S. Thayalini
Year 12 Maths
Applied Maths

GCE A/L APPLIED MATHEMATICS HYDROSTATICS

Worked Examples

& Problems

510
[illegible]
IPR

VECTOR P. VELAUTHAM B.Sc

S. PREMNATH B.Sc

க. பொ. த. உயர்தர மாணவர்களுக்குரியது

நீர் நிலையியல்

வெக்டர் P. வேலாயுதம் B. Sc.
S. பிரேம்நாத் B. Sc.

விலை

அட்டை : "நீர் நிலையியல்"

ஆசிரியர்கள் : P. வேலாயுதம் B. Sc
S. பிரேம்நாத் B. Sc

வெளியீடு : S. கணபதிப்பிள்ளை
230, நாவலர் வீதி,
ஆனைப்பந்தி,
யாழ்ப்பாணம்.

அளவு : 1 8 (21 · 6 சமீ × 13 5 சமீ)

பதிப்பு : ஒக்டோபர் 1988

அட்டைப் படம்: தவம்

அச்சுப் பதிவு: பஸ்ரியன் அச்சகம்
பிரதான வீதி,
யாழ்ப்பாணம்.

விலை ரூபா : 30-00

முன்னுரை

உயர்தர வகுப்பில் பிரயோக கணித பாடத்தை விரும்பிக் கற்க முயலும் மாணவர்கள் பலர். கற்றுக்கொண்டிருக்கும் போது ஏற்படும் மலைப்பினால் பாடத்தினைத் தொடர்ந்து சீரணிக்க முடியாமல் அல்லற்படுகிறார்கள். காரண காரியத் தொடர்போடு கற்பிக்கும் ஆசிரியர் சமுதாயம் இதனைப் பற்றிச் சிந்திக்க வேண்டிய கடமைப்பாட்டில் இருந்து விலகமுடியாது. கற்பித்தல் நிகழும்போது கணித பாட எடுகோள்களும் அவற்றின் அடிப்படைத் தத்துவங்களும் மாணவர்களுக்குப் புரியாத புதிராக அமைந்துவிடுவதே முக்கிய அடிப்படைக் காரணம் என்பதை நாம் நினைவிற் கொள்ளல் வேண்டும்.

கற்றலில் தேடல், பதித்தல், பிரயோகம் கண்டுபிடித்தல் என்ற அடிப்படைச் சிறப்பம்சங்கள் மாணவரின் கற்றல் முயற்சிக்கு வழிகாட்டிகளாக அமைய வேண்டுமென்பது கல்வி உளவியலறிஞரின் கருத்தாகும். இவற்றில் கண்டுபிடித்தல் என்ற அம்சம் உயர்தர வகுப்பு மாணவர்க்குக் கைவந்த கலையாகும் அளவுக்கு கற்பிக்கும் ஆசிரியர் வழிகாட்டியாகச் செயற்பட்டால், கணித பாடம் தெளிந்த நீராக மாணவர்க்குக் குளிர்மை ஊட்டும். இதனால் குறித்த நேரத்தில் குறித்த விடயத்தை மாணவர் விருப்பத்தோடு விளையாட்டாக மனமகிழ்ச்சியுடன் செய்து வேண்டிய தரத்தில் சித்தி காண்பார்கள்.

இந்நூல் கடந்தகாலப் பரீட்சை வினாக்களின் அமைவில் உருவாக்கப்பட்டது. பரீட்சையில் மாணவர் விடும் பிழைகளை, பொது மையமாக வைத்துச் சிந்தித்தே அவற்றை நிவர்த்தி செய்யும் வழிமுறைகளை ஆதார பூர்வமாக விளக்கிச்செய்யப்பட்ட பயிற்சிகள் இந்நூலில் காட்டப்பட்டுள்ளன. இச்செயல் முறைகள் மாணவர்களின் சிந்தனையையும் விளக்கவாற்றலையும் உயர்த்தும் என்பது எனது நம்பிக்கை. கீழ் வகுப்புகளில் கணிதம் கற்பிக்கும் முறைகள் மாற்றமுற்று வரும் இக்காலத்திலே, கணிதச் செயற்பாடுகளை உயர்தர வகுப்பு மாணவர்கள் இலகுவான வழிமுறைகளைக் கையாண்டு நேரத்தை மீதப்படுத்தி நுட்பமாகச் செய்து சரியான விடை காண உற்சாகப்படுத்த வேண்டுமேயொழிய, சோர்வடைய விடுதல் தகாது. ஆசிரிய உலகுக்கு

உகந்ததாக அமையாது, எந்த ஒரு கணக்குக்கும் செய்கை முறைவழிகள் பல இருக்கலாம். ஆனுல் அடிப்படைத் தத்துவங்கள் ஒன்றுதான் என்பதில் தவறிருக்க முடியாது.

புள்ளி வழங்கும் திட்டத்தில் எல்லாச் செயல் முறைகளும் அவசியமில்லை என்பது எனது கருத்தாகும். சரியான தத்துவங்களை மாணவர்கள் பிரயோகித்து கணக்குகளைச் செய்திருந்தால் அதற்குரிய பூரண புள்ளிகளை வழங்க வேண்டியது புள்ளியிடுபவரின் கடமையென நான் கருதுகிறேன். ஏனெனில் மாணவர்களின் புதுவழிமுறைகளைக் கொண்ட சரியான செயற்பாடுகளைப் புறக்கணித்தால், மாணவரின் ''கண்டுபிடித்தல்'' என்ற அறிதிறனைக் கூர்மைப்படுத்த வேண்டிய ஆசிரிய சமுதாயம், அதனைக் மழுங்கடித்து மாணவரின் இயல்பூகத்துக்கு அணை போட்டுத் தடுத்தது என்னும் பழி பாவத்துக்கு இலக்காகக் கூடாதென எண்ணுகிறேன். ''புதியன புகுதல்'' தவிர்க்க முடியாதது. கணித மேதைகள் எப்படித் தோன்றினுர்கள் என்பது பற்றி ஆசிரியரும் முழுக்கச் சிந்திக்க வேண்டும்.

