகளுக்கு உட்படுத்தப்படக்கூடியவாறு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்.

பொதுவான மையநாட்ட அளவைகள் :

பொதுவாக வழக்கத்திலுள்ள மையநாட்ட அளவைகள் மூன்று வகையாகும். அவையாவன :

(a) இடை அல்லது சராசரி (Mean or average)

(b) இடையம் (Median)

(c) ஆகாரம் அல்லது முகடு (Mode) என்பனவாகும்.

4.1. இடை

இடைகள் அல்லது சராசரிகள் மூன்று வகைப்படும். அவையாவன:

(a) கூட்டலிடை (Arithmetic mean)

(b) பெருக்கவிடை (Geometric mean)

(c) இசையிடை (Harmonie mean)

கூட்டலிடை :

கூட்டற் சூத்திரத்திஞல் வரையறுக்கப்படும் சராசரிகள் கூட்டலிடைகளாகும். தரப்பட்ட புள்ளிவிபரமாறியினை X எனவும் அது எடுக்கும் பெறுமானங்களை $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ எனவும் கொள்வோம். மேலும்

மீடிறன் பரம்பலில் அவற்றின் மீடிறன்களை முறையே $f_1, f_2 \ldots\ldots f_n$ எனவும் கொள்வோமாயின் AM அல்லது $\overline{X}$ என்பதனால் குறிக்கப்படும் கூட்ட விடை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$\overline{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \ldots + f_n X_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} fi \times i}{\sum_{i=1}^{n} fi} = \frac{\sum fi\ Xi}{N}$$

இங்கு மொத்த மீடிறன் $\sum fi = N$ எனக் குறிக்கப்படும்.

மீடிறனற்று அதாவது தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் ஒற்றைப் பெறுமானங்களாயிருப்பின்:

$\overline{X} = \sum xi/N$ ஆகும்.

உதாரணம் 4.1: ஒரு பாடசாலையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பத்து மாணவர்கள் ஒரு பரீட்சையில் பெற்ற புள்ளிகள் முறையே 45, 55, 50, 75 65, 60, 80, 40, 60, 50 என்பனவாயின் அவற்றின் கூட்ட விடை அதாவது அவர்கள் பெற்ற சராசரிப்புள்ளி,

$$\overline{X} = \frac{1}{10}(45+55+50+75+65+60+80+40+60+50)$$

$$= \frac{1}{10} \times 580 = 58 \text{ புள்ளிகள் ஆகும்.}$$

உதாரணம் 4.2: ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலைசெய்யும் 70 தொழிலாளர்கள் ஒரு வாரத்தில் பெறும் ஊதியம் பற்றிய விபரங்களைப் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பல் தருகிறது.

ஊதியம் (ரூபாவில்) X	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை F
10	12
20	16
30	20
40	14
50	8

இத் தொழிலாளர்கள் பெற்ற சராசரி ஊதியம் பின்வருமாறு கணிக்கப்படும்.

$$\overline{X} = \frac{12 \times 10 + 16 \times 20 + 20 \times 30 + 14 \times 40 + 8 \times 50}{12 + 16 + 20 + 14 + 8}$$

$$= \frac{2000}{70} = 28.57 \text{ ரூபாக்கள் ஆகும்.}$$

குறிப்பு :

இரண்டு உதாரணங்களும் பின்னகமான மீடிறன் பரம்பல்களில் எவ்வாறு கூட்டலிடைகள் கணிக்கப்படுகின்றன என்பதனைக் காட்டுகின்றன. பின்வரும் உதாரணம் தொடர்ச்சியான மீடிறன் பரம்பலில் கணிப்பீடுகளை விளக்குகிறது.

உதாரணம்: 4.3: ஒரு பாடசாலையிலுள்ள 100 மாணவர்களின் உயரங்கள் பற்றிய விபரங்களைப் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பல் தருகிறது.

உயரம் (அங்குலங்களில்) X	மாணவர் எண்ணிக்கை F
45— <50	15
50— <55	25
55— <60	35
60— <65	20
65— <70	5

இவ்வகைகளுக்கு ஒவ்வொரு வகுப்பினதும் மாறிப் பெறுமானமாக அவ் வகுப்பின் மையப் பெறுமானம் எடுத்துக்கொள்ளப்படும். அதாவது இத்தொடர்ச்சிவகை மீடிறன் பரம்பல்கள் பின்னகப் பரம்பல்களாகக் கருதப்பட்டுக் கணிப்பீடுகள் மேற்கொள்ளப்படும். இங்கு சில வேளைகளில் ஒரு குறித்த வகுப்பின் மத்திய பெறுமானம் அவ்வகுப்பிலுள்ள பெறுமானங்களைப் பிரதிபலிக்காமல் விடக்கூடும். இருப்பினும் இம்முறையே ஓரளவு திருத்தமான சரிசாரிகளைத் தருகின்றது.

மத்திய பெறுமானம் (அங்குலங்களில்) X	மாணவர் எண் F	FX
47.5	15	712.5
52.5	25	1312.5
57.5	35	2012.5
62.5	20	1250.0
67.5	5	337.5
மொத்தம்	100	5625.0

இம்மாணவர்களின் சராசரி உயரம்,

$$\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{5625}{100} = 56.25$$

அங்குலங்கள் ஆகும்.

கூட்டலிடயின் உடமைகள்:

(t) தரவுக்கூட்டத்தின் ஒவ்வொரு பெறுமானங்களினதும் கூட்டலிடையிலிருந்தான விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

அதாவது $\sum_{i=1}^{n} (xi - \overline{X}) = O$

ஏனெனில் $\overline{X} = \frac{\sum xi}{n}$

$\longrightarrow \sum xi = n\overline{x}$

$\longrightarrow \sum xi - n\overline{x} = O$

$\longrightarrow \sum (xi - \overline{x}) = O$

(ii) X தரப்பட்ட புள்ளி விபரமாறி யாவும் a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருக்கும்போது புதிய புள்ளிவிபரமாறி y ஆனது.

y = ax + b என வரையறுக்கப்படுமாயின் $\overline{y} = a\overline{x} + b$ ஆகவிருக்கும்:

ஏனெனில் X இன் பெறுமானங்கள் $x_1, x_2, \ldots, Xn$ என்பனவற்றை எடுத்துக்கொள்வோமாயின்

$y_1 = ax_1 + b, \; y_2 = ax_2 + b, \ldots, \; y_n = ax_n + b$

ஆகும். இவ் n சமன்பாடுகளையும் கூட்ட

$\sum y = \sum ax + \sum b$

$\sum y = a\sum x + nb$

$\longrightarrow \sum y / n = a \sum x / n + b$

அ—து $\overline{y} = a\overline{x} + b$

(iii) உடமை (ii) இனை விரிப்போமாயின்

அதாவது z = au + bv + cw + dx + ey எனும் தொடர்பின் u, v, w, x, y என்பன புள்ளி விபரமாறிகளாகவும் a, b, c, d, e என்பன மாறிலிகளாகவுமிருக்குமாயின்

$\overline{Z} = a\overline{U} + b\overline{V} + c\overline{W} + d\overline{X} + e\overline{Y}$ ஆகும். இங்கு ஏகபரிமாண (நேர்கோட்டு) தொடர்பு முக்கியமானதாகும்.

சுருக்கு முறை (Coding method)

புள்ளி விபரமாறி X இன் பெறுமானங்கள் பெரியவையாக இருக்குமாயின் உடமை (ii) இனைப் பிரயோகிப்பதன் மூலம் சிறிய பெறுமானங்களை எடுக்கும் புதிய புள்ளி விபரமாறி Y இனை வரையறுத்துக் கணிப்பீடுகளை இலகுவாக்கலாம்.

உதாரணம்: 4.4; உதாரணம்: 4.3இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

X	F	$y = \frac{1}{5}(x-575)$	FY
47.5	15	— 2	—30
52.5	25	— 1	—25
57.5	35	0	0
62.5	20	1	20
67.5	5	2	10
மொத்தம்	100	—	—25

$$\overline{Y} = \frac{\sum fy}{\sum f} = \frac{-25}{100} = -0{\cdot}25$$

$y = \frac{1}{5}(x - 57.5) \longrightarrow \overline{y} = \frac{1}{5}(\overline{x} - 57.5)$

$\overline{x} = 57.5 + 5\overline{y}$

$= 57.5 - 5 \times 0.25$

$= 56.25$ அங்குலங்கள்

இதனை உதாரணம் 4.3 இன் விடையுடன் ஒப்பிடுக.

கூட்டு மீடிறன்பரம்பலின் கூட்டலிடை

பல மீடிறன் பரம்பல்கள் கூட்டமாகத் தரப்படும்பொழுது அவற்றின் பொதுவான கூட்டலிடையை ஒவ்வொரு மீடிறன் பரம்பலினதும் கூட்டலிடைகளைப் பயன்படுத்திப் பெறமுடியும். ஒவ்வொன்றும்முறையே $n_1, n_2, \ldots, n_k$ உறுப்புக்களைக் கொண்ட k மீடிறன் பரம்பல்கள் கூட்டமாகத் தரப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம். அவற்றின் கூட்டலிடைகளை முறையே $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots\ldots, \overline{X}_k$ எனவும் கொள்வோம்.

மீடிறன் பரம்பல்	பரம்பல் அவதானிப்புகள்	மொத்தங்கள்	இடைகள்
1	$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n1}$	$\sum_{j=i}^{ni} X_{ij}$	$\overline{X}_1$
2	$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n2}$		$\overline{X}_2$
3	$X_{31}, X_{32}, \ldots, X_{3n3}$		
......	......	—	
—	—	......	......
......	......	—	—
k	$X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_k\, n_k$	$\sum_{j=i}^{nk} X_{kj}$	$\overline{X}_k$

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum X_{1j} \longrightarrow \sum X_{1j} = n_1\ \overline{X}_1$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum X_{2j} \longrightarrow \sum X_{2j} = n_2\ \overline{x}_2$$

$$\overline{X}_k = \frac{1}{n_k}\sum X_{kj} \longrightarrow \sum X_{kj} = n_k \overline{X}_k$$

இவற்றைக் கூட்ட $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni} X_{ij} = \sum_{i=1}^{k} n_i\ \overline{X}_i$ ——— (1)

கூட்டுப்பரம்பலின் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை N உம் கூட்டலிடை $\overline{X}$ உம் ஆயின்

$\sum_{i=1}^{k} ni = N$ ———— (2)

(1), (2)

$$\longrightarrow \frac{\sum_i \sum_j Xij}{\sum_i ni} = \frac{\sum_i ni\overline{X}i}{N}$$

$$\longrightarrow \overline{X} = \frac{\sum_i ni\overline{X}i}{N}$$

உதாரணம் 4 . 5 :

ஒரே வினுத்தாளில் விடையளித்த, முறையே 25, 40, 60 மாணவர்களைக்கொண்ட வகுப்புகள் A, B, C என்பனவற்றின் சராசரி புள்ளிகள் முறையே 55, 60, 65 என்பனவாகும். மூன்று வகுப்புக்களும் ஒரே வகுப்பாகச் சேர்க்கப்படின் சராசரிப் புள்ளி என்னவாகும்.

$n_1 = 25,\ n_2 = 40,\ n_3 = 60 \longrightarrow N = 125$

$\overline{X}_1 = 55\ \overline{X}_2 = 60,\ \overline{X}_3 = 65$

சேர்க்கப்பட்ட கூட்டு வகுப்பின் சராசரி $\overline{X}$ ஆயின்

$$\overline{X} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2 + n_3\overline{X}_3}{N}$$

$$= \frac{1}{125}(25 \times 55 + 40 \times 60 + 60 \times 65)$$

$$= \frac{7675}{125} = 61.4 \text{ புள்ளிகள்.}$$

பெருக்கலிடை:

பெருக்கற் சூத்திரத்தினுல் வரையறுக்கப்படும் சராசரிகள் பெருக்கலிடைகளாகும். புள்ளிவிபரமாறி N இன் பெறுமானங்கள் $X_1\ X_2, \ldots, X_n$ என்பன முறையே மீடிறன்கள் $f_1, f_2, \ldots, f_n$ உடன் மீடிறன் பரம்பலாகத் தரப்படின் GM என்பதனுல் குறிக்கப்படும் பெருக்கலிடை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$GM = \left(X_1^{f_1}\ X_2^{f_2} \ldots X_h^{f_n} \right)^{\frac{1}{N}} \quad \text{இங்கு } N = \sum_{i=1}^{n} fi$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{fi} \right)^{\frac{1}{N}}$$

மீடிறனற்ற தரவுக் கூட்டத்திற்கு

$$GM = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

உதாரணம்: 4.6;

ஒரு நாட்டின் சனத்தொகை முதல் பத்தாண்டுகளில் 20% இனலும், அடுத்த பத்தாண்டுகளில் 25% இனலும், கடைசி பத்தாண்டுகளும் 44% இனலும் அதிகரித்திருந்ததாகக் காணப்பட்டது. பொதுவான சராசரி பத்தாண்டு அதிகரிப்பு வீதத்தைக் காண்க.

இங்கு கூட்டலிடை பொருத்தமற்றதகுகும். ஏனெனில் ஒவ்வொரு அடுத்தடுத்த பத்தாண்டு அதிகரிப்பு வீதமும் ஒன்றிலொன்று தொடர்புடையது. இதற்கு வரைவிலக்கணத்திலிருந்து பெருக்கலிடையே சிறந்ததாகும். எனவே சராசரி அதிகரிப்பு வீதம்:

$$G = (20 \times 25 \times 44)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{மட } G = \tfrac{1}{3} \text{ மட } (20 \times 25 \times 44) = 1.4475$$

$$G = 28.02\%$$

பெருக்கலிடைகளின் உடமை :

x, y என்பன இரு புள்ளி விபர மாறிகளாயின் $w = xy$, $z = x/y$ என்பவற்றுக்குரிய பெருக்கலிடைகள் x, y என்பனவற்றின் பெருக்கலிடைகளால் தரப்படலாம்.

அதாவது $G_w = G_x G_y$, $G_z = G_x / G_y$

ஏனெனில்,

$$G_x = (x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$G_y = (y_1 y_2 \ldots\ldots y_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$G_x G_y = (x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}} (y_1 y_2 \ldots y_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= [(x_1 y_1)(x_2 y_2) \ldots\ldots x_n y_n]^{\frac{1}{n}}$$

$$= (w_1 w_2 \ldots\ldots w_n)^{\frac{1}{n}} = G_w$$

இதேபோல் Gz உம் காட்டப்படலாம்.

இசையிடை :

இசையிடை என்பது கூட்டலிடைக்குத் தொடர்புடையதாகும் தரவுப் பெறுமானங்களின் தலைகீழ்களின் கூட்டல் சராசரியின் தலைகீழ் இசையிடை என வரையறுக்கப்படும். புள்ளிவிபர மாறி Xஇன் பெறுமானங்கள் X_1, X_2, X_n ....என்பன மீடிறன்கள் $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_4$ உடன் தரப்படின் HMஇனல் குறிப்பிடப்படும் இசையிடை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{N}\left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{fn}{xn} \right)}$$

$$HM = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum \frac{Fi}{xi}}$$

மீடினற்ற தரவுக் கூட்டத்துக்கு $HM = \dfrac{1}{\frac{1}{n} \sum \frac{1}{xi}}$

உதாரணம்: 4.7; மலையொன்றின் அடியிலுள்ள புகையிரதநிலையமொன்றிலிருந்து 100 கி. மீ. தூரத்தில் மலையின்மீதுள்ள நிலையத்துக்கு ஓர் புகையிரதமானது 30 கி. மீ. / மணி எனும் வேகத்தில் செல்கிறது. திரும்பி வரும்போது 20 கி. மீ. / மணி வேகத்துடன் வந்திருந்தால் மொத்தப் பயணத்தின்போதும் புகையிரதத்தின் சராசரி வேகம் யாது?

இதன் தீர்வுக்குக் கூட்டலிடை

$\overline{X} = \dfrac{30 + 20}{2} = 25$ என்பது பொருத்தமற்றதாகும்.

ஏனெனில் புகையிரதம்,

மேல்நோக்கிச் சென்றபோது தூரம் 100 கி.மீ., வேகம் 30 கி.மீ/மணி

எனவே எடுத்தநேரம் $= \dfrac{100}{30} = 3\frac{1}{3}$ மணி.

கீழ்நோக்கி வந்தபோது தூரம் 100 கி. மீ., வேகம் 20 கி. மீ/மணி

எனவே எடுத்த நேரம் $= \dfrac{100}{20} = 5$ மணி

மொத்தப் பயணத்தின்போது தூரம் 200 கி. மீ., நேரம் $8\frac{1}{3}$ மணி.

எனவே வேகம் $= \dfrac{200}{8\frac{1}{3}} = 24$ கி. மீ/ மணி.

எனவே கூட்டலிடை பொருந்தாது.

இசையிடை $HM = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{20} \right)}$

$= \dfrac{2 \times 600}{50} = 24$ கி. மீ/ மணி.

இது பொருத்தமுடையதாகும். எனவே இவ்வகையிலானஉதாரணங்களுக்கு இசையிடை பயன்படுத்தப்படும்.

தேற்றம் 4.1; ஓர் மீடிறன் பரம்பலின் கூட்டல், பெருக்கல், இசையிடைகள் முறையே A, G, H ஆயின் அவற்றினிடையே தொடர்பு பொதுவாக

$A \geq G \geq H \geq$ ஆகவிருக்கும். இங்கு தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் நேராயிருத்தல் அவசியமாகும்.

நிறுவல்; தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களை $X_1, X_2, \ldots, X_n$ எனவும் அவை எல்லாம் நேர் எனவும் கொள்க.

பொதுவாக $\left(\sqrt{X_1} - \sqrt{X_2}\right)^2 \geq 0$ ஆகும்.

$$\longrightarrow X_1 - 2\sqrt{X_1 X_2} + X_2 \geq 0$$

$$\longrightarrow \frac{X_1 + X_2}{2} \geq \sqrt{X_1 X_2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

இதேபோல் $\dfrac{X_3 + X_4}{2} \geq \sqrt{X_3 X_4} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

எனக் காட்டலாம்.

(3) (4) இலிருந்து

$$\frac{\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) + \left(\frac{X_3 + X_4}{2}\right)}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right)\left(\frac{X_3 + X_4}{2}\right)}$$

இதில் (3), (4) இனைப் பிரயோகிக்க.

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} \geq \sqrt{\sqrt{X_1 X_2}\ \sqrt{X_3 X_4}}$$

அதாவது $\dfrac{X_1 + X_2 + X_4 + X_4}{4} \geq \sqrt[4]{X_1 X_2 X_3 X_4} \ldots\ldots (5)$

இதேபோல் (5) இனைப் பாவித்து

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots + X_8}{8} \geq (X_1 X_2 \ldots \tfrac{1}{8})^{\frac{1}{8}}$$

எனக் காட்டலாம்.

தொடர்ந்து செய்வதன் மூலம்

$\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n} \geq (X_1 X_2 \ldots\ldots X_n)^{\frac{1}{n}}$ என n என்பது

2இன் அடுக்குகளாக உள்ளபோது காட்டலாம்.

எனவே

$$A \geq G ; n = 2^m$$

இங்கு m நேர் முழு எண்களாகும்.

$n \neq 2^m$ ஆயின் $n < 2^m$ ஆகுமாறு மிகச்சிறிய m இதனைத் தெரிவு செய்க. எனவே $X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$ உடன் நேர்பெறுமானங்கள் $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\ldots, X_{2m}$ என்பவற்றை ஒவ்வொன்றும் Aஇற்குச் சமமாகுமாறு தெரிவு செய்வோம். எனவே,

$$\underbrace{X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n,}_{n} \qquad \underbrace{X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{2m}}_{2^m - n}$$

எனும் புதிய பெறுமானங்களுக்கு மேலே பெறப்பட்ட முடிவைப் பயன் படுத்தலாம். அதாவது,

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n + A + \ldots\ldots + A}{2^m}$$

$$\geq (X_1 X_2 \ldots\ldots X_n A \ldots\ldots A)^{\frac{1}{2}m}$$

$A = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$ என்பதால்

$$\frac{nA + (2^m - n)A}{2^m} \geq (X_1 X_2 \ldots\ldots X_n)^{\frac{1}{2}m} A^{\frac{2^m - n}{2^m}}$$

$G = (X_1 X_2 \ldots\ldots X_n)^{\frac{1}{n}}$ என்பதால்

$$A \geq G^{\frac{n}{2m}} A^{1 - \frac{n}{2m}}$$

$$\longrightarrow A^{\frac{n}{2m}} \geq G^{\frac{n}{2m}}$$

n. m என்பன நேர் பெறுமானங்களாதலால்

$$A \geq G \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

அதாவது எல்லா nகளுக்கும் $A \geq G$ ஆகும்.

மேலும் $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ எல்லாம் நேரானதால்

$\dfrac{1}{X_1}, \dfrac{1}{X_2}, \ldots\ldots\ldots, \dfrac{1}{X_n}$ எல்லாம் நேரானவையாகும்.

$$\therefore \frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{X_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{X_1} \cdot \frac{1}{X_2} \cdots\cdots \frac{1}{X_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{n}\left(\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{X_n}\right) \geq \frac{1}{(X_1 X_2 \ldots X_n)^{\frac{1}{n}}}$$

அதாவது $\frac{1}{H} \geq \frac{1}{G}$

$\longrightarrow$ $G \geq H$ .... (7)

6, 7இலிருந்து

$A \geq G \geq H$ ஆகும்.

4.2. இடையம்

இடையம் எனும் மையப் பெறுமானம் தரவுக்கூட்டம் ஏறுவரிசையிலோ அல்லது இறங்குவரிசையிலோ ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட பின்பே வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரிசைப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் (Ordered Statistics)

ஒரு தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n$ என்பனவாயின் எண் பெறுமானப்படி அவை ஏறுநிரைப்படுத்தப்படும். இக் கூட்டத்தின் n^1 வரிசைமாற்றங்களில் யாதுமொரு ஒழுங்கே உண்மையாக விருக்கும்.

உதாரணமாக $X_3 < X_{n-1} < X_1 < \ldots\ldots < X_n < X_2$ எனவும் இருக்கலாம்' இவை முறையே

$X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n-1)} < X_{(n)}$ எனக் குறிக்கப்படும். அதாவது

$X_{(1)} = X_3$, $X_{(2)} = X_{n-1}$, ..., $X_{(n)} = X_2$ ஆகும். இங்கு $X_{(i)}$ என்பது தரவுக் கூட்டத்தின் iஆவது வரிசைப்பட்ட புள்ளி விபரம் எனப்படும்.

வரைவிலக்கணம் :

ஒரு தரவுக்கூட்ட ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட பெறுமானங்களை இருபுறமும் 50%களாகப் பிரிக்கும் புள்ளி விபரமாறியின்பெறுமானம் இடையமென வரையறுக்கப்படும். தரவுக்கூட்ட பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots\ldots$, X_n ஆயின் வரிசைப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ ஆகும். எனவே n ஒற்றையாயின் $n=2m+1$ ஆயுள்ளபோது $X_{(m+1)}$ எனும் வரிசைப்பட்ட புள்ளிவிபரம் இடையமாகும். n இரட்டையாயின் $n = 2m$ ஆயுள்ளபோது $X_{(1)}$ இலிருந்து $X_{(m)}$ வரை 50%உம் $X_{(m+1)}$ இலிருந்து $X_{(n)}$ வரை 50%உம் ஆகும். எனவே இடையம் $\frac{1}{2}\left(X_{(m)} + X_{(m+1)}\right)$ எனும் சராசரியாகும்.

பின்னகப் பரம்பல்களுக்கு,

உதாரணம்: 4.8; உதாரணம்: 4.1இனைக் கருதுவோமாயின் வரிசைப்பட்ட புள்ளிவிபரங்கள் பின்வருவனவாகும்.

$40 < 45 < 50 < 55 < 60 < 60 < 65 < 75 < 80$

$n = 10$, $m = 5$, $X_{(m)} = 55$, $X_{(m+1)} = 60$

எனவே இடையப்புள்ளி

$$Me = \frac{55 + 60}{2} = 57.5 \text{ புள்ளிகள்.}$$

40 புள்ளிகள் எடுத்த மாணவன் அக்குழுவிலிருந்து நீக்கப்பட்டால் புதிய வரிசைப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள்

$45 < 50 < 50 < 55 < 60 < 60 < 65 < 75 < 80$

$n = 9$. $m = 4$, $X_{(m+1)} = 60$

எனவே இடையப்புள்ளி

$Me = 60$ புள்ளிகள்.

உதாரணம்: 4.9; உதாரணம் 4.2 இலுள்ள மீடிறன்பரம்பலைக் கருதுக. இவ்வாறான பரம்பல்களில் நடுப்பெறுமானத்தை அறிவதற்குக் குறைந்த வகை திரட்டு மீடிறன் பயன்படுத்தப்படும்,

X (ரூபாக்களில்) ஊதியம்	f தொழிலாளர் எண்ணிக்கை	cf திரட்டு மீடிறன்
10	12	12
20	16	28
30	20	48
40	14	62
50	8	70

மொத்தமாக 70 தொழிலாளர் உள்ளதால் 35ஆம், 36ஆம் தொழிலாளர்களின் ஊதிய சராசரியே இடையமாகும். திரட்டு மீடிறனில் 48இனைத் தரும் வகுப்பே இதனைத் தருகிறது.

எனவே இடைய ஊதியம்

$$Me = \frac{30 + 30}{2} = 30 \text{ ரூபாக்கள்}$$

குறிப்பு; எனவே இவ்வகை பின்னகப்பரம்பல்களில் X_1, X_2 .... X_n மீட்டிறன்கள் f_1, f_2, ..., f_n என்பனவற்றுடன் தரப்படின் X இடையமாயிருப்பதற்கு

$$\sum_{i=1}^{k-1} f_i < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i \leq \sum_{i=1}^{k} f_i \quad (8)$$

எனும் நிபந்தனை திருப்தி செய்யப்படல் வேண்டும்.

உதாரணம் 4.10: தொழிற்சாலை யொன்றில் தொழிலாளர்கள் செய்து முடித்த பொருட்களின் எண்ணிக்கை பற்றிய விபரம் பின்வருமாறு,

பொருட்கள் எண்ணிக்கை X	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை f	திரட்டு மீடிறன் cf
16	4	4
24	5	9
34	6	15
46	9	24
50	6	30

இவ்வகை மீடிறன் பரம்பல்களில் சிறிய வித்தியாசமொன்றுண்டு: ஏனெனில் திரட்டுமீடிறன் $N = 30$ ஆகும்.

எனவே 15ஆம், 16ஆம், தொழிலாளர்களின் சராசரியே இடையமாகும். திரட்டு மீடிறனிலிருந்து

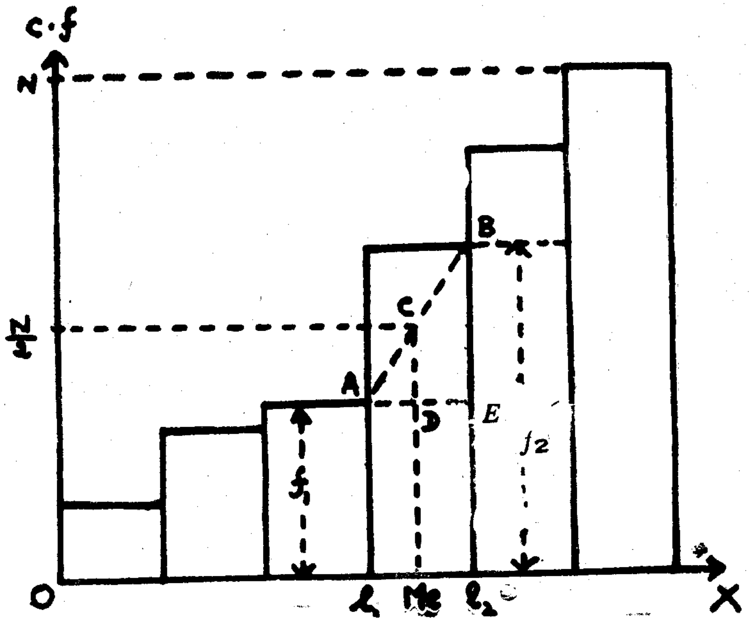
$$X_{(15)} = 34, \quad X_{(16)} = 46$$

$$\therefore \text{ இடையம் } Me = \frac{34+46}{2} = 40 \text{ பொருட்கள்.}$$

தொடர்ச்சியான பரம்பல்களுக்கான பொதுவான இடையச் சூத்திரம் இழைவரையத்திலிருந்து பின்வருமாறு பெறப்படும்.

தொடர்ச்சி மீடிறன் பரம்பல்களுக்கான இடையச் சூத்திரம் :

தொடர்ச்சியான வகுப்பாயிடைகளைக்கொண்ட மீடிறன் பரம்பல்களுக்குரிய இழை வரையத்தினை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு குறைந்த வகைத் திரட்டு மீடிறனிலிருந்தே இடையம் தீர்மானிக்கப்படுவதால் அதற்கான திரட்டு மீடிறன் இழை வரையத்தைக் கருதுவோம்;



F 18

நிபந்தனை (8) திருப்தி செய்யப்படும் வகுப்பாயிடை $(l_1 - l_2)$ என்க. அதுவே இடைய வகுப்பு எனப்படும்.

இடைய வகுப்புக்கு முன்னுள்ள வகுப்பு வரையுமுள்ள திரட்டு மீடிறனை f_1 எனவும், இடைய வகுப்பு வரையுமுள்ள திரட்டு மீடிறனை f_2 எனவும் கொள்க.

முக்கோணிகள் ACD, ABE என்பன சர்வசமமானவையாதலால்

$$AD/AE = CD/BE$$

$$\frac{Me - l_1}{l_2 - l_1} = \frac{N/2 - f_1}{f_2 - f_1}$$

$$Me = l_1 + \left(\frac{N/2 - f_1}{f_2 - f_1}\right)(l_2 - l_1) \quad \text{——— (9)}$$

இச்சூத்திரத்தில் l_1, l_2, f_1, f_2, N என்பன பிரதியிடப்பட்டு இடையம் பெறப்படும்.

உதாரணம் 4.11: 176 மனிதர்களைக் கொண்ட ஒரு கூட்டத்திலிருந்த மனிதர்களின் நிறைகளை கிலோகிராமில் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பல் தருகிறது.

நிறைவகுப்பு	மனிதர் எண்ணிக்கை	திரட்டு மீடிறன்
25.5—35.5	7	7
35.5—45.5	36	43
45.5—55.5	50	93
55 5—65.5	45	138
65.5—75.5	25	163
75.5—85.5	11	174
85.5—95.5	2	176

எல்லாமாக 176 மனிதர்களின் நிறைகள் உள்ளதால் ஏறுநிரைப்படுத்தப்பட்ட நிறைகளில் 88, 89ம் நிறைகளின் சராசரியே இடையமாகும். இவை இரண்டும் நிபந்தனை (8) திருப்திசெய்யுமாறு காணப்படின் (45.5—55.5) எனும் நிறை வகுப்பில் கிடப்பதாக அறியலாம்.

$N = 176, \; l_1 = 45.5, \; l_2 = 55.5. \; f_1 = 43, \; f_2 = 93$

எனவே இடையநிறை சூத்திரத்திலிருந்து

$$Me = 45.5 + \left(\frac{176/2 - 43}{93 - 43}\right)(55.5 - 45.5)$$

$$= 45.5 + \frac{45}{50} \times 10$$

$= 54.5$ கிலோகிராம்கள்.

4.3. இடையத்துடன் தொடர்புடைய சில அளவைகள்

இடையத்தின் வரைவிலக்கணத்தைப்போன்று ஒரு தரவுக்கூட்டத்துக்கு வரையறுக்கப்பட்ட சில அளவீடுகள் பின்வருவனவாகும்:

(a) காலணைகள் (Quartiles)
(b) தசமணைகள் (Deciles)
(c) சதமணைகள் (Percentiles)

காலணைகள்:

ஒரு தரவுக் கூட்டப் பெறுமானங்களை (ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட) 25% களாகப் பிரிக்கும் புள்ளிவிபரமாறி X இனது மூன்று பெறுமானங்களும் காலணைகள் என வரையறுக்கப்படும். இவை முறையே கீழ்க் காலணை (முதற் காலணை), நடுக் காலணை (இரண்டாம் காலணை), மேற்

காலணை (மூன்றாம் காலணை)கள் எனப்பட்டு முறையே Q_1, Q_2, Q_3 இனால் குறிக்கப்படும். எனவே வரைவிலக்கணப்படி Q_2ஆனது தரவுக் கூட்டத்தை 50% களாக பிரிப்பதால் அதுவே இடையம் Meஉம் ஆகும்.

சூத்திரம் (9) இனைப்போன்று Q_1. Q_2 Q_3 என்பனவற்றுக்கும் சூத்திரங்களைப் பெறமுடியும்.