இந்நூலை உருவாக்க உதவி செய்து என்னேடு ஒத்துழைத்த எனது மாணவனும் வளர்ந்து வரும் ஆசிரியருமாகிய எனது நண்பர் திரு. S. பிரேம்நாத் அவர்களுக்கு நான் கடமைப் பட்டுள்ளேன்.

உடுப்பிட்டி.

வெக்டர் P வேலாயுதம்

அதிகாரம் 1

1. அடர்த்தி

ஒரு பொருளின் திணிவு m கிராம் எனவும், அதன் கனவளவு v க. சமீ. எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் அதன் அடர்த்தி d ஆனது

$d = \frac{m}{v}$ என வரையறுக்கப்படும்.

v = 1 என எடுப்போமாயின் d = m ஆகும். இதிலிருந்து அடர்த்தியைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் அதாவது ஒரு பதார்த்தத்தின் அடர்த்தி அப்பதார்த்தத்தின் ஒரு கனவளவலகின் திணிவாகும்.

ஒரு கன அடி நீரின் திணிவு 62.5 இருத்தல் எனக் கொள்ளப்படும். ஒரு கன சதம மீற்றரின் நீரின் திணிவு ஒரு கிராம் எனக் கொள்ளப்படும். ஆகவே ச. கி. செ. இல் நீரின் அடர்த்தி ஒன்ருகும் இதன் அலகு gm/cm^3 OR $gm\ cm^{-3}$ என எழுதுவோம். பரிமாணங்கள் ML^{-3} ஆகும்.

m = vd என இடலாம். இப்பொருளின் நிறை w வானது

$$w = mg \text{ எனக் கூறுவோம்.}$$
$$= Vdg \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு g ஆனது புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல்.

தன்னீர்ப்பு (சாரடர்த்தி) ஒரு பதார்த்தத்தின் கனவளவு V எனவும் அதன் நிறை W எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். V கனவளவுள்ள நீரின் நிறை W^1 எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். ஆயின் அப்பார்த்தத்தின் தன்னீர்ப்பு S ஆனது $S = \frac{W}{W^1}$ என வரையறுக்கப்படும்.

இதை நாம் பின்வருமாறு கூறலாம். அதாவது ஒரு பொருளின் தன்னீர்ப்பு ஆனது அப்பொருளின் நிறைக்கும், அதே கனவளவு கொண்ட நீரின் நிறைக்குமுள்ள விகிதமாகும்.

S இற்கு அலகு இல்லை (பரிமாணமின்றியது) இது ஓர் எண்ணுகும் என்பதைக் கவனத்திற் கொள்ளவேண்டும்.

உய்த்தறிதல்: $S = \frac{W}{W^1} = \frac{Vdg}{Vd^1g} = \frac{d}{d^1} = \frac{Vd}{Vd^1} = \frac{m}{m^1}$

இங்கு d, d^1 முறையே பொருளின் அடர்த்தியையும், நீரின் அடர்த்தியையும் குறிக்கும். $S = \frac{d}{d^1}$ என இருப்பதால் தன்னீர்ப்பை தொடர்படர்த்தி அல்லது சாரடர்த்தி என்றும் கூறப்படும்.

$d^1g = w$ எனக் கொள்வோமாயின் $W = VSw$ என இடலாம். இந் நிலையில் w ஐ ஒரு கனவளவின் நீரின் நிறை என அழைக்கப்படும்.

குறிப்பு: ச. கி. செ. முறையாயின் $d^1 = 1$

∴ $S = d$ பருமனில்

இந்நிலையில் $W = VSg$ என எழுத முடியும். இங்கு S இன் அலகு d இன் அலகைக் கொண்டதாகும். மாணவர்கள் $W = VSw$ என எடுத்துக் கொள்வது சிறந்ததாகும்.

S ஐக் கணிப்பதற்கு (1) $\frac{W}{W^1}$ ஐப் பின்பற்ற வேண்டிவரும் அல்லது (2) $\frac{d}{d^1}$ ஐப் பின்பற்ற வேண்டிவரும். இதை மாணவர்கள் பௌதிகப் பாடத்திலும் அவதானித்துப் பார்க்கலாம்.

கலவைகளின் அடர்த்தி

(1) திண்மங்கள்

A, B எனும் இரு திண்மங்களைக்கொண்டு மூன்றாவது திண்மம்C உருவாக்கப்படுகிறது என்று எடுத்துக்கொள்வோம். C ஐ நாம் கலவை எனக் கூறுவதும் வழக்கம். A ஐ எடுத்து நோக்கும்போது அதன் திணிவு M_A, அதன் கனவளவு V_A, அடர்த்தி d_A என்பவற்றை முதலில் எடுத்து நோக்குதல் அவசியம். இவற்றில் எவையேனும் இரண்டு மட்டும் தரப்பட்டால் போதுமானது என்பதையும் அறிந்து கொள்ளுதல் வேண்டும் இதற்குக் காரணம் $M_A = V_A d_A$ என்ற சூத்திரத்தைக் கணித ரீதியாகப் பார்க்கும்போது

(a) V_A, V_B, d_A, d_B தரப்பட்டதாக எடுத்துக்கொள்வோம். ஆகவே $M_C = M_A + M_B$ உம் $V_C = V_A + V_B$ உம் ஆகும்.

வ+ம் த்தின்படி $d_C = \frac{M_C}{V_C}$ ஆகும்.

$$= \frac{M_A + M_B}{V_A + V_B}$$

$$= \frac{V_A d_A + V_B d_B}{V_A + V_B}$$

$V_A = V_B$ ஆயின் $d_C = \frac{1}{2}(d_A + d_B)$ ஆகும். இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திண்மங்களைக் கலக்கும்போது கலவையின் அடர்த்தி $\overline{d}$ ஆனது

$$\overline{d} = \frac{V_1 d_1 + V_2 d_2 + V_3 d_3 + \dots}{V_1 + V_2 + V_3 \dots}$$ ஆல் பெறப்படும்.