அவையாவன:

$$Q_1 = l_{11} + \left(\frac{N/4 - f_{11}}{f_{12} - f_{11}}\right)(l_{12} - l_{11}) \qquad \text{———10}$$

$$Me = Q_2 = l_{21} + \left(\frac{N/2 - f_{21}}{f_{22} - f_{21}}\right)(l_{22} - l_{21}) \qquad \text{———11}$$

$$Q_3 = l_{31} + \left(\frac{3N/4 - f_{31}}{f_{32} - f_{31}}\right)(l_{32} - l_{31}) \qquad \text{———12}$$

இங்கு l_{11}, l_{21}, l_{31} என்பன முறையே காலணை வகுப்புக்களின் கீழ் எல்லைகளும் l_{12}, l_{22}, l_{32}, என்பன முறையே காலணை வகுப்புகளின் மேல் எல்லைகளும் f_{11}, f_{21}, f_{31} என்பன முறையே காலணை வகுப்புக்களுக்கு முன்னுள்ள வகுப்புக்கள் வரையிலுமுள்ள திரட்டு மீடிறன்களும் f_{12}, f_{22}, f_{32}, என்பன முறையே காலணை வகுப்புக்கள் வரையிலுமுள்ள வகுப்புக்களின் திரட்டு மீடிறன்களும் ஆகும்.

உதாரணம்: 4.12; உதாரணம்: 4.11இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$N/4 = 176/4 = 44$
$N/2 = 176/2 = 88$
$3N/4 = 3 \times 176/4 = 132$

எனவே, காலணை வகுப்புக்களை நிபந்தனை (8)இனைப் பாவித்துக் காணும்போது அவை முறையே பின்வருவனவாகும்.

முதல் காலணை வகுப்பு (45.5 — 55.5)
இரண்டாம் காலணை (இடைய) வகுப்பு (45.5 — 55 5)
மூன்றாம் காலணை வகுப்பு (55.5 — 65.5)

→ $l_{11} = 45.5, \; l_{12} = 55.5$
$l_{21} = 45.5, \; l_{22} = 55.5$
$l_{31} = 55.5, \; l_{32} = 65.5$

& $f_{11} = 43$, $f_{12} = 93$
$f_{21} = 43$, $f_{22} = 93$
$f_{31} = 93$, $f_{32} = 138$

இவற்றை சூத்திரங்கள் (10), (11), (12)இல் பிரதியிட

$$Q_1 = 45.5 + \left(\frac{44 - 43}{93 - 43} \right) (55.5 - 45.5)$$

$$Q_2 = 45.5 + \left(\frac{88 - 43}{93 - 43} \right) (55.5 - 45.5)$$

$$Q_3 = 55.5 + \left(\frac{132 - 93}{138 - 93} \right) (65.5 - 55.5)$$

$$\longrightarrow Q_1 = 45.5 + \frac{1}{50} \times 10 = 45.7 \text{ கி. கி.}$$

$$Q_2 = 45.5 + \frac{45}{50} \times 10 = 54.5 \text{ கி. கி.}$$

$$Q_3 = 55.5 + \frac{39}{45} \times 10 = 64.1 \text{ கி. கி}$$

தசமணைகள்:

ஓர் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களை 10% களாகப் பிரிக்கும் Xஇன் ஒன்பது பெறுமானங்களும் தசமணைகள் என வரையறுக்கப்படும். இவை முறையே முதலாம் தசமணை, இரண்டாந் தசமணை ……, ஒன்பதாம் தசமணை எனப்பட்டு, $D_1, D_2, \ldots,$ D_9 இனால் குறிக்கப்படும். எனவே வரைவிலக்கணப்படி D_5 ஆனது தரவுக் கூட்டத்தை 50%களாகப் பிரிப்பதால் அதுவே இடையம் Meஉம் ஆகும்.

சூத்திரங்கள் (9), (10), (11), (12) என்பனவற்றைப் போன்று தசமணைகளுக்கும் பெற முடியும். அவை பின்வருவனவாகும்.

$$D_i = l_{i_1} + \left(\frac{iN/10 - f_{i_1}}{f_{i_2} - f_{i_1}} \right) (l_{i_2} - l_{i_1})$$

$i = 1, 2, \ldots, 9$ ———————— (13)

இங்கு l_{i_1}, l_{i_2} என்பன முறையே i ஆவது தசமணை வகுப்பின் கீழ், மேல் எல்லைகளும் f_{i_1}, f_{i_2} என்பன முறையே i ஆவது தசமணை வகுப்புக்கு முன்னுள்ள வகுப்பு வரையிலுமுள்ள, தசமணை வகுப்புவரையிலுமுள்ள வகுப்புக்களின் திரட்டு மீடிறன்களுமாகும்.

உதாரணம்: 4.13; உதாரணம்: 4.11இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். அதற்கு மூன்றும் ஏழாம் தசமணைகளைக் காண்போம்.

$$3N/10 = 3 \times 176/10 = 52.8$$
$$7N/10 = 7 \times 176/10 = 123.2$$

எனவே தசமணை வகுப்புக்களை நிபந்தனை (8)இனைப் பிரயோகித்துக் காணும்போது அவை பின்வருவனவாகும்.

மூன்றும் தசமணை வகுப்பு (45.5 − 55.5).
ஏழாம் தசமணை வகுப்பு (55.5 − (5.5).

$l_{3}^{1} = 45.5$, $l_{32} = 55.5$
$l_{71} = 55.5$, $l_{72} = 65.5$
& $f_{31} = 43$, $f_{32} = 93$
$f_{71} = 93$, $f_{72} = 138$

இவற்றைச் சூத்திரம் (13)இல் பிரதியிட

$$D_3 = 45,5 + \left(\frac{52.8 - 43}{93 - 43} \right) (55.5 - 45.5)$$

$$D_7 = 55.5 + \left(\frac{123.2 - 93}{138 - 93} \right) (65.5 - 55.5)$$

$$\longrightarrow D_3 = 45.5 + \frac{9.8}{50} \times 10 = 47.46 \text{ கி. கி.}$$

$$D_7 = 55,5 + \frac{30.2}{45} \times 10 = 62.21 \text{ கி. கி.}$$

சதமணைகள் :

ஓர் ஒழுங்குபடுத்தப்பட்ட தரவுக்கூட்ட பெறுமானங்களை 1%களாகப் பிரிக்கும் Xஇன் தொண்ணூற்றொன்பது பெறுமானங்களும் சதமணைகள் எனப்படும். இவை முறையே முதலாம் இரண்டாம், ……, தொண்ணூற்றொன்பதாம் தசமணைகளெனப்பட்டு. P_1, P_2, ……, P_{99} என்பவற்றால் குறிக்கப்படும். எனவே வரைவிலக்கணப்படி P_{50} ஆனது தரவுக் கூட்டத்தை 50% களாகப் பிரிப்பதால் இடையமாகும். அதாவது :

$$Me = Q_2 = D_5 = P_{50} \text{ ஆகும்.}$$

இவற்றைக் காண்பதற்கான சூத்திரங்கள் முன்பு பெறப்பட்டது போல் பின்வருமாறிருக்கும்.

$$Pi = li_1 + \left(\frac{iN/100 - fi_1}{fi_2 - fi_1}\right) (li_2 - li_1) \qquad \text{——(14)}$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots, 99$

இங்கு li_1, li_2, fi_1, fi_2 என்பவை *(13)* இல் குறிப்பிடப்பட்டவை போலாகும்.

உதாரணம்: 4.14; உதாரணம்; 4.11இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலையே எடுத்துக்கொள்வோம். அதற்கு நான்காம், பதினேழாம், ஐம்பத்திநான்காம் சதமணைகளைக் காண்போம்.

$4N/100 = 4 \times 176/100 = 7.04$

$17N/100 = 17 \times 176/100 = 29.92$

$54N/100 = 54 \times 176/100 = 95.04$

எனவே நிபந்தனை (8) இலிருந்து சதமணை வகுப்புகள் பின்வருமாறிருக்கும்:

நாலாம் தசமணை வகுப்பு	(35.5 — 45.5)
பதினேழாம் தசமணை வகுப்பு	(35.5 — 45.5)
ஐம்பத்திநான்காம் தசமணைவகுப்பு	(55.5 — 65.5)

ஆகவே $l_{41} = 35.5,\ l_{42} = 45.5$

$l_{171} = 35.5,\ l_{172} = 45.5$

$l_{541} = 55.5,\ l_{542} = 65.5$

& $f_{41} = 7,\ f_{42} = 43$

$f_{171} = 7,\ f_{172} = 43$

$f_{541} = 93,\ f_{542} = 138$

சூத்திரம் (14) இருந்து,

$$P_4 = 35.5 + \left(\frac{7.04 - 7}{43 - 7}\right)(45.5 - 35.5)$$

$$P_{17} = 35.5 + \left(\frac{29.92 - 7}{43 - 7}\right)(45.5 - 35.5)$$

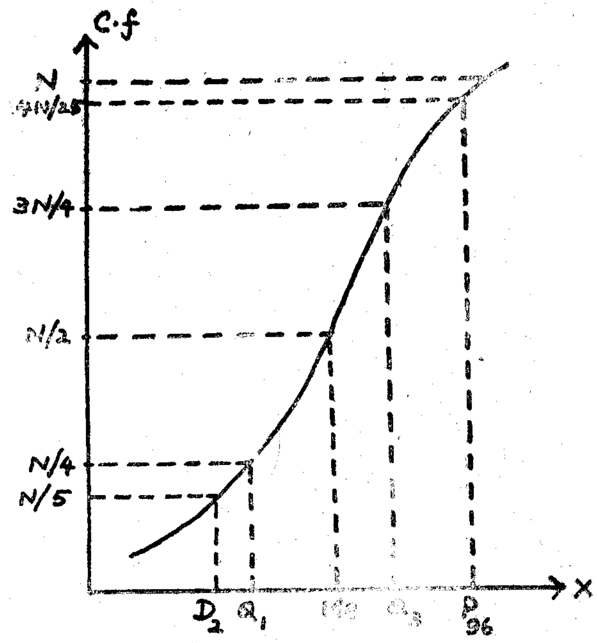
$$P_{54} = 55.5 + \left(\frac{95.04 - 93}{138 - 93}\right)(65.5 - 55.5)$$

$$\longrightarrow \quad P_4 = 35.5 + \frac{0.04}{36} \times 10 = 35.51 \text{ கி. கி.}$$

$$P_{17} = 35.5 + \frac{22.92}{36} \times 10 = 41.87 \text{ கி. கி.}$$

$$P_{54} = 55.5 + \frac{2.04}{45} \times 10 = 55.95 \text{ கி. கி.}$$

குறிப்பு: இவ் அளவைகள் படம் F18இல் இடையம் பெறப்பட்டது போல் பெறப்படும் என விளக்கினோம். மேலும் திருத்தமாக ஒகிவு வரைபுபடுத்தப்படும்போது வரைபிலிருந்தும் இடையம், காலணைகள், தசமணைகள், சதமணைகளை பெற்றுக்கொள்ள முடியும். இதனை படம் F19 காட்டுகிறது.



F 19

இவ்வளவைகளின் பிரயோகத்தில் விளக்கம்

இடையம், காலணைகள், தசமணைகள், சதமணைகளின் கணிப்பீடுகளை 4.11, 4.12, 4.13, 4.14 என்பன விளக்குகின்றன. இவ்வுதாரணங்களில் தரப்பட்ட ஒரு கூட்டம் மனிதர்களின் நிறைபற்றிய மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு இடையம் 54.5 கி. கி. எனவும், முதலாம், மூன்றும் காலணைகள் முறையே 45.7 கி. கி. 64.1 கி, கி. எனவும், மூன்றும் ஏழாம் தசமணைகள் முறையே 47.46 கி. கி., 62.21 கி. கி. என்பனவும் பதினேழாம், ஐம்பத்திநான்காம் தசமமணைகள் முறையே 41.87 கி. கி. 55.95 கி. கி. எனவும் கணிப்பிடப்பட்டுள்ளது எனவே இம் மனிதர்

களில் 50% ஆனவர்கள் 54.5 கி. கி. இலும் குறைவாகவும், 25% ஆன வர்கள் 45.7 கி. கி. இலும் குறைவாகவும், 75% ஆனவர்கள் 64.1 கி.கி. இலும் குறைவாகவும் நிறையுடையவர்களாகும். மேலும் 30% ஆன வர்கள் 47.46 கி. கி. இலும் குறைவாகவும், 70% ஆனவர்கள் 62.21 கி. கி. இலும் குறைவாகவும், 17% ஆனவர்கள் 41.87 கி. கி. இலும் குறைவாகவும், 54% ஆனவர்கள் 55.95 கி. கி. இலும் குறைவாகவும் நிறையுடையவர்களாகும்.

4.4. ஆகாரம் (முகடு)

ஆகாரம் என்னும் மையப்பெறுமானம் தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங் களில் எது அதிக எண்ணிக்கை யுடையதாக உள்ளதோ அதாவது அதி யுயர் மீடிறனைக் கொண்டுள்ளதோ அதுவே என வரையறுக்கப்படும். மீடிறன் வளையியில் உச்சியினை இது தருவதால் முகடு எனவும் சொல் லப்படும். மேலும் வகுப்பாயிடைகளாக அமைக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம் பலில் எந்த வகுப்பாயிடை அதி கூடிய பெறுமானங்களைக் கொண்டுள் ளதோ அதாவது அதியுயர் மீடிறனை உடையதோ அதுவே ஆகாரத் தைக் கொண்டுள்ள தெனவும், அது ஆகாரவகுப்பு எனவும் சொல்லப் படும்.

குறிப்பு : தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் ஒவ்வொன்றும் வெவ்வே றனவையாயின் ஆகாரம் வரையறுக்க முடியாது. இவ்வகைத் தரவுக் கூட்டங்கள் வகுப்பாயிடைகளைக் கொண்ட தொடர்ச்சியான வகையாக மாற்றி ஆகாரம் கணிக்கப்படும்.

பின்னகப் பரம்பல்களுக்கு அதியுயர் மீடிறனைத் தரும் புள்ளிவிபர மாறியின் பெறுமானம் ஆகாரமாகும்.

X	f
X_1	f_1
X_2	f_2
...	
...	...
	...
...	...
X_n	f_n

Max $(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f_i$ ஆயின் X_i என்பது இவ்வகைப் பரம்பலின் ஆகாரமாகும்.

உதாரணம் : 4.15; உதாரணம் : 4.9இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

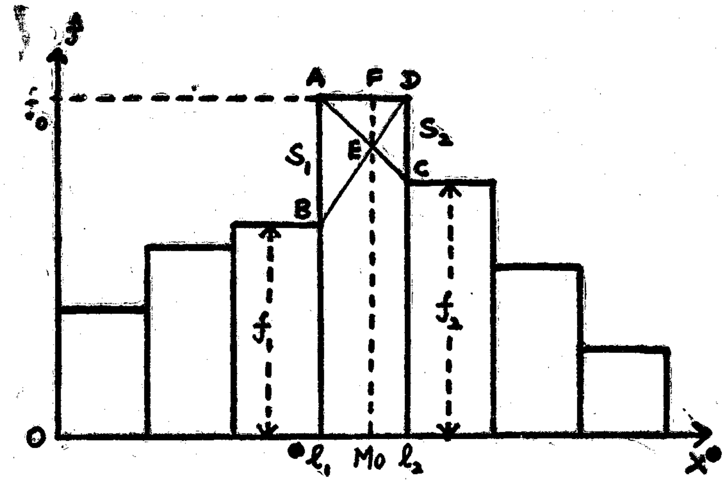
Max (12, 16, 20, 14, 8) = 20

எனவே ஆகாரம் Mo = 30

ரூபாக்கள் ஆகும்.

தொடர்ச்சியான மீடிறன் பரம்பல்களுக்கான ஆகாரச் சூத்திரம்:

தொடர்ச்சியான வகுப்பாயிடைகளைக்கொண்ட பரம்பல்களுக்குரிய இழைவரையத்தினை எடுத்துக்கொள்வோம். மேலும் இங்கு எல்லா வகுப்பாயிடைகளின் அகலங்களும் சமமாயிருத்தல் முக்கியமாகும்.



F 20

அதியுயிர் மீடிறனை f_0 எனவும், அதனால் தரப்படும் ஆகார வகுப்பின் மேல், கீழ் எல்லைகளை l_2, l_1 எனவும், அவ்வகுப்புக்கு முன்னுள்ள, பின்னுள்ள வகுப்புக்களின் மீடிறன்களை முறையே f_1, f_2 எனவும் கொள்வோம்.

$$AB = f_0 - f_1 = s_1$$
$$CD = f_0 - f_2 = s_2$$

முக்கோணிகள் AEB, CED என்பன இயல்பொத்தவையாதலால்

$$AF / AB = DF / CD$$

அதாவது $(M_0 - l_1)/s_1 = (l_2 - M_0)/s_2$

$$s_2 M_0 - l_1 s_2 = l_2 s_1 - s_1 M_0$$

$$(s_1 + s_2) M_0 = l_2 s_1 + l_1 s_2$$

$$= l_1 (s_1 + s_2) + (l_2 - l_1) s_1$$

$$M_0 = l_1 + \left(\frac{s_1}{s_1 + s_2}\right)(l_2 - l_1) \text{ ——— } (15)$$

அல்லது

$$M_0 = l_1 + \left(\frac{f_0 - f}{2f_0 - f_1 - f_2}\right)(l_2 - l_1) \text{ ——— } (16)$$

உதாரணம் 4, 16; உதாரணம் 4, 11இலுள்ள நிறைக்கான மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{Max } f = 50 \quad \therefore f_0 = 50$$

எனவே ஆகாரவகுப்பு (45.5 − 55.5)

$$\therefore l_1 = 45.5, \quad l_2 = 55.5$$

$$f_1 = 36, \quad f_2 = 45$$

$$M_0 = l_1 + \left(\frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_1}\right)(l_2 - l_1)$$

$$= 45.5 + \left(\frac{50 - 36}{100 - 36 - 45}\right)(55.5 - 45.5)$$

$$= 45.5 + \frac{14}{19} \times 10 = 52.87$$ கி. கி. ஆகும்.