(b) M_A, M_B, d_A, d_B தரப்படும் இடத்து

$$d_C = \frac{M_A + M_B}{V_A + V_B} = \frac{M_A + M_B}{\frac{M_A}{d_A} + \frac{M_B}{d_B}}$$

$M_A = M_B$ ஆயின் $d_C = \frac{2}{\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B}}$ ஆகும்.

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திண்மங்கள் கலக்கப்படும்போது

$$\overline{d} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots\dots}{\frac{M_1}{d_1} + \frac{M_2}{d_2} + \frac{M_3}{d_3} \dots\dots}$$ ஆல் பெறப்படும்.

(2) திரவங்கள்

திரவங்கள் கலக்கப்படும்போது கனவளவில் மாற்றங்கள் ஏற்படாது இருப்பின் மேல் நிறுவப்பட்ட இரு சூத்திரங்களும் இங்கும் உண்மையானவையாகும்.

திரவங்கள் கலக்கப்படும்போது சுருங்கல் ஏற்படுமாயின் கலவையின் கனவளவு V ஆனது $V \neq V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots$ ஆகும். இந்நிலையில் $V = k(V_1 + V_2 + V_3 + \dots)$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

இங்கு $0 < k < 1$ என்ற வீச்சில் ஒரு மெய் எண்ணாகும்.

இந்நிலையில்

$$\overline{d} = \frac{V_1 d_1 + V_2 d_2 + \ldots\ldots}{k(V_1 + V_2 + \ldots\ldots)}$$

$$\overline{d} = \frac{M_1 + M_2 + \ldots\ldots}{k\left(\frac{M_1}{d_1} + \frac{M_1}{d_2}\right)}$$ என அமையும்.

கலவைகளின் தன்னீர்ப்பு

(a) திண்மங்கள்

$$S_c = \frac{V_A S_A + V_B S_B}{V_A + V_B}$$ { கனவளவும், தன்னீர்ப்பும் தரப்படுமிடத்து

$$= \frac{W_A + W_B}{\frac{W_A}{S_A} + \frac{W_B}{S_B}}$$ { நிறையும், தன்னீர்ப்பும் தரப்படுமிடத்து

இரண்டிற்கு மேற்பட்ட திண்மங்களை எடுத்துக்கொள்வோமாயின்

$$\overline{S} = \frac{V_1 S_1 + V_2 S_2 + \ldots}{V_1 + V_2 \ldots}$$ எனவும்

$$\overline{S} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots\ldots}{\frac{W_1}{S_1} + \frac{W_2}{S_2} + \ldots\ldots}$$ எனவும் இடலாம்

(b) திரவங்கள்

கலவையில் சுருங்கல் ஏற்படாது இருப்பின் மேற்கூறப்பட்ட சூத்திரங்கள் இன்னும் உண்மையாகும். சுருங்கல் ஏற்படுமாயின்

$$\overline{S} = \frac{V_1 S_1 + V_2 S_2 + \ldots\ldots}{k(V_1 + V_2 \ldots\ldots)}$$ எனவும்

$$\overline{S} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots\ldots}{k\left(\frac{W_1}{S_1} + \frac{W_2}{S_2} + \ldots\right)}$$ எனவும்

எடுத்துக்கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு:- சூத்திரங்கள் கலவையின் அடர்த்திக்கும் தன்னீர்ப்புக்கும் ஒன்றாகும். d ஆனது S ஆக மாற்றப்படுகிறது. w நீக்கப்படும் விதம் மாணவர்கள் நன்கு அறிந்திருத்தல் வேண்டும். கலவையின் நிறை ஒருபோதும் மாற்றமடையாது.

உதாரணங்கள்

1. பதார்த்தமொன்றின் தன்னீர்ப்புக்கும் அடர்த்திக்கும் இடையேயான வேறுபாட்டைக் காட்டுக.

இரு திரவங்களின் சம கனவளவுகள் கலக்கப்படும் போது கலவையின் தன்னீர்ப்பு 4 ஆகவும், அதே திரவங்களின் சமநிறைகள் கலக்கப்படும்போது கலவையின் தன்னீர்ப்பு 3 ஆகவும் உள்ளது. திரவங்களின் தன்னீர்ப்புகளைக் காண்க.

A/L 1980 Nov

பதார்த்தமொன்றின் தன்னீர்ப்பு (S) ஆனது அப்பதார்த்தத்தின் நிறைக்கும், அதே கனவளவு கொண்ட நீரின் நிறைக்குமுள்ள விகிதமாகும். இதற்கு அலகு இல்லை. பருமன் மட்டும் உண்டு.

பதார்த்தமொன்றின் அடர்த்தி (d) ஆனது அப் பதார்த்தத்தின் ஒரு கனவளவலகின் திணிவாகும்.

இதற்கு அலகு உண்டு. இதை நாம் gm/cm^3 இல் கூறுவது வழக்கம். S_1, S_2 திரவங்களின் தன்னீர்ப்புகள் என்க. சம கனவளவுகள் கலக்கப்படுகையில் நிறைகளைச் சமப்படுத்தப் பெறுவது

$$VS_1 w + VS_2 w = 2V4\,w \text{ ——— } (1)$$

$$S_1 + S_2 = 8 \text{ ——— ——— } (1)$$

இங்கு w நீரின் தன்நிறையாகும்.

சமநிறைகள் கலக்கப்படுகையில் கனவளவுகளைச் சமப்படுத்தப் பெறுவது

$$\frac{W}{S_1 w} + \frac{W}{S_2 w} = \frac{2w}{3w}$$

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = \frac{2}{3} \text{ ——— } (2)$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2}{3} S_1 S_2 \text{ ——— } (2)$$

(1) & (2) $\Longrightarrow$ $8 = \frac{2}{3} S_1 S_2$

$\therefore S_1 S_2 = 12$ ———— (3)

$S_1(8 - S_1) = 12$

$S_1^2 - 8S_1 + 12 = 0$

$(S_1 - 2)(S_1 - 6) = 0$

$\therefore S_1 = 2, 6$

$\therefore S_2 = 6, 2$

அதாவது தன்னீர்ப்புகள் 2உம் 6உம் ஆகும்.