உதாரணம்: 4.17: ஒரு அசாதாரணமான மீடிறன் பரம்பல் பின்வருமாறு தரப்படுகின்றது:

X	F
0—10	14
10—20	?
20—30	27
30—40	?
40—50	15

இப்பரம்பலின் இடையம், ஆகாரம் என்பன முறையே 25, 24 ஆயின் பரம்பலில் தரப்படாத மீடிறன்களையும், பரம்பலின் இடையையும் காண்க.

தரப்படாத மீடிறன்களை f_1, f_2 எனக் கொள்வோம்.

X	F	CF	மத்திய பெறுமானம்
0—10	14	14	5
10—20	f_1	$14+f_1$	15
20—30	27	$41+f_1$	25
30—40	f_2	$41+f_1+f_2$	35
40—50	15	$56+f_1+f_2$	45

இடையம், ஆகாரம் என்பன 25, 24 ஆதலால் இடைய வகுப்பும் ஆகார வகுப்பும் (20—30) ஆகவேயிருக்கும்.

$$Me = 25, \quad Mo = 24$$

ஆகாரச் சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்பின்,

$$Mo = l_1 + \left(\frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2}\right)(l_2 - l_1)$$

$$l_1 = 20, \quad l_2 = 30, \quad f_0 = 27$$

$$24 = 20 + \left(\frac{27 - f_1}{54 - f_1 - f_2}\right)(30 - 20)$$

$$\frac{27 - f_1}{54 - f_1 - f_2} = 0.4$$

$$27 - f_1 = 21.6 - 0.4 f_1 - 0.4 f_2$$

$$0.6 f_1 - 0.4 f_2 = 5.4 \text{ ——— } (1)$$

இடையச் சூத்திரத்தைப் பிரயோகிப்பின்,

$$Me = l_1 + \left(\frac{N/2 - f_1}{f_2 - f_1}\right)(l_2 - l_1)$$

(சூத்திரத்திலுள்ள குறியீடுகள் f_1, f_2, என்பன இவ்வுதாரணத்திலிருந்து வேறுபட்டவை என்பதை அவதானிக்க.)

$$Me = 24, \quad l_1 = 20, \quad l_2 = 30$$

$$N = 56 + f_1 + f_2$$

$$24 = 20 + \left(\frac{(56 + f_1 + f_2)/2 - (14 + f_1)}{27}\right)(30 - 20)$$

$$4 = \frac{10}{27}(28 + f_1/2 + f_2/2 - 14 - f_1)$$

$$14 - f1/2 + f2/2 = 10.8$$

$$f_1 - f_2 = 6.4 \qquad \text{———} \ (2)$$

(1), (2) இனைத் தீர்க்கும்போது

$$f_1 = 14.2, \ f2 = 7.8$$ ஆகும்.

அதாவது $f_1 = 14, \ f2 = 8$ எனத் திருத்தப்படலாம்.

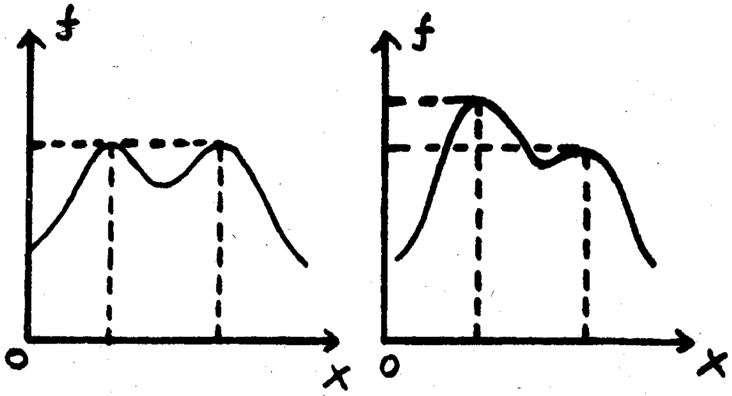
$$\sum f = 14 + 14 + 27 + 8 + 15 = 78$$

$$\sum fx = 14 \times 5 + 14 \times 15 + 27 \times 25 + 8 \times 35 + 15 \times 45 = 1910$$

இடை $\overline{X} = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{1910}{78} = 24.48.$

ஆகாரம் கணிக்கமுடியாத பரம்பல்கள்:

சில மீடிறன் வளையிகளில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட முகடுகள் காணப்படும். இவற்றுக்கு ஆகாரங்களைக் கணிப்பதற்கு ஆகாரவகுப்புத் தெரிய முடியாதிருக்கும். இப் பரம்பலுக்கு ஆகாரத்தைத் தவிர்த்து ஏனைய மைய நாட்ட அளவைகளைத் தெரிவுசெய்தல், கணித்தல் சிறந்ததாகும். உதாரணமாக அப்பரம்பல்கள் பின்வருமாறிருக்கலாம்.



F 21

தொடர்ச்சியானதும், பின்னகமானதுமான மீடிறன் பரம்பலின் இடையமும், ஆகாரமும் ;

இடைய வகுப்பு, ஆகார வகுப்பு என்பனவற்றின் கீழ் எல்லைகள், மேல் எல்லைகள் தொடர்ச்சியற்றவையாக விருப்பதால் மேலே பெறப்பட்ட இடைய சூத்திரமும், ஆகாரச் சூத்திரமும் நேரடியாகப் பயன்படுத்த முடியாது. இவ்வாறான பரம்பல்களில் தொடர்ச்சித்தன்மை முதலில் ஏற்படுத்தப்படும். இதனைப் பின்வரும் உதாரணம் விளக்குகிறது. இதே திருத்தம் மேற்கொள்ளப்பட்ட பின்னரே காலணைகள், தசமணைகள், சதமணைகளும் கணிக்கப்படலாம்.

உதாரணம்: 4.18 ; ஒரு பாடத்தில் ஒரு வகுப்பு மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வரும் மீடிறன் பரம்பலில் வகுப்பாக்கப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

புள்ளிவகுப்பு	மாணவர் எண்ணிக்கை
11 — 20	4
21 — 30	8
31 — 40	12
41 — 50	11
51 — 60	7
61 — 70	5

திருத்தப்பட்ட பரம்பல் ;

புள்ளி வகுப்பு	மாணவர் எண்ணிக்கை
10.5 — 20.5	4
20.5 — 30.5	8
30.5 — 40.5	12
40.5 — 50.5	11
50.5 — 60.5	7
60.5 — 70.5	5

எல்லைகளற்ற மீடிறன் பரம்பல்களின் மையநாட்ட அளவைகள்:

கீழ் எல்லைகள், மேல் எல்லைகள் அல்லது இரண்டும் திட்டமாகத் தரப்படாத மீடிறன் பரம்பல்களுமுள்ளன. அவை பின்வரும் வகைகளில் இருக்கலாம்.

I

X	f
a_1 இன் கீழ்	f_1
$a_1 — a_2$	f_2
$a_2 — a_3$	f_3
$a_3 — a_4$	f_4

II

X	f
$a_1 — a_2$	f_1
$a_2 — a_3$	f_2
$a_3 — a_4$	f_3
a_4 இன் மேல்	f_4

III

X	f
a_1 இன் கீழ்	f_1
$a_1 — a_2$	f_2
$a_2 — a_3$	f_3
a_3 இன் மேல்	f_4

இவ்வகையான மீடிறன் பரம்பலுக்குப் பொருத்தமான மையநாட்ட அளவை இடையமேயாகும். ஏனெனில் இவ்வகைப் பரம்பல்களுக்கு இடை கணிக்கப்படும்போது மத்திய பெறுமானம் கணிக்கப்படும். மேலே தரப்பட்ட முதல் பரம்பலில் முதலாம் வகுப்பாயிடைக்கும், இரண்டாம் பரம்பலில் கடைசி வகுப்பாயிடைக்கும், மூன்றும் பரம்பலில் முதல், கடைசி வகுப்பாயிடைகளுக்கும் மத்திய பெறுமானம் கணிக்கமுடியாததாகும். எனவே இடையினைத் திருத்தமாகக் கணிக்கமுடியாது. ஆகாரம் கணிக்கப்படுவதற்கு எல்லா வகுப்பாயிடைகளின் அகலங்களும் சமமாயிருத்தல்வேண்டும். ஆனால் இங்கு முதல், கடைசி வகுப்பாயிடைகளின் அகலங்கள் திடமாகத் தரப்படவில்லை. எனவே ஆகாரத்தினையும் திருத்தமாகக் கணிக்கமுடியாது. ஆனால் இடையத்தினைக் கணிப்பதற்கு எந்த நிபந்தனையும் தடையாக இருக்கவில்லை. ஆதலால் இவ்வகை பரம்பல்களுக்கு இடையமே பொருத்தமானதாகக் கொள்ளப்படும்.

மையநாட்ட அளவைகளிடையே தொடர்பு:

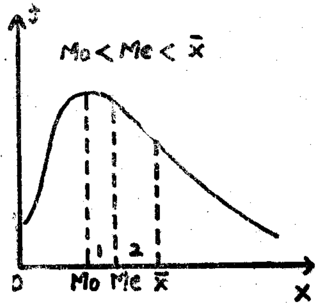
இடை, இடையம், ஆகாரம் என்னும் மூன்று மைய நாட்ட அளவைகளிடையேயுமுள்ள தொடர்பு பொதுவாக எல்லாப் பரம்பல்களுக்கும்

(இடை — ஆகாரம்) = 3 (இடை — இடையம்)

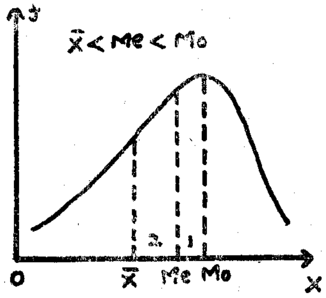
என அறியப்பட்டுள்ளது. அதாவது :

$(\bar{X} - Mo) = 3(\bar{X} - Me)$ ஆகும் —— (17)

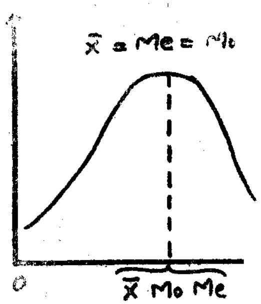
மூன்றுவகையான மீடிறன் பரம்பல்களும் அவற்றின் இடை, இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றின் தொடர்பும் படங்கள் F22, F23, F24 என்பவற்றில் தரப்படுகின்றன.



F 22



F 23



F 24

5. விலகல் அளவைகள்

(Measure of Dispersion)

ஒரு தரவுக் கூட்டத்திலுள்ள உறுப்புக்களை விளக்குவதற்கு மைய நாட்ட அளவைக்கு அடுத்ததாக விலகல் அளவை பயன்படுத்தப்படுகிறது. தரவுக் கூட்டப் பெறுமானங்கள் எவ்வாறு சிதறியுள்ளன அதாவது எவ்வாறு விலகிக் கிடக்கின்றன என்பதை அறிவதே இவ்வளவீடுகளின் நோக்கமாகும்.

உதாரணமாக இரு வகுப்புக்கள் A, B என்பனவற்றிலுள்ள மாணவர்கள் ஓர் குறித்த பாடத்தில் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருவனவாகும்.

A; 22, 02, 98, 84, 75, 55, 15, 49

B; 50, 54, 46, 45, 52, 60, 47

இவ்விரண்டு கூட்டங்களையும் ஒப்பிடுவோமாயின் A இலுள்ள பெறுமானங்கள் 02—98 எனும் வீச்சிலும். B இலுள்ள பெறுமானங்கள் 45—60 எனும் வீச்சிலும் பரவியுள்ளன. இதிலிருந்து B உடன் ஒப்பிடும்போது A இலுள்ளவை பெரிய விலகலைக் கொண்டுள்ளன என்கிறோம்.

ஓர் விலகல் அளவையின் உடமைகள்:

(i) புள்ளி விபரமாறியின் பெறுமானங்களின் அலகினையே, பரிமாணத்தினையே இதுவும் கொண்டிருக்கும்.

(ii) தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் யாவற்றையும் பயன்படுத்தித் திட்டமான சூத்திரத்தினால் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்.

(iii) தொடர்ந்த கணிதச் செய்கைகளுக்கு உட்படுத்தப்படக்கூடிய வாறும், எளிய கணிப்பீட்டினைக் கொண்டதாகவும் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும்.

பொதுவான விலகல் அளவைகள் :

பொதுவாக வழக்கத்திலுள்ள விலகல் அளவைகள் பின்வருவனவாகும்.

(a) வீச்சு (Range)

(b) காலணை விலகல் அல்லது அரை இடைக்கால்வழி வீச்சு (Quartile deviation or Semi-inter quartile range)

(c) இடை விலகல் (Mean dsisaten)

(d) நியம விலகல் (Standard deisation)

5 . 1. வீச்சு

ஓர் தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களின் அதிகூடிய, அதி குறைந்த பெறுமானங்களின் வித்தியாசம் அத்தரவுக்கூட்டத்தின் வீச்சு என வரையறுக்கப்படும். மீடிறன் பரம்பல்களை அமைத்தலிலும் இது விளக்கப்பட்டது. தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆயின் அவற்றின் வரிசைப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள் $X(1), X(2), \ldots, X(n)$ ஆகும். எனவே அதிகூடிய, அதிகுறைந்த பெறுமானங்கள் முறையே $X(n)$, $X(1)$ என்பனவாகும். எனவே வீச்சு

$$R = X(n) - X(1) \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் : 5 . 1: ஒரு குறிப்பிட்ட பாடத்தில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பின்வருமாறு,

24, 32, 54, 56, 57, 62, 64, 65, 66, 68

இதற்கு $X_{Max} = X(10) = 68$, $X_{Min} = X(1) = 24$

வீச்சு $R = 68 - 24 = 44$

இவ்வுதாரணத்திலுள்ள பெறுமானங்களை நோக்குவோமாயின்

24, 32 என்பன அசாதாரணமானவையாகும். இவற்றை நீக்கியபின் பெறப்படும் வீச்சே ஓரளவு ஏற்றுக்கொள்ளக்கூடிய வீச்சாகும். எனவே வீச்சு எனும் விலகலளவை திருத்தமானதல்ல.

வீச்சுக் குணகம் (Co - efficient of range):

மீடிறன் பரம்பல்களின் ஒப்பீட்டுக்கு வீச்சினைவிட வீச்சுக் குணகம் சிறந்ததாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. வீச்சுக்குணகம் C_R பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$C_R = \frac{X(n) - X(1)}{X(n) + X(1)}$$

மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்துக்கு

$$C_R = \frac{68 - 24}{68 + 24} = \frac{44}{92} = 0.478$$

காலணை விலகல்:

ஓர் தரவுக்கூட்டத்தின் அசாதாரண உறுப்புக்களை (கூடிய, குறைந்த இரு பகுதியிலும்) அகற்றுவதற்காக வரையறுக்கப்படுவதே காலணை விலகலாகும். இவற்றை நீக்குவதற்கு Q_1, Q_3 என்பன எல்லைப் பெறுமானங்களாகக் கருதப்படுகின்றன. காலணை விலகல் Q_D பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$Q(d) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ஓர் சமச்சீர்ப்பரம்பலுக்கு $Q_3 - Q_1 = 2(Q_3 - Q_2)$

$= 2(Q_2 - Q_1)$ ஆதலால்

அப்பரம்பல்களுக்கு $Q_D = Q_3 - Q_2$

$= Q_2 - Q_1$ ஆகும்.

உதாரணம் 5 . 2; உதாரணம் 4 . 12 இனை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அங்கு $Q_3 = 64.1$, $Q_1 = 45.7$ ஆகும்.