குறிப்பு:- நேரடியாகச் சூத்திரங்கள் உபயோகித்தல் விரும்பத்தக்கதல்ல. சமன்பாடுகள் அமைக்க அடிப்படை விதிகளைப் பின்பற்றுதல் அவசியம். $W = VSw$ எனத் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும்.

(2) ஒரு கலவையானது 7 கன சதம மீற்றர் சல்பூரிக்கமிலத்தாலும் (த. ஈ $= 1.843$) 3 கன சதம மீற்றர் காய்ச்சி வடித்த நீராலும் ஆக்கப்படுகின்றது. குளிராயிருக்கும்போது அதனுடைய தன்னீர்ப்பு 1.615 எனக்காணப்படுகின்றது. நடைபெற்ற சுருங்கல் என்ன?

இறுதியாகக் கலவையின் கனவளவு V க. சதமமீற்றர் என்போம்

நிறைகளைச் சமப்படுத்த நாம் பெறுவது

$$V\ 1.615w = 7 \times 1.843w + 3 \times 1 \times w$$

$$\therefore V = \frac{129.01 + 3}{1.615}$$

$$= \frac{15.901}{1.615} \text{ க. சமீ.}$$

$$\therefore \text{நடைபெற்ற சுருங்கல்} = 10 - \frac{15.901}{1.615}$$

$$= \frac{16.15 - 15.901}{1.615}$$

$$= \frac{249}{1615} \text{ க. ச.}$$

(3) தன்னீர்ப்பு ρ ஐயுடைய ஓர் திரவத்தால் நிரப்பப்பட்ட கனவளவு V யைக் கொண்ட ஒரு பாத்திரத்திற்குள்ளே σ தன்னீர்ப்பு உடைய திரவமானது துளி துளியாக விடப்படுகின்றது. அது தேங்கி வழியுமாறு விடப்படின், v_1 கனவளவு திரவம் உள்ளே ஊற்றப்பட்டவிடத்து அக்கரைசலின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

v கனவளவு ஊற்றப்பட்டவிடத்து கரைசலின் தன்னீர்ப்பு s என்போம், $(v + dv)$ ஊற்றப்பட்டவிடத்து கரைசலின் தன்னீர்ப்பு $(s + ds)$ என்போம். ஆயின் dv ஆனது ஒரு துளி திரவத்தின் கனவளவைக் குறிக்கும். சேர்க்கப்பட்ட துளி பாத்திரத்திற்குள் இருக்கும் எனக் கற்பனை செய்தால் அக்கலவையின் நிறையை அதன் அங்கங்களின் நிறைகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமப்படுத்த நாம் பெறுவது

w: நீரின் தன்னிறை.

$$w(V + dv)(S + ds) = w\sigma dv + Vsw$$

$$(V + dv)(S + ds) = \sigma dv + Vs \text{ —— } (1)$$

$$Sdv + Vds + dsdv = \sigma dv$$

$$Vds = (\sigma - s)\, dv \qquad (ds\ dv) \text{ புறக்கணிக்க.}$$

$$\int_{\rho}^{\bar{s}} \frac{ds}{\sigma - s} = \int_{O}^{v_1} \frac{dv}{V} \qquad \bar{s} : \text{இறுதியாகக் கரைசலின் தன்னீர்ப்பு}$$

$$-\log|\sigma - s| \Big|_{\rho}^{\bar{s}} = \frac{1}{V} v \Big|_{O}^{v_1}$$

$$-\log|\sigma - \bar{s}| + \log|\sigma - \rho| = \frac{v_1}{V}$$

$$\log\left|\frac{\sigma - \rho}{\sigma - \bar{s}}\right| = \frac{v_1}{V}$$

வகை 1 $\sigma > \rho$ என்போம். $\therefore \bar{s}$ ஆனது $\sigma > \bar{s} > \rho$ என்ற வீச்சினுள் கிடக்கும்.

குறிப்பு: $p \longrightarrow \rho$ ஆகும்.

இவ்வகையில் $\sigma-\rho>0,\quad \sigma-\bar{s}>0$

$$\therefore \quad \frac{\sigma-\rho}{\sigma-\bar{s}} > 0$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{\sigma-\rho}{\sigma-\bar{s}}\right) = \frac{v_1}{V} \quad \text{——}(2)$$

வகை 2 $\sigma<\rho$ என்போம். $\therefore\ \bar{s},\ \sigma < \bar{s} < \rho$ என்ற வீச்சில் இருக்கும்

$$\therefore \quad \sigma-\rho<0,\quad \sigma-\bar{s}<0$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma-\rho}{\sigma-\bar{s}} > 0$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{\sigma-\rho}{\sigma-\bar{s}}\right) = \frac{v_1}{V} \quad \text{——}(3)$$

$$\frac{\sigma-\rho}{\sigma-\bar{s}} = e^{\frac{v_1}{V}}$$

$$\sigma-\bar{s} = (\sigma-\rho)\,e^{\frac{-v_1}{V}}$$

$$\therefore \quad \bar{s} = \sigma-(\sigma-\rho)\,e^{\frac{-v_1}{V}}$$

அமுக்கம்:-

A பரப்பளவு கொண்ட ஒரு தளப்பரப்பில், அத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக F என்னும் விசை பிரயோகிக்கப்படும் இடத்து அப் பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அமுக்கம் $\frac{F}{A}$ என வரையறுப்போம். விசை F ஆனது அப்பரப்பின் மீது உள்ள உதைப்பு எனவும் கூறப்படும். அமுக்கம் ρ எனக் குறிப்போமாயின் $F=A\rho$ என

இடலாம். $A=1$ ஆயின் $p=F$ ஆகும் இதிலிருந்து அமுக்கத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுப்போம். அதாவது அமுக்கமானது ஒரு சதுர அலகுப் பரப்பில் அப்பரப்பளவிற்குச் செங்குத்தாகத் தாக்கும் விசை எனப்படும்.

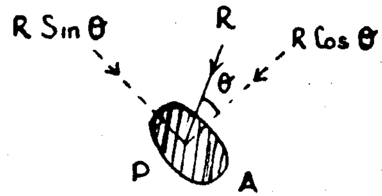
குறிப்பு:-

x எனும் புள்ளியில் அமுக்கம் P_x எனக் குறிப்போமாயின்

$$P_x = \underset{A\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{F}{A}\right)$$ எனக் கணித ரீதியாக வரையறுப்போம்

இங்கு A, x ஐச் சூழ்ந்திருக்கும் ஒரு சிறு பரப்பளவு ஆகும். F தளத்திற்குச் செங்குத்து.

ஏகவினத்திரவம்



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் தளப்பரப்பு A ஒரு திரவத்தினுள் முற்றாகக் கிடக்குமாறு பிடிக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கற்பனை செய்வோம். திரவத்தினால் அத் தளப்பரப்பிற்கு R எனும் ஒரு உதைப்பு உண்டு. இவ் R ஆனது புள்ளி P இல் தாக்குவதாக எடுத்துக் கொள்வோம். தளப்பரப்பிற்குப் P யிலான செவ்வனுடன் R ஆக்கும் கோணம் θ எனக் குறிப்போமாயின் விசை R ஐ தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவும், சமாந்தரமாகவும் $R\cos\theta$, $R\sin\theta$ எனக் கூறாக்கலாம். $R\sin\theta=0$ ஆகக் காணப்படின் திரவம் ஓர் ஏகவினத்திரவம் என அழைக்கப்படும். இந் நிலையில் $\theta=0$. அதாவது R ஆனது தளத்திற்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும்.

ஆகவே ஒரு ஏகவினத்திரவத்தில் ஒரு தளப்பரப்பில் தாக்கும் உதைப்பு அத் தளத்திற்குச் செங்குத்தாய் இருக்கும்.

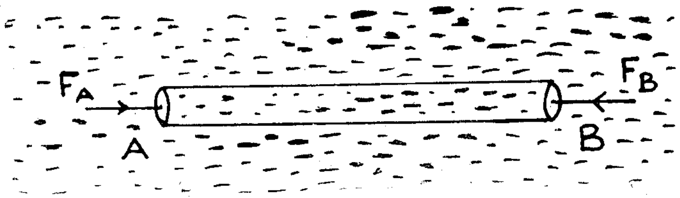
ஒரு திரவத்தின் ஒரு புள்ளியிலுள்ள அமுக்கம் P இற்கு

$$P = \underset{A\to 0}{\text{எல்லை}}\left(\frac{F}{A}\right)$$ என நாம் வரையறுக்கலாம்.

இங்கு F ஆனது, பரப்பளவு A யில் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் தளத்திற்குச் செங்குத்தான உதைப்பாகும். மேலும் பரப்பளவின் திசையளியைச் சாராதது.

p இன் அலகு N Cm^{-2} ஆகும். இதன் பரிமாணங்கள் $ML^{-1}T^{-2}$

1. பாரமான ஒரு படித்தான திரவமொன்றின் அமுக்கம் ஒரே கிடைத்தளத்தில் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் சமமாகும்.

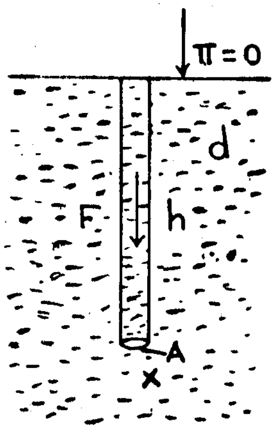


படத்தில் காட்டிய வண்ணம் A, B என்பன ஒரே கிடைத்தளத்திலுள்ள எவையேனும் இரண்டு புள்ளிகளாகுக. A B ஐ அச்சாகக் கொண்ட ஒரு திரவ உருளை ஒன்றின் சம நிலையை எடுத்து நோக்கும்போது A, B இல் தாக்கும் உதைப்புகள் கிடையாயும் சமனும் எதிருமாயிருத்தல் வேண்டும். இதற்குக் காரணம் மற்றைய விசைகளெல்லாம் A B யிற்குச் செங்குத்தாதலால்.

$F_A = F_B$ ஆதலால்

$P_A = P_B$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்

2. புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலிருக்கும் ஏகவினத் திரவமொன்றில் h ஆழத்தில் இருக்கும் ஒரு புள்ளியின் அமுக்கம் $p = hdg$ எனக் காட்டுவோம். வளிமண்டல அமுக்கம் புறக்கணிக்கப்படுகிறது.



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் திரவ உருளையை எடுத்துக் கொண்டால்

$$P_x = \frac{A}{F} \quad \text{—— (1)}$$

$$F = Ahdg \quad \text{—— (2)}$$

∴ $P_x = hdg$ ஆகும்

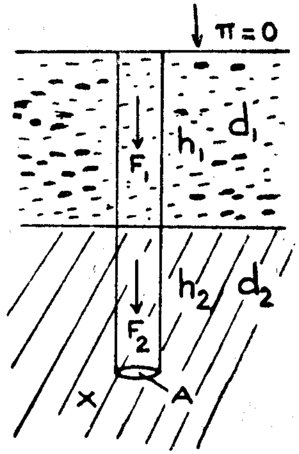
உய்த்தறிதல் (1) $P_x \propto h$ என இடலாம்.

அதாவது யாதுமொரு புள்ளியில் அமுக்கம் அதன் ஆழத்திற்கு விகிதசமமானதாகும்.

(2) இரு புள்ளிகளில் உள்ள அமுக்கங்களின் வித்தியாசம் அவற்றின் ஆழங்களின் வித்தியாசத்திற்கு விகிதசமமானதாகும்

(3) ஓய்விலிருக்கின்ற ஒரு பாரமான திரவத்தின் பரப்புக்கிடையாகவிருக்கும்.