அப்பரம்பலுக்கு: $Q_D = \frac{64.1 - 45.7}{2} = 9.2$

இடை விலகல் :

தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் யாவற்றினதும் ஒரு குறித்துரைக்கப்பட்ட உற்பத்தி A இலிருந்தான விலகல்களின் சராசரி இடை விலகல் அல்லது சராசரி விலகல் என வரையறுக்கப்படும். தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆயின் இடைவிலகல்

$$M_D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i - A| \text{ ஆகும்.}$$

அது ஓர் மீடிறன் பரம்பலாயின் அதாவது: (X_i, f_i); $i = 1, 2, \ldots, n$ ஆயின்

$$M_D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |X_i - A|; \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ ஆகும்.}$$

உற்பத்தி $A = \overline{X}$ ஆயின் இவ் அளவை இடைபற்றிய இடை விலகல் எனப்படும்.

$$M_D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |X_i - \overline{X}|$$

உற்பத்தி $A = Me$, இடையமாயின் இவ் அளவை இடையம் பற்றிய இடைவிலகல் அல்லது இடையவிலகல் எனப்படும்.

$$M_D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i |X_i - Me|$$

பொதுவாக இடைவிலகல் எனப்படுவது இடைபற்றிய இடைவிலகலேயாகும். இவ் அளவை வீச்சு, காலணை விலகல் என்பவற்றிலுள்ள குறைகளைப் போக்குவதுடன் அவற்றை விடச் சிறந்ததுமாகும்.

உதாரணம் 5.3; ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் உயரங்கள் அங்குலங்களில் பின்வருமாறு, 50, 54, 46, 52, 45, 51, 52, 47. இவ்வுயரப் பரம்பலின் இடை, இடைய விலகல்களைக் காண்க.

$$\text{இடை} \quad \overline{X} = \frac{50+54+46+52+45+51+52+47}{8}$$

$$= \frac{397}{8} = 49.62$$

$$\sum_{i=1}^{8} /Xi - \overline{X}/ = 0.38 + 4.38 + 3.62 + 2.38 + 4.62 + 1.38 + 2.38 + 2.62$$

$$= 21.76.$$

$$\therefore \text{இடைவிலகல்} \ \frac{1}{n}\sum /X_i - \bar{X}/ = \frac{21.76}{8} = 2.72 \text{ அங்குலங்கள்}$$

வரிசைப்பட்ட புள்ளி விபரங்கள்,

45, 46, 47, 50, 51, 52, 52, 54.

$$\text{இடையம்} \quad Me = \frac{X_{(4)}+X_{(5)}}{2} = \frac{50+51}{2} = 50.5 \text{ அங்குலங்கள்}$$

$$\sum_{i=1}^{8} /Xi - Me/ = 5.5 + 4.5 + 3.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 + 1.5 + 3.5$$

$$= 21$$

$$\therefore \text{இடையவிலகல்} \ \frac{1}{n} \sum /Xi - Me/ = \frac{21}{8} = 2.62 \text{ அங்.}$$

தேற்றம் 5.1; ஓர் பின்னக மீடிறன் பரம்பலுக்கு இடையம் பற்றிய இடைவிலகலே இழிவானதாகும்.

நிறுவல்; மீடிறன் பரம்பலினை (Xi, fi); $i = 1, 2, \ldots, n$ என்போம்.

உற்பத்தி A பற்றிய இடைவிலகல்

$$U = \frac{1}{N} \sum fi \mid Xi - A \mid \ ; \ N = \sum fi$$

A எனும் உற்பத்தி தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களிடையே உள்ளதால் $Xi < A$, $Xi, > A$ என தரவுகள் இருகூறுக்கப்படலாம்.

$$\therefore \ U = \frac{1}{N} \sum_{Xi<A} fi/Xi - A/ + \frac{1}{N} \sum_{Xi>A} fi/Xi - A/$$

இது A இனை நகர்த்தும்போது மாற்றமடையுமாதலால், U ஆனது A இனுடைய சார்பாகும்.

அதாவது $\quad U = f(A)$

U இழிவடைவதற்கு $\frac{dU}{dA} = O$ ஆகவும், இதன் தீர்வு $A = A_o$ இற்கு $\frac{d^2U}{dA^2} > O$ ஆகவும் இருத்தல் வேண்டும்.

மேலும்

$$U = \frac{1}{N} \sum_{Xi<A} fi(A - Xi) + \frac{1}{N} \sum_{Xi>A} fi(Xi - A)$$

$$\frac{dU}{dA} = \frac{1}{N} \sum_{Xi<A} fi + \frac{1}{N} \sum_{Xi>A} (-fi)$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \sum_{Xi<A} fi - \sum_{Xi>A} fi \right\}$$

$$\frac{dU}{dA} = O \text{ ஆயின்} \sum_{Xi<A} fi = \sum_{Xi>A} fi$$

அதாவது A இற்கு இடதுபுறமுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும், வலது புறமுள்ள உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையும் சமம் ஆகும். எனவே வரைவிலக்கணப்படி A இடையமாகும்.

$$\text{எனவே} \ \frac{dU}{dA} = O \longrightarrow A = Me$$

$$\frac{dU}{dA} = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{xi<A} fi - \sum_{xi>A} fi \right\}$$

A இன் பெறுமதி அதிகரிக்கப்படும்போது $\sum_{xi<A} fi$ அதிகரிக்கும், $\sum_{xi<A} fi$

குறையும்; அதாவது $\frac{dU}{dA}$ ஆனது A இனது ஓர் அதிகரிக்கும் சார்பாகும் (Increasing function). எனவே $\frac{d}{dA}\left(\frac{dU}{dA}\right)$ எப்போதும் நேரானதாகும். அதாவது, $\frac{d^2U}{dA^2} > 0$ ஆகும்.

$\therefore$ A = Me என்பது U இனை இழிவுபடுத்தும் பெறுமானமாகும்.

அதாவது $U = \frac{1}{N} \sum f_i/x_i - A/$ என்பது A = Me ஆயின் இழிவடையும். எனவே இடைய விலகலே இடைவிலகல்களுள் இழிவுப் பெறுமானத்தைத் தரும்.

$$U_{Min} = \frac{1}{N} \sum f_i / x_i - Me/.$$

5.2. நியமவிலகல் (Standard Deviation)

நியமவிலகலை வரையறுப்பதற்கு முன் இதனுடன் தொடர்புடைய அளவை இடை வர்க்க விலகலை வரையறுப்போம். இது ஓர் விலகலளவை அல்லவாயினும் விலகலளவையுடன் தொடர்புடையதாகும்.

தரவுக் கூட்டப் பெறுமானங்களின் உற்பத்தி A இலிருந்தான விலகல்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி இடைவர்க்க விலகல் என வரையறுக்கப்படும். தரவுக்கூட்ட பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆயின் இடைவர்க்க விலகல் (Mean square deviation),

$$MS_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - A)^2$$ ஆகும். மீடிறன் பரம்பல்களுக்கு

$$MS_D = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - A)^2, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$ ஆகும்.

இடைபற்றிய இடைவர்க்க விலகலின் நேர்வர்க்கமூலம் நியம விலகல் என வரையறுக்கப்படும். இது σ (சிக்மா) வினல் குறிக்கப்படும்.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2}$$

உதாரணம் 5.4; உதாரணம் 4.2 இலுள்ள மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். அங்கு இடை $\bar{X} = 28.57$ ஆகும். இது ஓர் பின்னக மீடிறன் பரம்பலாகும்.

X	f	$X - \bar{X}$	$(X - \bar{X})^2$	$f(X - \bar{X})^2$
10	12	−18.57	344.84	4138.08
20	16	− 8.57	73.44	1175.04
30	20	1.43	2.04	40.80
40	14	11.43	130.64	1828.96
50	8	21.43	459.24	3673.92
மொத்தம்		—	—	10856.80

$$\sum_{i=1}^{5} f_i (X_i - X)^2 = 10856.80$$

$$\sum_{i=1}^{5} f_i = N = 70$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum f_i (X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{10856.8}{70}}$$

$= 12.45$ ரூபாக்கள்.

உதாரணம் 5.5; உதாரணம் 4.3 இல் தரப்பட்ட தொடர்ச்சியான மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். இதன் இடை 56.25 ஆகும்.

உயர வகுப்பு	மத்திய பெறுமானம் X	f	$(X - \bar{X})^2$	$f(X - \bar{X})^2$
45 − < 50	47.5	15	76.56	1148.4
50 − < 55	52.5	25	14.06	351.5
55 − < 60	57.5	35	1.56	54.6
60 − < 65	62.5	20	39.06	781.2
65 − < 70	67.5	5	126.56	632.8

$$\sum_{i=1}^{5} f_i (X_i - \bar{X})^2 = 2968.5, \quad \sum_{i=1}^{5} f_i = 100$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2968.5}{100}} = 5.45$$ அங்குலங்கள்

தேற்றம் 5.2; இடைபற்றிய இடைவர்க்க விலகலே இடைவர்க்க விலகல்களில் இழிவானதாகும்.

நிறுவல் ;

$MS = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - A)^2$ எனும் A பற்றிய இடைவர்க்க விலகலைக் கருதுவோம்.

$$MS = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X} + \overline{X} - A)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})^2 + \frac{2}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})(\overline{X} - A)$$

$$+ \frac{1}{N}\sum fi\,(\overline{X} - A)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})^2 + \frac{2}{N}(\overline{X} - A)(\sum fi\,Xi - \overline{X}\sum fi)$$

$$+ \frac{1}{N}(\overline{X} - A)^2 \sum fi$$

ஆனல் $\overline{X} = \dfrac{\sum fi\,Xi}{\sum fi}$

$$\longrightarrow \overline{X}\sum fi = \sum fi\,Xi$$

$$\therefore MS = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})^2 + O + \frac{1}{N}(\overline{X} - A)^2 N$$

ஆகவே $MS = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})^2 + (\overline{X} - A)^2$

இக்கோவையில் $A = \overline{X}$ ஆயின் மட்டுமே MS இழிவடையும். மேலும்

$$MS_{Min} = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - \overline{X})^2$$

அதாவது $A = \overline{X}$ ஆயின் MS இழிவடையும். எனவே இடைபற்றிய இடைவர்க்க விலகல் இடைவர்க்க விலகல்களுள் இழிவானது.

மாறற்றிறன் (Variance):

இடைபற்றிய இடைவர்க்க விலகல் மாறற்றிறன் என வரையறுக்கப்படும். மேலும் இடைபற்றிய இடைவர்க்க விலகலின் நேர்வர்க்க மூலம் நியம விலகலாதலால், நியமவிலகலின் வர்க்கம் மாறற்றிறனாகும். தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்கள் $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ஆயின் மாறற்றிறன்

$V = \frac{1}{n}\sum (xi - \overline{x})^2$ ஆகும். மீடிறன் பரம்பலுக்கு,

$V = \frac{1}{N}\sum fi\,(xi - \overline{x})^2$; $N = \sum fi$ ஆகும்.

நியம விலகல், மாறற்றிறனின் உடமைகள்:

(i) X தரப்பட்ட புள்ளிவிபரமாறியாகவும் a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருப்பின் புதிய புள்ளிவிபர மாறி y ஆனது $y = aX + b$ என வரையறுக்கப்படுமாயின் $V_y = a^2V_x$ ஆகவும் $\sigma_y = a\sigma_x$ ஆகவும் இருக்கும்.

X இன் மாதிரிப் பெறுமானங்களை $X_1, X_2, \ldots, X_n$ என்க. $y = ax + b$ இனல் தரப்படும் இவற்றிற்கொத்த பெறுமானங்களை $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ என்க.

$$y_i = aX_i + b; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$\longrightarrow \overline{y} = a\overline{X} + b$ என முன்னர் நிறுவப்பட்டது.

$$V_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=i}^{n}\left[(aXi + b) - (a\overline{X} + b)\right]^2$$

$$= a^2, \frac{1}{n}\sum (Xi - \overline{X})^2$$

$$Vy = a^2\,Vx,$$

$$\longrightarrow \sigma y = a\sigma x.$$

(ii) X, Y என்பன இணைவற்ற புள்ளிவிபரமாறிகளாகவும் a, b என்பன மாறிலிகளாகவும் இருப்பின்

$Z = a\,X + b\,y$ என Z வரையறுக்கப்படின்

$Vz = a^2\,Vx + b^2\,Vy$ ஆகும்.

மாறற்றிறனுக்கான இன்னுமொரு சூத்திரம்;

$$V_x = \frac{1}{n}\sum (xi - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum (Xi^2 - 2Xi\,\bar{X} + \bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum Xi^2 - \frac{2\bar{X}}{n}\sum Xi + \frac{1}{n}\sum \bar{X}^2$$

$$= \frac{\sum Xi^2}{n} - 2\bar{X}.\bar{X} + \frac{1}{n}.n\bar{X}^2$$

$$Vx = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{X}^2$$

அதாவது

மாறற்றிறன் = வர்க்கங்களின் இடை — இடையின் வர்க்கம்
Variance = Mean of squares — Square of mean ஆகும்.

சுருக்குமுறை:

புள்ளி விபரமாறி X இன் பெறுமானங்கள் பெரியவையாயின் உடமை (i) இனைப் பயன்படுத்தி, சிறிய பெறுமானங்களையுடைய புதிய புள்ளி விபரமாறி y இனை வரையறுத்து இலகுவாகக் கணிப்பீட்டினை மேற்கொள்ளலாம்.

உதாரணம் 5.6; உதாரணம் 4.4 இனை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$y = \frac{1}{5}(X - 57.5)$

X	f	y	fy	fy²
47.5	15	− 2	−30	60
52.5	25	− 1	−25	25
57.5	35	0	0	0
65.5	20	1	20	20
67.5	5	2	10	20
மொத்தம்			−25	125

$\sum f = 100$

$\sum fy = -25$

$\sum fy^2 = 125$

$V_y = \frac{\sum fy^2}{\sum f} - \bar{y}^2$; $\bar{y} = -0.25$ என

உதாரணம் 4.4 இல் கணிக்கப்பட்டது.

$$\therefore V_y = \frac{125}{100} - (-0.25)^2 = 1.25 - 0.0625$$

$$= 1.1875$$

$y = \frac{1}{5}(x - 57.5)$

$$\longrightarrow V_y = \frac{1}{25} V_x$$

$$\because V_x = 25 \times 1.1875$$

$$= 29.6875.$$

நியமவிலகல் $\sigma_+ = \sqrt{29.6875}$

$= 5.448.$

கூட்டுமீடிறன் பரம்பலின் நியமவிலகல், மாறற்றிறன்:

ஒவ்வொன்றும் $n_1, n_2, \ldots, n_k$ உறுப்புக்களைக்கொண்ட k பரம்பல்கள் அல்லது மாதிரிகள் தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் இடைகளை முறையே $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k$ எனவும், நியமவிலகல்களை முறையே $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_K$ எனவும் கொள்வோம்

பரம்பல்	பரம்பல் அவதானிப்புகள்	இடைகள்	நியம விலகல்கள்
1	$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1}$	$\bar{X}_1$	σ_1
2	$X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2}$	$\bar{X}_2$	σ_2
⋮		⋮	⋮
k	$X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kn_k}$	$\bar{X}_K$	σ_k

கூட்டுப் பரம்பலின் அல்லது கூட்டு மாதிரியின் உறுப்புக்களின் எண்ணிக்கையை N எனவும், அதன் இடை, நியமவிலகல்களை முறையே $\bar{X}$, σ எனவும் கொள்வோம்.

$\bar{X} = \frac{\sum ni\,\bar{X}i}{\sum ni}$ என முன்பு நிறுவப்பட்டது.

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n1}(X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = \frac{1}{n_1}\sum X_{1i}^2 - \bar{X}_1^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n2}(X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = \frac{1}{n_2}\sum X_{2i}^2 - \bar{X}_2^2$$

....

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{n_k}\sum_{i=1}^{n_k}(X_{ki} - \bar{X}_k)^2 = \frac{1}{n_k}\sum X_{ki}^2 - \bar{X}_k^2$$

$$\longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2 = n_1(\sigma_1^2 + \bar{X}_1^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n2} X_{2i}^2 = n_2(\sigma_2^2 + \bar{X}_2^2)$$

....

$$\sum_{i=1}^{n_k} X_{ki}^2 = n_k(\sigma_k^2 + X_k^2)$$

இக் k சமன்பாடுகளைக் கூட்ட

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{ni} X_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{k} n^i\bar{X}_i^2 \qquad \text{———— ———— (1}$$

கூட்டுப் பரம்பலுக்கு

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_i\sum_j X_{ij}^2 - \bar{X}^2$$

$$\sum_i\sum_i X_{ij}^2 = N(\sigma^2 + \bar{X}^2) \qquad \text{.......... ——— (2)}$$

(1), (2) இலிருந்து

$$N\left(\sigma^2 + \bar{X}^2\right) = \sum_i n_i\sigma_i^2 + \sum_i n_i\bar{X}_i^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n^i\left(\sigma^{i2} + \bar{X}_i^2\right) - \bar{X}^2$$

இங்கு $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{X}_i$ ஆகும்

உதாரணம் 5.7; உதாரணம் 4.5 இனை எடுத்துக்கொள்வோம். அங்கு A, B, C வகுப்பு மாணவர்களின் புள்ளிகளின் நியம விலகல்களை முறையே 5, 10, 5 எனக் கொள்வோம்.