3. தந்த ஒரு படித்தான இரு திரவங்கள் பாரமானவையாயும் ஒன்றோடொன்று கலவாதனவாயும் இருக்கையில் கீழுள்ள திரவத்தில் யாதுமொரு புள்ளியில் அமுக்கம் காணல்.



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் திரவ உருளையின் சமநிலையை எடுத்துக் கொண்டால் தளமுகம் x இல் தாக்கும் உதைப்பு, திரவ உருளையின் நிறைக்குச் சமமானதாகும்.

$$\therefore P_x = \frac{F_1 + F_2}{A} = \frac{Ah_1d_1g + Ah_2d_2g}{A}$$

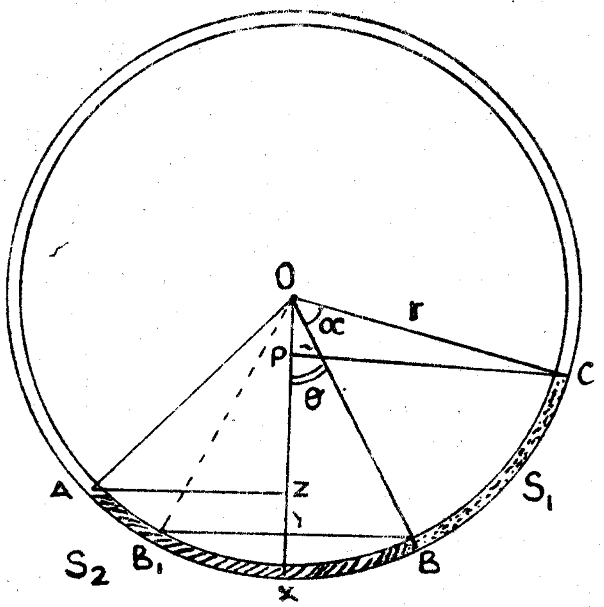
$P_x = h_1d_1g + h_2d_2g$ ஆகும்

உய்த்தறிதல்: திரவங்களின் பொதுப்பரப்பு கிடைத்தளமாகும்.

உதாரணம்:-

1. ஆரை r ஆகவுள்ள மெல்லிய வட்டக் குழாயொன்று, அதன் தளம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறு நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. S_1, S_2 என்னும் வெவ்வேறு தன்னீர்ப்புக்களை உடையனவும் ஒன்றுடனொன்று கலவாதனவும் ஒவ்வொன்றும் வட்டத்தின் மையத்தில் α எனும் ஒரே கோணத்தை எதிரமைக்கின்றனவுமான இரு திரவ நிரல்களை இவ் வட்டக்குழாய் கொண்டுள்ளது. இத் திரவங்கள் புவியீர்ப்பிலே சமநிலையில் இருக்கையில், அவற்றின் சந்திக்கு வரையப்படும் ஆரையானது நிலைக்குத்துடன் θ எனுங்கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக. தான் இங்கு தான் $\theta = \frac{|S_2 - S_1|}{S_2 + S_1}$ தான் $\alpha/2$ ஆகும்.

(1979 April)



வகை 1: $S_2 > S_1$ என்போம். படத்தில் காட்டியவண்ணம் B இரு திரவங்களின் சந்தி என்போம். B, B¹ கிடையாக இருப்பதால் இரு புள்ளிகளிலும் அமுக்கம் சமமாகும்.

அ-து $P_{B^1} = P_B$ ——(1)

$P_{B^1} = P + YZwS_2$ —(2) P: குழாயின் வெளியில் இருக்கும் காற்றின் அமுக்கம்.

$YZ = r\cos\theta - r\cos(\alpha - \theta)$ w: நீரின் தன்நிறை

$P_B = P + YPwS_1$ —(3)

$YP = r\cos\theta - r\cos(\alpha + \theta)$

(1), (2), (3) $\Longrightarrow YZS_2 = YPS_1$ —(4)

$$[r\cos\theta - r\cos(\alpha - \theta)]\, S_2 = [r\cos\theta - r\cos\overline{\alpha + \theta}]\, S_1$$

$$2r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha - 2\theta}{2}\right) S_2 = 2r\sin\left(\theta + \frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}\, S_1$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \theta\right) S_2 = \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right) S_1$$

$$S_2\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right] =$$

$$S_1\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\theta + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\theta\right]$$

$$S_2\left[\tan\frac{\alpha}{2} - \tan\theta\right] = S_1\left[\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\theta\right]$$

$$\tan\theta = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}\tan\frac{\alpha}{2} \quad \text{——}(R_1)$$

வகை 2: $S_2 < S_1$ என்போம்.

இந்நிலையில்

$$\tan\theta = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \tan\theta \frac{\alpha}{2} \text{ ஆகும்.} \quad —(R_2)$$

படத்தில் $B \longrightarrow B^1$ ஆகவும், $B^1 \longrightarrow B$ ஆகவும் இருக்கும்.

∴ BO நிலைக்குத்துடன் அமைக்கும் கோணம் θ ஆயின்

$$\tan\theta = \frac{|S_2 - S_1|}{S_2 + S_1} \tan\frac{\alpha}{2} \text{ ஆகும்.}$$

($\tan\theta > 0$ ஆதலால்)

குறிப்பு: (1) $S_1 - S_2 = S_2 - S_1 = |S_2 - S_1|$

($S_1 > S_2$) ($S_2 > S_1$) ($S_2 \gtrless S_1$) இதை மாணவர்கள் விளங்கியிருத்தல் வேண்டும்.

(2) படத்தைக்கொண்டு S_1, S_2 தொடர்பைக் கூறுதல் வேண்டும். இங்கு படத்தில் S_2 உடைய திரவம் கீழ்க்கிடப்பதால் $S_2 > S_1$ ஆயிருக்கும். இனி S_1, S_2 மெய்யும் நேரானவையுமாதலால் இவற்றிற்கிடையே நிலவவேண்டிய மாதிரிவெளி

$S_2 \gtreqless S_1$ ஆகும். இத்தொடர்புகளுக்கு அமைய படத்தில் ஏற்

படப்போகும் மாற்றத்தைக்கூறி வரப்போகும் முடிபையும் செய்து பார்க்காது முதல் பெற்ற விடையிலிருந்து உய்த்தறிதல் வேண்டும். இதை மாணவர்கள் நன்கு விளங்கிவைத்துக் கொண்டால் விடைகளில் மட்டுப் பெறுமானம் வரும்போது மாதிரி வெளியைச் சிந்தித்து ஆராயத் தவறமாட்டார்கள்.

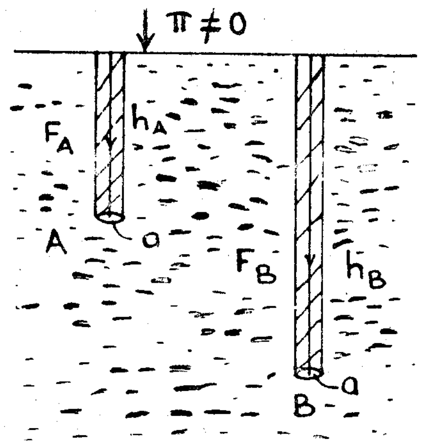
உய்த்தறிதல்: $\alpha = \frac{\pi}{2}$ எனக் கொண்டால்

$$\tan\theta = \frac{|S_2 - S_1|}{S_2 + S_1} \text{ ஆகும்.}$$

இவ்விடையைக் கொண்ட கணக்கு பயிற்சியில் உள.

உ+ம் 2. ஏகவினத் திரவமொன்று புவியீர்ப்பில் ஓய்விலுள்ளது. இத் திரவத்திலே இரு புள்ளிகளிலுள்ள அமுக்கங்களின் வித்தியாசமானது, அப்புள்ளிகளின் ஆழங்களின் வித்தியாசத்துக்கு விகிதசமமானதெனக் காட்டுக.

சமபக்க முக்கோணியொன்றின் வடிவத்திலான மூடிய குழாயொன்று, ஒன்றுடன் ஒன்று கலவாத மூன்று திரவங்களைச் சமகனவளவுகளிற் கொண்டுள்ளது. அது அதன் மிகத் தாழ்ந்த பக்கம் கிடையாயிருக்குமாறு நிலைக்குத்தான ஒரு நிலையிலே வைக்கப்பட்டுள்ளது. திரவங்களின் தன்னீர்ப்புகள் S, 2S, 3S எனின், திரவங்களின் வேறுக்கற்பரப்புகள் முக்கோணியின் பக்கங்களை முச்சமகூறிடும் புள்ளிகளிலே அமைந்துள்ளன எனக்காட்டுக. (1981, Aug)



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் A, B இரு புள்ளிகள். A இன் ஆழம் h_A எனவும், B இன் ஆழம் h_B எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம். திரவத்தின் அடர்த்தி p எனவும், வளிமண்டல அமுக்கம் π எனவும், புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல் g எனவும் கொள்வோம்.

$$P_A = \frac{F_A}{a} + \pi \text{ ஆகும்.}$$

$$= \frac{a h_A P g}{a} + \pi$$

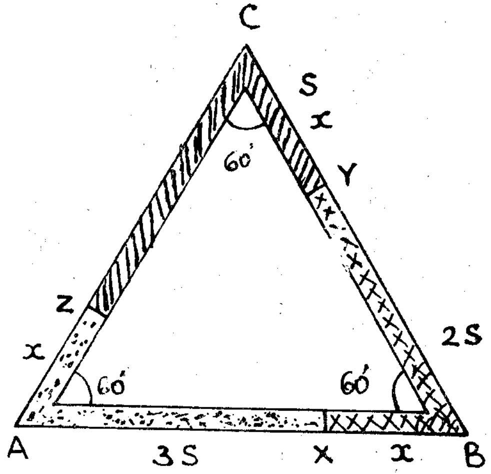
$$= h_B P g + \pi \quad —— (1)$$

$\therefore P_B = h_B \rho g + \pi$ ——(2) ஆகும்.

$P_B - P_A = (h_B - h_A)\rho g$

அ-து $P_B - P_A \propto (h_B - h_A)$ என இடலாம்.

இதிலிருந்து நாம் அறிவது அமுக்கவித்தியாசம் ஆழங்களின் வித்தியாசத்திற்கு விகித சமமானதாகும்.



திரவங்கள் சந்திக்கும் புள்ளிகள் x, y, z என்போம்.
xB = x எனவும், A B = a எனவும் கொள்வோம்.

∴ Az = cy = x ஆகும். (3 திரவங்களின் கனவளவு சமமாதலால்)
பகுதி I இன்படி

$pz - py = (a - 2x) \sin 60, Sw$ ——(1)

$px - pz = x \sin 60\ 3Sw$ ——(2)

$px - py = (a - x) \sin 60.\ 2S\,w =$ ——(3) w நீரின் தன்நிறை

∴ $(a - x) \sin 60.\ Sw + x \sin 60.\ 3Sw = (a - x) \sin 60\ 2S\,w$ ஆகும்.

$a - 2x + 3x = 2a - 2x$

$\therefore x = a/3$

குறிப்பு:- A யிலும், B யிலும் அமுக்கங்கள் சமமாதலால் AC ஆலும் BC ஆலும் A யிலும், B யிலும் உண்டாகும் அமுக்கங்களைக் கணித்து $x = a/3$ எனக்காட்டலாம்.

உய்த்தறிதல்:- தன்னீர்ப்புகள் ஒரு கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கும் என எடுத்துக் கொண்டால் $x = a/3$ எனக்காட்டலாம். தன்னீர்ப்புகளை நாம் $(b-d)$, b, $(b+d)$ என எடுத்துக்கொள்ளல் சுலபமானது இங்கு d பொது வித்தியாசம். இதை மாணவர் செய்து பார்த்தல் நன்று. இக் கணக்கு பயிற்சியில் இருப்பதைக் காணலாம.