$N = 125$, $\bar{X} = 61.4$ *என முன்பு கணிக்கப்பட்டது.*

$$\bar{X}_1 = 55, \quad \bar{X}_2 = 60, \quad \bar{X}_3 = 65$$
$$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 10, \quad \sigma_3 = 5$$
$$n_1 = 25, \quad n_2 = 40, \quad n_3 = 60$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{125}\left[25(55^2 + 5^2) + 40(60^2 + 10^2) + 60(65^2 + 5^2)\right] - 61.4^2$$

$$= \frac{1}{25}(15250 + 29600 + 51000) - 3769.96$$

$$= 3834 - 3769.96$$

$$= 64.04$$

எனவே மாறற்றிறன் 64.04

$\sigma = \sqrt{64.04} = 8.002$ *நியமவிலகல் 8.002 புள்ளிகள்.*

நியம புள்ளி விபரமாறி (Standard statistical Variable):

யாதுமோர் புள்ளி விபரமாறிக்கு இடை, நியமவிலகல் எனும் இரு முக்கிய அளவைகளையும் கணிக்க முடியும். எனவே இடை M உம் மாறற்றிறன் σ^2 உம் உடைய புள்ளி விபரமாறி X இனைக் கருதுக.

$\bar{X} = M$, $V_x = \sigma^2$, $\sigma_x = \sigma$ இது பொதுவான புள்ளிவிபரமாறியாகும். *இடை பூச்சியமும், நியமவிலகல். மாறற்றிறன் ஒன்றுமுடைய புள்ளி விபரமாறி நியம புள்ளி விபரமாறி எனப்படும். அது Z ஆயின்*

$$\bar{Z} = O, \quad \sigma_Z = 1, \quad V_Z = 1$$

எந்த ஒரு புள்ளி விபரமாறியும் சுருக்க சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி நியம புள்ளி விபர மாறியாக மாற்றப்படலாம்.

அதாவது

$\bar{Z} = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$ ஆகும்.

ஏனெனில் $\bar{Z} = \frac{1}{\sigma_X}(\bar{X} - (\bar{\bar{X}}))$

$$= \frac{1}{\sigma_X}(\bar{X} - \bar{X}) = 0$$

$$V_Z = \frac{1}{\sigma_X^2}V_X = \frac{1}{\sigma_X^2}\cdot\sigma_X^2 = 1$$

5.3. மீடிறன் பரம்பல்களை ஒப்பிடல்
(Comparison of distributions)

ஓர் மீடிறன் பரம்பலின் இரு முக்கிய சிறப்புகள் மைய நாட்ட அளவையும், விலகலளவையுமாகும். இவற்றை இதுவரை ஆராய்ந்துள்ளோம். சிறந்த அளவைகளாக இவை முறையே இடை, நியம விலகலினால் அளக்கப்படும். இரண்டு மீடிறன் பரம்பல்கள் தரப்பட்டால் அவற்றின் இடை, நியம விலகல் என்பன கணிக்கப்படும். இவை பின் வரும் வகைகளில் வித்தியாசப்படலாம்.

(i) இரண்டினதும் இடைகள் சமமாகவும், நியமவிலகல்கள் வித்தியாசமுமான வகை

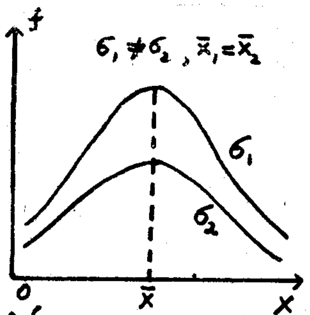
(ii) நியமவிலகல்கள் சமமாகவும், இடைகள் வித்தியாசமானதுமான வகை

(iii) இடையும், நியம விலகலும் சமமான வகை

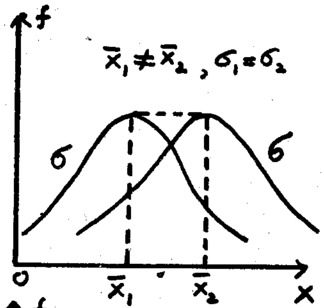
(iv) இரண்டுமே சமமற்ற வகை.

இவை முறையே படங்கள் F25, F26, F27, F28 என்பனவற்றில் தரப்படுகின்றன.

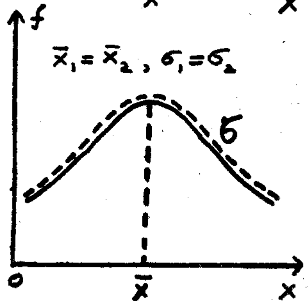
F 25



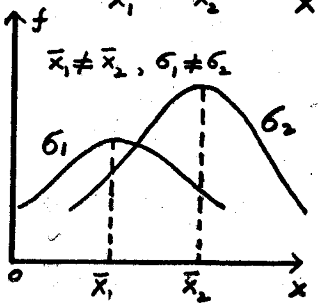
F 26



F 27



F 28



இவ்வகைகள் யாவற்றையும் அவதானிப்போமாயின் அவற்றின் புள்ளி விபரமாறிகள் ஒன்றேயாகும். அவற்றின் அலகுகளும் சமமாகும்.

$\bar{X}_1 = \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 < \bar{X}_2$, $\bar{X}_1 > \bar{X}_2$ ஆயின் மையநாட்ட அளவை சார்பாக பரம்பல்களை சமம், சிறிது பெரிதென ஒப்பிட முடியும். $\sigma_1 = \sigma_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$ ஆயின் விலகலளவை சார்பாக பரம்பல்களின் விலகல்களை சமம், சிறிது, பெரிதென ஒப்பிடமுடியும். பொதுவாக ஒரே குடியிலிருந்து பெறப்பட்ட இரு மாதிரிகளுக்கு இரு மீடிறன் வளையிகளை வரைவோமாயின் அவை வகை (iii) ஆகவும் படம் F 27இலுள்ளது போலவும் இருக்கும்.

தொடர்பு விலகலளவைகள் (Relative measure of Dispersion):

இரு மீடிறன் பரம்பல்களிலும் வெவ்வேறு புள்ளிவிபரமாறிகள் வெவ்வேறு அலகுகளுடன் தரப்படின் அவற்றை நேரடியாக இடை, நியமவிலகலைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிட முடியாது. ஏனெனில் உதாரணமாக 50 kg இற்கும் 80 kg இற்குமிடையில் நிறைகளைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்பலையும், 150 cm இற்கும் 250 cm இற்குமிடையிலுள்ள உயரங்களைக் கொண்ட மீடிறன் பரம்பலையும் நேரடியாக இடை, நியம விலகலைக் கணித்து ஒப்பிடல் கருத்தற்றதாகும். எனவே இவற்றின் இடைகளை ஒப்பிடுவதை விட விலகலை ஒப்பிடுவதே பொருத்தமானதாகிறது. மேலும் இவை வெவ்வேறு அலகுகளையுடையதால் அலகற்ற குணகம் ஒன்றை ஒப்பீட்டுக்கு வரையறுத்தல் அவசியமாகிறது.

பொதுவான தொடர்பு விலகலளவைகள் :

பொதுவாக வழக்கத்திலுள்ள தொடர்புவிலகலளவைகள் பின் வருவனவாகும்.

(i) மாறற் குணகம் (Co-efficient of Variation)

(ii) இடைவிலகல் குணகம் (Co-efficient of Mean deviation)

(iii) காலணை விலகல் குணகம் (Co-efficent of quartile deviation)

இவை மூன்றும் மையநாட்ட அளவையினை, விலகலளவையினால் பிரிப்பதால் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

மாறற் குணகம் $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}}$

இடைவிலகல் குணகம் $CM_D = \frac{M_D}{\bar{X}}$

காலணை விலகல் குணகம் $$CQ_D = \left(\frac{Q_3 - Q_1}{2}\right) \Big/ \left(\frac{Q_3 + Q_1}{2}\right) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

இவை மூன்றும் அலகற்றவையாகவுள்ள அதேவேளையில் விலகலளவைகள் σ, M_D, Q_Dஇல் σ சிறந்ததால் மாறற்குணம் CVயே பொதுவாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் தொடர்பு விலகலளவையாகவுள்ளது.

உதாரணம் 5.8; உதாரணம் 4.3 இலுள்ள உயரத்துக்கான மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம்.

X—உயரம், $\overline{X} = 56.25$ அங்., உதாரணம் 5.6 இலிருந்து $\sigma x = 5.448$ அங்., உதாரணம் 4.2 இலுள்ள ஊதியத்துக்கான மீடிறன் பரம்பலை எடுத்துக்கொள்வோம். X – ஊதியம், $\overline{X} = 28.57$ ரூபாக்கள். உதாரணம் 5.4 இருந்து $\sigma_X = 12.45$ ரூபாக்கள்.

$$\because \ CV_{\text{உயரம்}} = \frac{5.448}{56.25} = 0.096$$

$$CV_{\text{ஊதியம்}} = \frac{12.45}{28.57} = 0.436$$

இம்மாறற் குணங்களை ஒப்பிடுவதன்மூலம் உயரப் பரம்பலின் விலகல் ஊதியப் பரம்பலின் விலகலைவிடச் சிறிது எனும் முடிவுக்கு வரலாம்.

5.4. விலகலளவையுடன் தொடர்புடைய சில அளவைகள்

திருப்பங்கள் (Moments):

திருப்பங்கள் மூன்று வகையாகும். அவையாவன:

(a) பொதுவான திருப்பம் (General moment)
(b) பச்சைத் திருப்பம் (Row moment)
(c) மையத் திருப்பம் (Central moment)

பொதுவான திருப்பங்கள்:

தரவுக்கூட்டப் பெறுமானங்களை $X_1, X_2, \ldots, X_n$ எனவும், அவற்றிடையேயுள்ள ஓர் உற்பத்தியை A எனவும் கொள்வோமாயின் A பற்றிய தரவுக் கூட்டத்தின் r ஆம் திருப்பம் M_r^A இதனல் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$M_r^A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Xi - A)^r, \quad \text{மீடிறன் பரம்பலுக்கு}$$

$$M_r^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} fi\,(Xi - A)^r; \quad N = \sum_{i=1}^{n} fi \ \text{ஆகும்.}$$

குறிப்பு: $A = \overline{X}$, $r = 2$ ஆயின்

$$M_2^{\overline{X}} = \frac{1}{N} \sum f_i\,(X_i - \overline{X})^2 = V_X \ \text{ஆகும்.}$$

அதாவது இடைபற்றிய 2ஆம் திருப்பம் மாறற்றிறனாகும்.

பச்சைத் திருப்பங்கள்:

உற்பத்தி பூச்சியமாகத் தெரிவுசெய்யப்படின் பொதுவான திருப்பங்கள் பச்சைத் திருப்பங்கள் எனப்படும். r ஆம் பச்சைத் திருப்பம் M_r^1 இனல் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$M_r^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r, \quad \text{மீடிறன் பரம்பலுக்கு}$$

$$M_r^1 = \frac{1}{N} \sum f_i\, X_i^r; \quad N = \sum f_i \ \text{ஆகும்.}$$

குறிப்பு; $r = 1$ ஆயின்

$$M_1^1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f_i\, X_i = \overline{X} \ \text{ஆகும்.}$$

அதாவது முதலாம் பச்சைத்திருப்பம் இடையாகும்.

மையத் திருப்பங்கள்:

உற்பத்தி இடையாகத் தெரிவுசெய்யப்படின் பொதுவான திருப்பங்கள் மையத் திருப்பங்கள் எனப்படும். r ஆம் மையத்திருப்பம் M_r இனல் குறிக்கப்பட்டுப் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.

$$M_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^r, \quad \text{மீடிறன் பரம்பலுக்கு}$$

$$M_r = \frac{1}{N} \sum f_i\,(X_i - \overline{X})^r; \quad N = \sum f_i \ \text{ஆகும்.}$$

குறிப்பு; $r = 2$ ஆயின்

$$M_2 = \frac{1}{N} \sum f_i\,(xi - \overline{X})^2 = V_x \ \text{ஆகும்.}$$

அதாவது இரண்டாம் மையத்திருப்பம் மாறற்றிறனாகும்.

பொதுவான திருப்பத்துக்கும், மையத்திருப்பத்துக்குமுள்ள தொடர்பு பின்வருமாறிருக்கும்.

$$M_r^A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - A)^r$$

$$= M_r^1 - \binom{r}{1} M_{r-1}^1 A + \binom{r}{2} M_{r-2}^1 A^2 \ldots\ldots + (-1)^r A^r$$

தேற்றம் 5.3; பொதுவான திருப்பத்துக்கும், மையத்திருப்பத்துக்கும் உள்ள தொடர்பு,

$$M_r = M_r^A - \binom{r}{1} M_{r-1}^A\, M_1^A + \binom{r}{2} M_{r-2}^A\, M^{A2} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-2} \binom{r}{r-2} M_2^A\, M_1^{Ar-2} + (-1)^{r-1} (r-1)\, M_1^{Ar}$$

நிறுவல் ;

$$M_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i (X - \bar{X})^r$$

$$M_r^A = \frac{1}{N}\sum_{i=i}^{n} f_i (x_{ia} - A)^r$$

$X_i - A = y_i$, $\bar{X} - A = d$ என்க.

$$\therefore M_r^A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{h} f_f y_i^r$$

$$M_r = \frac{1}{N}\sum f_i (X_i - X)^r = \frac{1}{N}\sum f_i [(x_i - A) - (\bar{X} - A)]^r$$

$$\therefore M_r = \frac{1}{N}\sum f_i (y_i - d)^r$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i \Big\{ y_i^r - \binom{r}{1} y_i^{r-1} d + \binom{r}{2} y_i^{r-8} d^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1} \binom{s}{r-1} y_i d^{r-1}$$
$$+ (-1)^r \binom{r}{r} d^r \Big\}$$

அதாவது

$$M_r = \left(\frac{1}{N}\sum f_i y^{ir}\right) - \binom{r}{1}\left(\frac{1}{N}\sum f_i y_i^{r-1}\right) d$$
$$+ \binom{r}{2}\left(\frac{1}{N}\sum f_i y_i^{r-2}\right) d^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1}\left(\frac{1}{N}\sum f_i y_i\right) d^{r-1}$$
$$+ (-1)^r d^r$$

$$= M_r^A - \binom{r}{1} M_{r-1}^A d + \binom{r}{2} M_{r-2}^A d^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} M_1^A d^{r-1} + (-1)^r d^r$$

ஆனால் $M_1^A = \frac{1}{N}\sum f_i (X_i - A) = \frac{1}{N}\sum f^i X_i - \frac{1}{N} A \sum f_i$

அதாவது $M_1^A = \bar{X} - A = d$

$$\therefore M_r = M_r^A - \binom{r}{1} M_{r-1}^A M_1^A + \binom{r}{2} M_{r-2}^A M_1^{A2} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r}{r-1} M_1^A M_1^{Ar-1} + (-1)^r M_1^{Ar}$$
$$= M_r^A - \binom{r}{1} M_{r-1}^A M_1^A + \binom{r}{2} M_{r-2}^A M_1^{A2} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^{r-1} (r-1) M_1^{Ar}$$

உதாரணம் 5.9; ஓர் மீடிறன் பரம்பலின் 2 பற்றிய முதல் மூன்று திருப்பங்களும் முறையே 1, 16, — 40 ஆயின் அப்பரம்பலின் இடை, மாறற்றிறன்களைக் காண்க.

$M_1^2 = 1$, $M_2^2 = 16$, $M_3^2 = -40$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$M_1^2 = \frac{1}{N}\sum fi\,(Xi - 2)$$

$$\therefore 1 = \frac{1}{N}\sum fi\;Xi - \frac{2}{N}\sum fi$$
$$= \bar{X} - 2$$
$$\longrightarrow \bar{X} = 3$$

$$M_2^2 = \frac{1}{N}\sum f_i (X_i - 2)^2$$

$$16 = \frac{1}{N}\sum f_i [(X_i - 3) + 1]^2$$

$$16 = \frac{1}{N}\sum f_i (X_j - 3)^2 + \frac{2}{N}\sum f_i (X_i - 3) + \frac{1}{N}\sum f_i$$

$$16 = V_x + 2\left(\frac{\sum f_i X_i}{N} - 3\right) + 1$$

$$16 = V_x + 2(\bar{X} - 3) + 1$$
$$\longrightarrow V_x = 15$$

எனவே இடை 2 உம் மாறற்றிறன் 15 உம் ஆகும்.

உதாரணம் 5.10; மேலே தரப்பட்ட உதாரணத்தில் முதல் மூன்று பச்சைத் திருப்பங்களையும் காண்க.

$$M'_1 = \frac{1}{N}\sum f_i X_i = \bar{X} = 3$$

$$M'_2 = \frac{1}{N}\sum f_i X_i^2 = \frac{1}{N}\sum f_i (X_i - 2 + 2)^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i (X_i - 2)^2 + \frac{2}{N}\Sigma f_j (X_i - 2).2 + \frac{1}{N}\Sigma f_i . 4$$

$$= M_2^2 + 4 M_1^2 + 4$$

$$= 16 + 4 \times 1 + 4$$

$$= 24.$$

$$M'_3 = \frac{1}{N}\Sigma f X_i^3 = \frac{1}{N}\Sigma f_i (X_i - 2 + 2)^3$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i \ [(X_i - 2)^3 + 3 (X_i - 2)^2.2 + 3 (X_i - 2).4 + 8$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i (X_i - 2)^3 + \frac{6}{N}\Sigma f_i (X_i \ 2)^2$$

$$+ \frac{12}{N}\Sigma f_i (X - 2) + \frac{8}{N}\Sigma f_i$$

$$= -40 + 6 \times 16 + 12 \times 1 + 8$$

$$= 76.$$

6. ஓராய அளவையும், குடில அளவையும்

(Measure of Skewness & Kurtosis)

6.1. ஓராய அளவை (Mesaure of Skewness)

ஒவ்வொரு தரவுக் கூட்டமும் சமச்சீரிலிருந்து எவ்வாறு சரிந்திருக்கின்றது என்பதை அளவிடுவதே ஓராய அளவைகளின் நோக்கமாகும்.

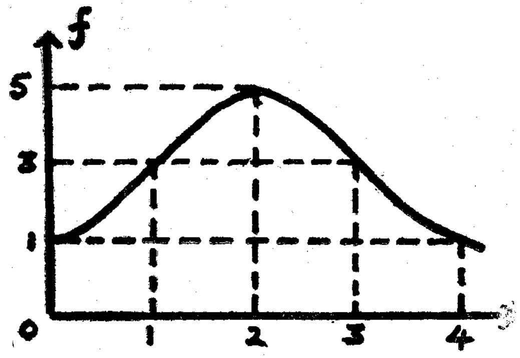
சமச்சீர் மீடிறன்வளையி (Symetrical frequency curve):

சமச்சீர் அச்சுக்கு இருபுறமும் சமதூரங்களில் சம உயரங்களில் புள்ளிகளைக் கொண்ட வளையிகள் அவ்வச்சுப்பற்றி சமச்சீரானவை யாகும். $X = X_0$ பற்றி மீடிறன் வளையி $f(X)$ சமச்சீர் ஆனதாயின் எல்லா h பெறுமானங்களுக்கும்

$f(X_0 - h) = f(X_0 + h)$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

உதாரணம் 6.1; பின்வரும் மீடிறன் பரம்பலைக் கருதுக.

X	f(X)
0	1
1	3
2	5
3	3
4	1



F 29

இங்கு $f(2 - h) = f(2 + h)$ ஆகுமாறு h எவ்வாறும் தெரியப்படலாம். எனவே இது சமச்சீர் வளையியாகும். சமச்சீர் அச்சு $X = 2$ ஆகும்.

ஓராயம்

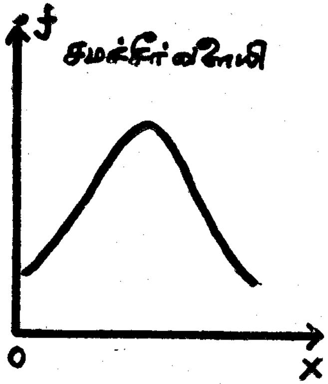
சமச்சீரற்ற வளையிகள் யாவும் ஓராய வளையிகள் எனப்படும். ஓராயம் என்பது சமச்சீரற்றது என்பதைக் குறிக்கிறது. ஓராய வளையிகள் இருவகைப்படும்.

(i) நேர் ஓராயவளையி (Positively skewed curve)

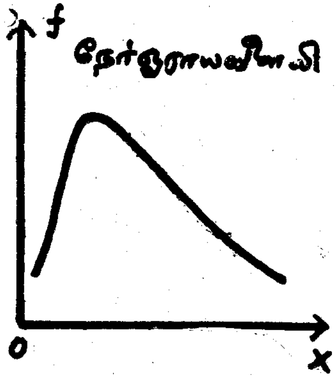
(ii) எதிர் ஓராய வளையி (Negatively skewed curve)

ஓராய வளையியின் நெடிய வால்பகுதி பெரிய பெறுமானங்களை நோக்கியிருப்பின் அது நேர் ஓராய வளையி யெனவும், சிறிய பெறுமானங்களை நோக்கியிருப்பின் அது எதிரோராய வளையி யெனவும் சொல்லப்படும். பொதுவான மீடிறன்வளையிகள் அத்தியாயம் 3இல் தரப்பட்ட (a), (b) வகைகளாகவே இருக்கும். (c), (d) வகைகள் மிகவும் அரிதாகவே இருக்கும். எனவே (a), (b) வகைகளுக்கு மட்டும் ஓராயத்தைப் பரிசோதித்தல் போதுமானதாகும். ஓராய வளையிகளை படங்கள் F 30, F 31, F 32 இலும் அவதானிக்கலாம்.

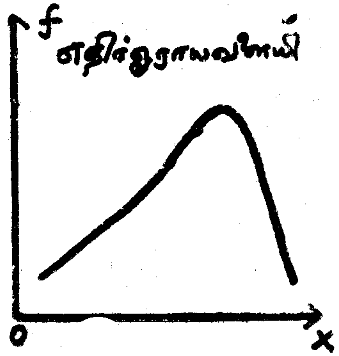
ஓராய வளையிகள் :



F 30



F 31



F 32

தேற்றம் 6.1; சமச்சீர்ப் பரம்பலுக்கு எல்லா ஒற்றை மையத் திருப்பங்களும் பூச்சியமாகவும், நேர்ஓராயப் பரம்பலுக்கும் எதிர் ஓராயப் பரம்பலுக்கும் அவை பூச்சியமற்றதாகவும் இருக்கும்.

நிறுவல் ;

சமச்சீர்ப் பரம்பலுக்கு எல்லா ஒற்றை மையத் திருப்பங்களும் பூச்சியம் எனக் காட்டுவோம். பொதுமைப் பண்புகளில் மாற்றமின்றி X_Oஆனது இடை $\bar{X}$ எனவும் $h \geq o$ எனவும் எடுத்துக்கொண்டால், X_O பற்றி சமச்சீரான மீடிறன் வளையி $f(X)$இற்கு

எல்லா hஇற்கும் $f(X_O + h) = f(X_O - h)$ ——— ——— (i)

எனவே மையத்திருப்பங்கள்,

$$M_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_O)^r f(X_i) ; \quad N = \sum f_i$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{X_i < X_O} (X_i - X_O)^r f(X_i) + \sum_{X_i > X_O} (X_i - X_O)^r f(X_i) \right]$$

r ஒற்றையாயின்,

$$M_r = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{X_i < X_O} [-(X_O - X_i)^r f(X_i)] + \sum_{X_i > X_O} (X_i - X_O)^r f(X_i) \right\}$$

$$X_i = \begin{cases} X_O - h ; & \text{எல்லா } X_i < X_O\text{இற்கும்} \\ X_O + h ; & \text{எல்லா } X_i > X_O\text{இற்கும்} \end{cases}$$

$$\therefore M_r = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{X_i < X_O} [-h^r f(X_O - h)] - \sum_{X_i > X_O} h_r f(X_O + h) \right\}$$

$$\therefore M_r = \frac{h^r}{N} \left\{ \sum_{X_i > X_o} f(X_o + h) - \sum_{X_i < X_e} f(X_e - h) \right\}$$

———(2)

ஆனல் (1)இலிருந்து

$f(X_O + h) = f(X_o - h)$ எல்லா hஇற்கும்

$\therefore M_r = O$

அதாவது r ஒற்றையாயின் சமச்சீர்ப்பரம்பல்களுக்கு மையத்திருப்பம் M_r பூச்சியமாகும்.

ஓராயப் பரம்பல்களுக்கு அதாவது சமச்சீரற்றவைகளுக்கு

$f(X_o + h) \neq f(X_o - h)$ ஆதலால் $M_r \neq 0$ ஆகும்.

குறிப்பு; முதலாம மையத்திருப்பமும் ஓர் ஒற்றை மையத் திருப்ப மாகும். ஆனல் இது எல்லாப் பரம்பல்களுக்கும் (சமச்சீர், சமச்சீ ரற்ற) பூச்சியமாகும்.

$$M_r = \frac{1}{N} \sum f_i (X_i - \overline{X})^1$$

$$= \frac{1}{N} \sum f_i X_i - \frac{\overline{X}}{N} \sum f_i$$

$$= \overline{X} - \overline{X} = O$$

பொதுவான ஓராய அளவைகள் :

பொதுவாக வழக்கத்திலுள்ள ஓராய அளவைகள் பின்வருவன வாகும்.

1. M_3, β_1, γ_1.
2. கால்-பியர்சனின் ஓராய குணகம் (Karl Pearson's Co-efficient of Skewness)
3. காலணை ஓராய அளவை அல்லது வோலியின் ஓராயக் குணகம் (Quartile measure of Skewness or Bowley's Co-efficient of Skewness)
4. தசமனை ஓராய அளவை, சதமனை ஓராய அளவை அல்லது கெலியின் ஓராயக்குணகம் (Decile, Percentite measure of Skewness or Kelly's Co-efficient of Skewness)

<u>M_3, β_1, γ_1</u>

மூன்றும் மத்திய திருப்பம் M_3;

சமச்சீர்ப்பரம்பலுக்கு ஒற்றை மத்திய திருப்பங்கள் பூச்சியமாகவும், நேர் ஓராயப் பரம்பலுக்கு அவை நேராகவும், எதிர் ஓராயப் பரம் பலுக்கு அவை எதிராகவும் இருக்கும். ஆனல் முதலாம் திருப்பம் எல்லாவற்றுக்கும் பூச்சியமாதலால் விதிவிலக்கானது. எனவே அடுத்த ஒற்றை மையத்திருப்பம் M_3 பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது அலகுள்ள தாகவும், கருத்தற்றதாகவும் இருப்பதால் β_1 எனும் குணகம் வரை யறுக்கப்படுகிறது.

$\beta_1 = M_3^2 / M_2^3$, ஆனல் இவ் அளவை பரம்பல்களை சமச்சீர், சமச் சீரற்றது எனப் பிரிக்கவே உதவும். இதன்மூலம் நேர், எதிர் ஓராயப் பரம்பல்களை இனம் காணமுடியாது. எனவே γ_1 வரையறுக்கப்படு கிறது.

$$\gamma_1 = \begin{cases} + \sqrt{M_3^2 / M_2^3} & ; M_3 < O \\ - \sqrt{M_3^2 / M_2^3} & ; M_3 < O \end{cases}$$

$M_3 > O$ ஆயின் $\gamma_1 > O$ ஆகவும், $M_3 > O$ ஆயின் $\gamma_1 > O$ ஆகவுமிருப்ப தால் γ_1 இனைப் பயன் படுத்தலாம். ஆனல் இது இலகுவான கணிப் பீடுகளைத் தராததால் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுவதில்லை.

கால்–பியர்சனின் ஓராயக் குணகம் :

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட அளவையை விடச் சிறந்த அளவை ஒன்றைப் பியர்சன் என்பவர் வரையறுத்தார். இவ் அளவை இடை. இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றின் நிலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப்பட்டது. அத்தியாயம் 4இலுள்ள மீடிறன்வளையிகள் F22, F23, F24 என்பனவற்றை எடுத்துக்கொள்வோம்.

சமச்சீர்ப் பரம்பலுக்கு, இடை = இடையம் = ஆகாரம்

நேர்ஓராயப் பரம்பலுக்கு, இடை > இடையம் > ஆகாரம்

எதிர்ஓராயப் பரம்பலுக்கு, இடை < இடையம் < ஆகாரம்

எனவே மேற்குறிப்பிடப்பட்ட பரம்பல்களுக்கு முறையே பூச்சிய, நேர், எதிர் பெறுமானங்களைத் தரும், அலகற்ற ஓராய அளவையாக பியர் சனின் ஓராயக் குணகம் பின்வருமாறு தரப்படுகிறது. இது G இனல் குறிக்கப்படும்.

$$G = \frac{\overline{X} - Mo}{\sigma} = \frac{\text{இடை} - \text{ஆகாரம்}}{\text{நியம விலகல்}}$$

சில பரம்பல்களில் ஆகாரம் Mo இனது திருத்தமான பெறுமானங் களைப் பெறுதல் இலகுவானதல்ல. இவ்வகைக்கு அத்தியாயம் 4இலுள்ள தொடர்பு (17) பயன்படுத்தப்படும். அதாவது ஆகாரத்துக்கு பதில் இடையம் பயன்படுத்தப்படும். அத் தொடர்பு

$$\overline{X} - Mo = 3(\overline{X} - Me) \text{ ஆதலால்}$$

$$G = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\sigma} \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 6.2; ஓர் மீடிறன் பரம்பலின் இடை, நியம விலகல், பியர்சனின் ஓராயக் குணகம் என்பன முறையே 29.6, 6.5, 0.32 ஆகும். இப்பரம்பலின் இடையம், ஆகாரம் என்பனவற்றைக் காண்க.

$\bar{X} = 29.6, \quad \sigma = 6.5, \quad G = 0.32$

G நேர்ப்பெறுமானமாதலால் இது ஓர் நேர் ஓராயப் பரம்பலாகும். அதாவது இதன் மீடிறன் வளையி இடதுபுறம் சரிந்ததாகும். இதன் இடையம், ஆகாரம் என்பவற்றை முறையே Me, Mo என்க.

$$G = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma}$$

$$\therefore 0.32 = \frac{29.6 - Mo}{6.5}$$

$$\therefore Mo = 29.6 - 0.32 \times 6.5$$

$$= 27.52$$

மேலும் நேர் ஓராயப் பரம்பலுக்கு $\bar{X} > Me > Mo$ உம் ஆகும்.

$$\bar{X} - Mo = 3\,(\bar{X} - Me)$$

$$\bar{X} - Me = \tfrac{1}{3}\,(\bar{X} - Mo)$$

$$29.6 - Me = \tfrac{1}{3}\,(29.6 - 27.52)$$

$$= 0.693$$

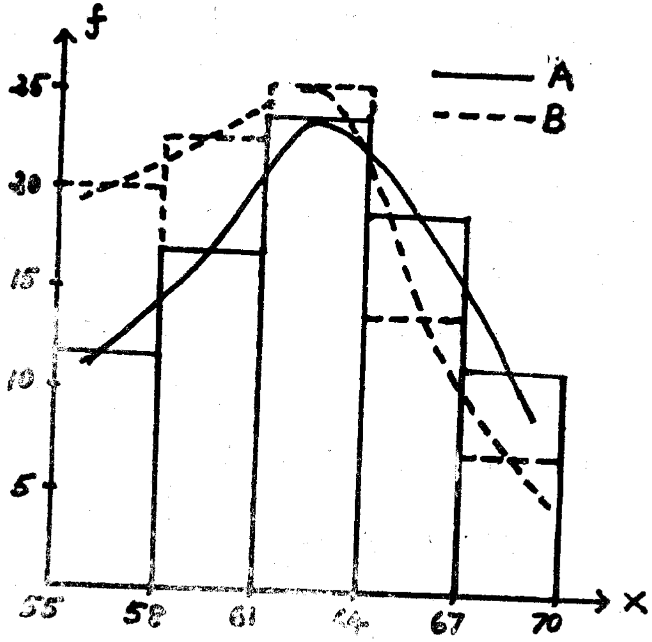
$$Me = 28.907.$$

உதாரணம் 6.3; ஓராயக் குணகங்களைக் கணிப்பதன் மூலம் பின்வரும் இரு மீடிறன் பரம்பல்களில் எது அதிகூடிய சரிவுடையதெனக் காண்க.

இருவகுப்புகள் A, Bஇல் மாணவர்கள் ஒரு வினாத்தாளில் பெற்ற புள்ளிகளை இம்மீடிறன் பரம்பல்கள் குறிக்கின்றன.

புள்ளி வகுப்புகள்	மாணவர் எண்ணிக்கை	
	வகுப்பு A	வகுப்பு B
55 — 58	12	20
58 — 61	17	22
61 — 64	23	25
64 — 67	18	13
67 — 70	11	7

ஓராயக் குணகங்களை வைத்து ஒப்பிடுமுன்னர் இரண்டினதும் மீடிறன் வளையிகளை ஒரே வரைபில் வரைவதன்மூலம் ஒப்பிடுவோம்.



F 33

இவ்விரு வளையிகளையும் நோக்குவோமாயின் அவை நடுப்புள்ளிக்கு இடதுபுறம் உயர்ந்தும் வலதுபுறம் பதிந்தும் இருப்பதைக் காணலாம். எனவே அவை இரண்டினதும் வால்பகுதிகள் இடப்பக்கமுள்ளன. அதாவது அவையிரண்டும் எதிர்ஓராய வளையிகளாகும். ஆனால் அவற்றில் சரிவு கூடியது எது என்பதை விளக்குவதற்கு ஓராயக்குணகமே தேவையாகும்.

இதற்கு சுருக்கு முறையினைப் பயன்படுத்துவோம் :

புள்ளி வகுப்பு	மத்திய பெறுமானம் X	y	வகுப்பு A			வகுப்பு B		
			f	fy	fy²	f	fy	fy²
55—58	56.5	—2	12	—24	48	20	—40	80
58—61	59.5	—1	17	—17	17	22	—22	22
61—64	62.5	0	23	0	0	25	0	0
64—67	65.5	1	18	18	18	13	13	13
67—70	68.5	2	11	22	44	7	14	28
மொத்தம்			81	—1	127	87	—35	143

இங்கு சுருக்கத்தொடர்பு $y = \frac{1}{3}(X - 62.5)$ ஆகும்.

பரம்பல் A இற்கு :

$$\bar{y} = \frac{\Sigma fy}{\Sigma f} = \frac{-1}{81} = -0.012$$

$$V_y = \frac{\Sigma fy^2}{\Sigma f} - \bar{y}^2$$

$$= \frac{127}{81} - (-0.012)^2 = 1.5678$$

$$y = \frac{1}{3}(x - 62.5)$$

$$\longrightarrow \bar{X} = 62.5 + 3\bar{y} \ \& \ V_x = 9 V_y$$

$$\therefore \bar{X} = 62.5 - 3 \times 0.012, \quad V_x = 9 \times 1.5678$$

$$= 62.46 \qquad\qquad = 14.11$$

$$\therefore \sigma_x = 3.756$$

எனவே வகுப்பு Aஇலுள்ள மாணவர்களின் சராசரிப் புள்ளி 62.46உம், நியமவிலகல் 3.756உம் ஆகும்.

A இல் அதி உயர்மீடிறன் 23 ஆகும். எனவே ஆகாரவகுப்பு (61 — 64) ஆகும்.

$$M_0 = l_1 + \left(\frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2}\right)(l_2 - l_1)$$

$$\therefore l_1 = 61, \ l_2 = 64, \ f_0 = 23, \ f_1 = 17, \ f_2 = 18$$

$$\therefore M_0 = 61 + \left(\frac{23 - 17}{46 - 17 - 18}\right)(64 - 61)$$

$$= 61 + 1.636$$

$$= 62.636$$

பரம்பல் Bஇற்கு;

$$\bar{y} = \frac{-35}{87} = -0.402$$

$$V_y = \frac{143}{87} - (0.402)^2 = 1.482$$

$$\bar{X} = 62.5 - 3 \times 0.402 \quad \& \quad V_x = 9 \times 1.482$$

$$= 61.294 \qquad\qquad = 13.338$$

$$\therefore \sigma_x = 3.652$$

எனவே வகுப்பு Bஇலுள்ள மாணவர்களின் சராசரிப்புள்ளி 61.294உம், நியமவிலகல் 3.652உம் ஆகும்.

Bஇல் அதியுயர் மீடிறன் 25 ஆகும். எனவே ஆகாரவகுப்பு (61 — 64) ஆகும்.

$$\therefore l_1 = 61, \ l_2 = 64, \ f_0 = 25, \ f_1 = 22, \ f_2 = 13$$

$$\therefore M_0 = 61 + \left(\frac{25 - 22}{50 - 22 - 13}\right)(64 - 61)$$

$$Mo = 61 + 0.6 = 61.6$$

அதாவது $\bar{X}_A = 62.46$, $\bar{X}_B = 61,294$

$$\sigma_A = 3.756, \quad \sigma_B = 3.652$$

$$Mo_A = 62.626, \quad Mo_B = 61.6$$

ஓராயக் குணகம் $G = \dfrac{\bar{X} - Mo}{\sigma}$

$$\therefore G_A = \frac{62.46 - 62.636}{3.756} = -0.046$$

$$G_B = \frac{61.294 - 61.6}{3.652} = -0.083$$

இக் குணகங்களிலிருந்து, இரண்டும் மறைப்பெறுமானங்களாதலால் இரண்டும் எதிர் ஓராயப் பரம்பலாகும். இது முன்பும் விளக்கப்பட்டது.

இவற்றின் தனிப் பெறுமானங்களை நோக்கின் பரம்பல் Bஇற்குப் பெரிதாகும். எனவே பரம்பல் B ஆனது A ஐ விடக் கூடிய சரிவுடையது.

தேற்றம் 6.2; பியர்சனின் ஓராயக் குணகத்தின் மட்டுப்பெறுமானம் எப்பொழுதும் மூன்றிலும் சிறியதாகும்.

அதாவது $-3 \le G \le 3$ ஆகும்.

நிறுவல்; மீடிறன் பரம்பலின் இடை, இடையங்களை $\bar{X}$, Me என்க. ஆயின்,

$$| \bar{X} - Me | = \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - Me \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n}\sum (X_i - Me) \right|$$

$$= \frac{1}{n} \left| \sum (X_i - Me) \right|$$

$$\le \frac{1}{n} \sum | X_i - Me |$$

அதாவது $|\bar{X} - Md| \le \dfrac{1}{n} \sum |X_i - Me|$ ——— (1)

$a_i = |X_j - \bar{X}|$, $b_i = 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$ என்க,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$= n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 - n\sigma^2$$

$$\sum_{=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} = n$$

$$\sum^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} / X_i - \bar{X} /$$

ஆனால்

$$(\sum a_i b_i)^2 \le (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$$

$$\therefore (\sum / X_i - \bar{X} /)^2 \le (n\sigma^2)(n) = n^2 \sigma^2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} / X_i - \bar{X} / \le n\sigma$$

அதாவது $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} / X_i - \bar{X} / \le \sigma$ ——— (2)

ஆனால் ஓர் மீடிறன் பரம்பலுக்கு இடையம்பற்றிய இடை விலகலே இழிவானதாகும். (தேற்றம் 5.1)

அ—து $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} /X_i - Me / \le \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} /X_i - \bar{X} /$

——— (3)

(2) , (3) இலிருந்து

$$\frac{1}{n} \sum /X_i - Me/ \le \sigma \qquad \text{——— (4)}$$

(1) , (4) இலிருந்து

$$/ \bar{X} - Me/ \le \sigma$$

அதாவது $-\sigma \le (\bar{X} - Me) \le \sigma$

ஆனால் $\bar{X} - Mo = 3(\bar{X} - Me)$

$$\therefore -3\sigma \le (X - Mo) \le 3\sigma$$

$$\therefore -3 \le \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma} < 3$$

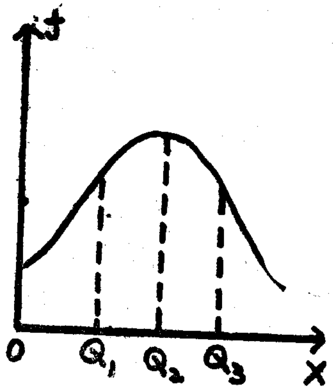
$\therefore \; -3 \leq G \leq 3$ அல்லது $|G| \leq 3$

எனவே தேற்றம் உண்மையாகும்.

காலணை ஓராய அளவை (வோலியின் ஓராயக் குணகம்) ;

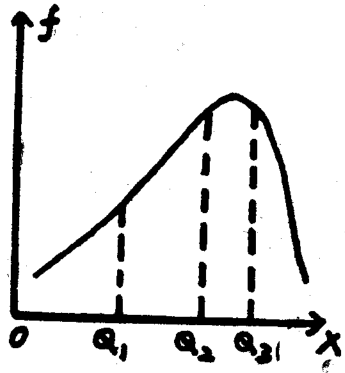
இது காலணைகளின் நிலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப்படுகிறது.

சமச்சீர்



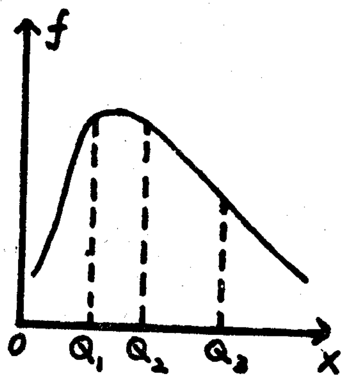
F 34

நேர் ஓராயம்



F 35

எதிர் ஓராயம்



F 36

சமச்சீர் பரம்பலுக்கு $Q_3 - Q_2 = Q_2 - Q_1$ ஆகும்.

நேர் ஓராயப் பரம்பலுக்கு $Q_3 - Q_2 > Q_2 - Q_1$ ஆகும்.

எதிர் ஓராயப் பரம்பலுக்கு $Q_3 - Q_2 < Q_2 - Q_1$ ஆகும்.

இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டு அலகற்ற காலணை ஓராய அளவை G^1 வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$G^1 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_D}$$

$$\therefore \; G^1 = \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,Q_2}{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)}$$

இவ் அளவையிலுள்ள ஓர் குறைபாடு யாதெனில் பரம்பலின் எல்லாப் பெறுமானங்களும் கருத்தில் கொள்ளப்படுவதில்லை. எனவே பியர்சனின் ஓராயக் குணகம் இதனைவிடச் சிறந்ததாகும்.

G^1 இன் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து மேலேயுள்ள நிபந்தனைகளைப் பாவிப்பதன் மூலம் சமச்சீர், நேர், எதிர் ஓராயப் பரம்பல்களுக்கு முறையே G^1 ஆனது பூச்சியம், நேர், எதிர் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

உதாரணம் 6.4 ; ஓர் மீடிறன் பரம்பலின் மேல், கீழ் காலணைகளின் வித்தியாசம் 15உம், மொத்தம் 35உம், இடையம் 20உம் ஆகும். இப்பரம்பலின் சமச்சீர்த்தன்மையை ஆராய்க.

$$Q_3 - Q_1 = 15, \; Q_3 + Q_1 = 35, \; Q_2 = Me = 20$$

$$\therefore \; G^1 = \frac{35 - 2 \times 20}{\frac{1}{2} \times 15} = -0.66$$

எனவே இப்பரம்பல் எதிர் ஓராயப் பரம்பலாகும்.

தேற்றம் 6.3 ; வோலியின் ஓராயக்குணகத்தின் மட்டுப்பெறுமானம் எப்பொழுதும் இரண்டிலும் சிறிதாகும்.

நிறுவல் ; $Q_1 \leq Q_2 \leq Q_3$

$$\therefore \; |(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)| \leq |(Q_3 - Q_2) + (Q_2 - Q_1)|$$

அதாவது $|(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)| \leq |(Q_3 - Q_1)|$

$$\left| \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{\frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)} \right| \le 2$$

அதாவது $|G^1| \le 2$

எனவே தேற்றம் உண்மையாகும்.

கெலியின் ஓராயக்குணகம்:

இது தசமன்களின் நிலைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. சமச்சீர், நேர் ஓராய, ஒதிர் ஓராயப் பரம்பல்களுக்கு முறையே

$$D_9 - D_5 = D_5 - D_1$$

$$D_9 - D_5 > D_5 - D_1$$

$$D_9 - D_5 < D_5 - D_1$$ ஆகும்.

எனவே ஓராய அளவை

$$K = \frac{(D_9 - D_5) - (D_5 - D_1)}{\frac{1}{2}(D_9 + D_1)}$$

என வரையறுக்கப்படும். இது மேற் சொல்லப்பட்ட பரம்பல்களுக்கு முறையே பூச்சிய, நேர், எதிர்ப் பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

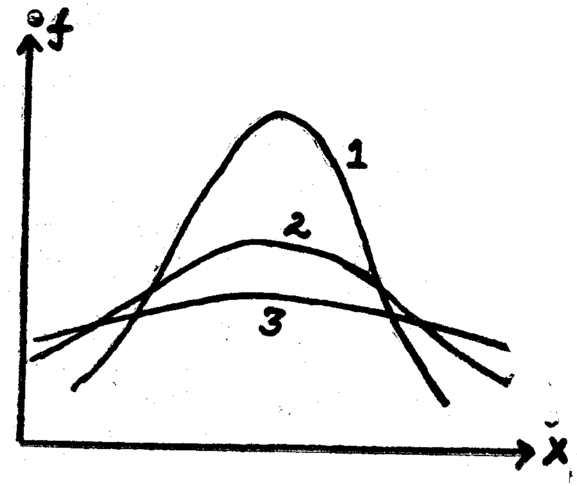
மேலும்

$$K = \frac{(P_{99} - P_{50}) - (P_{50} - P_1)}{\frac{1}{2}(P_{99} + P_1)}$$

எனவும் வரையறுக்கப்படும். இங்கு D_i, P_i என்பன முன்பு வரையறுக்கப்பட்ட i ஆம் தசமனை, i ஆம் சதமனை ஆகும்.

6.2. குடில அளவை (Measure of Kurtosis)

சமச்சீரான வளையிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். இரு சமச்சீரான பரம்பல்களின் மையநாட்ட அளவைகளும், விலகல்களும் சமமாயிருந்தாலும் அவை ஒரே பரம்பல் எனக் கூற முடியாது. ஏனெனில் அவற்றின் தட்டைத்தன்மை அல்லது உயரம் வித்தியாசப்படலாம்.



F 37

எனவே, இவற்றை வேறுபடுத்துவதற்கோ அல்லது ஒப்பிடுவதற்கோ ஓர் அளவை அவசியமாகும். இது குடில அளவை எனப்படும். இவ்வாறு வேறுபடுத்துவதற்கு ஓர் நியமவளையி (நியம பரம்பலுக்கானது) அவசியமாகும். இது செவ்வன் வளையி எனப்படும். இவ்வளையியுடன் ஏனைய வளையிகள் ஒப்பிடப்படும். அதனை விட தட்டையானவையா அல்லது உயர்ந்தவையா என அளவிடப்படும். ஒப்பீட்டு ரீதியில் இரண்டு வளையிகளில் எது உயரம் குறைந்தது, எது கூடியது என அளவிடப்படும்.

பொதுவான குடில அளவை :

பொதுவாக பயன்படுத்தப்படும் குடில அளவை கால் — பியர்சன் என்பவர் வரையறுத்த குடிலக் குணகமாகும். இது β_2 இனால் குறிக்கப்படும்.

$$\beta_2 = M_4 / M_2^2$$

இது அலகற்றதாகும். மேலே தரப்பட்ட படம் F 37 இல் வளையிகள் 1, 2, 3 இல் 2 பொதுவான செவ்வன் வளையியாகும். வளையி 1 அதனைவிடக் குவிவாகவும் வளையி 3 அதனை விடத் தட்டையானதுமாகும்.

ஒப்பீடு ; செவ்வன் வளையிக்கு $\beta_2 = 3$ ஆகவும், அதனைவிட தட்டையானவைக்கு $\beta_2 < 3$ ஆகவும், அதனைவிட குவிவானவைக்கு $\beta_2 > 3$ ஆகவும் இருக்கும்.

இதனைவிட γ_2 எனும் ஓர் அளவையும் வரையறுக்கப்படும். அதாவது

$$\gamma_2 = \beta_2 - 3$$ ஆகும்.

இவ் அளவையில்; செவ்வன், தட்டையான, குவிந்த பரம்பல்களுக்கு முறையே $\gamma_2 = 0$, $\gamma_2 < 0$, $\gamma_2 > 0$ ஆகவிருக்கும்.

உதாரணம் *6.5*; பின்வரும் பரம்பலைக் கருதுக.

X	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})^4$
2	*—4*	*16*	*256*
3	*—3*	*9*	*81*
7	*1*	*1*	*1*
8	*2*	*4*	*16*
10	*4*	*16*	*256*
மொத்தம்	*0*	*46*	*610*

இங்கு $\overline{X} = 6$ ஆகும்

$$M_2 = \frac{1}{n} \sum (X^i - \overline{X})^2 = \frac{46}{5} = 9.2$$

$$M_4 = \frac{1}{n} \sum (X^i - \overline{X})^4 = \frac{610}{5} = 122$$

$$\beta_2 = M_4 / M_2^2 = 122 / (9.2)^2$$
$$= 1.4$$

$\beta_2 < 3$ ஆதலால் இப்பரம்பல் தட்டையானதாகும்.

ஓராய அளவைக்கும், குடில அளவைக்கும் உள்ள தொடர்பு:

β_1, β_2 என்பன முறையே ஓராய, குடில அளவைகளாகும். இவை இரண்டும் திருப்பங்களைக்கொண்டு வரையறுக்கப்பட்டவையாகும். எனவே இவையிரண்டும் ஒப்பிடக் கூடியவையாகும்.

இது $\beta_2 > \beta_1 + 1$ இனால் தரப்படும்.

உசாத்துணை நூல்கள்

1. C. G. Ramamoorthy, K. Viswanathan & P. U. Surendran (1974)
   "A concise book on Statistics,"

2. D. C. Sancheti & V. K. Kapoor (1985)
   "Statistics theory. Methods & Application"

3. B. D. Gupta & O. P. Gupta (1971)
   "Mathematical Statistics"

4. Taro Yamane (1973)
   "Statistics, an introductory analysis"

திருமகள் அழுத்தகம், சுன்னாகம்