பயிற்சி I

1. சீரான துளையையுடைய ஒரு நுண்ணிய குழாய் ஒரு சதுர வடிவத்தில் வளைக்கப்பட்டு d_1, d_2, d_3 $(d_3 > d_2 > d_1)$ என்னும் அடர்த்தியுடைய மூன்று பாரமான திரவங்களின் சம கனவளவுகளால் நிரப்பப்படுகின்றது. அக் குழாய் ஒருபக்கம் நிலைக்குத்தாய் இருக்குமாறு வைக்கப்படின் $d_2 > \frac{1}{3}(2d_3 + d_1)$ அல்லது $< \frac{1}{3}(d_3 + 2d_1)$ அல்லது $\frac{1}{3}(2d_1 + d_3) < d_2 < \frac{1}{3}(2d_3 + d_1)$ என்பதற்குத்தக, அச்சதுரத்தின் ஒரு பக்கம் அத் திரவத்தின் முதலினத்தால் அல்லது மூன்றும் இனத்தால் அல்லது இரண்டாமினத்தால் மாத்திரம் நிரப்பப்படுமெனக் காட்டுக.

2. ஒன்றோடொன்று கலவாத வேறுவேறான அடர்த்திகளையுடைய மூன்று பாயிகளின் சம கனவளவுகள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் வைக்கப்பட்ட ஒரு வட்டக்குழாயை ஒருங்கே முற்றாய் நிரப்புகின்றன. அப்பாயிகளின் அடர்த்திகள் கூட்டல் விருத்தியில் இருந்தால், மிக இலேசான பாயி மிகப்பாரமானபாயி என்னும் இவற்றின் பொதுப்பரப்பு அவ்வட்டத்தின் ஒரு கிடைவிட்டத்தின் ஒரு முனையில் இருக்குமென நிறுவுக.

3. ஒரு U- குழாயின் இரண்டு புயங்களும் ஒருங்கே நெருக்கமாய் உள்ளன. ஒரு புயத்தில் நீரும் மற்றையதில் இரசமும் தம் பொதுப்பரப்பு மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருக்குமாறு உள்ளன. அந் நீரின் காற்பங்கு வெளியால் எடுக்கப்பட்டு மற்றைப் புயத்திற்குள் இரசத்திற்கு மேல் ஊற்றப்படுகின்றது. புதிய சமநிலையாகிய நிலையில் மேற்பரப்புக்களின் உயர வித்தியாசம் முந்திய வித்தியாசத்தின் அரைப்பங்கென நிறுவுக.

4. சிறிய சீரான குழாயொன்று தளம் நிலைக்குத்தான வட்ட வடிவத்தில் வளைக்கப்படுகின்றது. தம்மடர்த்திகள் p, σ (< p) ஆகவுள்ள பாயிகளுடைய சமவளவுகள் அக் குழாயின் அரைப் பங்கை நிரப்புகின்றன. பொதுப்பரப்பிற்கூடாகச் செல்கின்ற

ஆரை நிலைக்குத்தோடு தான் $^{-1}\left(\dfrac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}\right)$ எனும் கோணத்தை

ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக

5. ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்திலுள்ள நுண்ணிய வட்டக்குழாய் அதன் மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைக்கின்ற p அடர்த்தியையுடைய ஒரு திரவ நிரலையும், α என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்கின்ற σ அடர்த்தியையுடைய ஒரு திரவ நிரலையுங் கொள்ளுகின்றது. பொதுப்பரப்பிற்கூடாகச்

செல்லும் ஆரை நிலைக்குத்தோடு தான் $^{-1}\left(\dfrac{P-\sigma+\sigma \text{ கோசை}\,\alpha}{p+\sigma \text{ சைன்}\,\alpha}\right)$

என்னுங் கோணத்தை ஆக்குகின்றதெனக் காட்டுக.

6. சீரான வட்டக் குழாயொன்றின் கீழ்ப்பாதியில், ஒரு கால் வட்டம் 2p என்னும் அடர்த்தியையுடைய ஒரு திரவத்தாலும் மற்றையது தம்முட் கலவாத 3p, p என்னும் அடர்த்திகளையுடைய இரு திரவங்களாலும் இடங்கொள்ளப்படுகின்றன. பின்னவையாகிய இரு திரவங்களுட் கீழ் தன் கனவளவு மற்றையதன் கனவளவின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக.

7. தம் குறுக்குவெட்டு முகம் முறையே 1,0.1 சதுர சதம மீற்றர் ஆகவுள்ள இரு நிலைக்குத்துக் குழாய்களின் கீழ் முனைகள் ஒரு குழாயால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அக் குழாய்

13.596 தன்னீர்ப்புள்ள இரசத்தைக் கொள்ளுகின்றது. சிறிய குழாயிலுள்ள மட்டத்தை 1 cm ஆல் உயர்த்துதற்குப் பெரிய குழாய்க்குள் எவ்வளவு நீர் ஊற்றப்படவேண்டும்?

8. ஒரு கலப்புலோகம் 7, 8.9 என்பவற்றை முறையே தம் தன்னீர்ப்புக்களாகவுள்ள நாகம், செம்பு என்பனவற்றாலாயது. அக்கலப்பு உலோகத்தின் கனவளவு 452 கன சதம மீற்றராயுந் திணிவு 3373 கிராமாயுமிருந்தால் அக்கலப்புலோகக் கூறுகள் ஒவ்வொன்றிற்குமுள்ள கனவளவுகள் 342 க. சமி 110 க. சமி எனக் காட்டுக.

9. மூன்று சமபாத்திரங்கள் A, B, C என்பன முறையே ρ_1, ρ_2, ρ_3 என்னும் அடர்த்திகளுடைய திரவங்களால் அரைப்பங்கிற்கு நிரப்பப்பட்டுள்ளன. B என்பது A யிலிருந்தும். பின்பு C என்பது B யிலிருந்தும் நிரப்பப்பட்டால் அத்திரவங்களானவை முற்றாய்க் கலக்கின்றனவெனக்கொண்டு இப்போது C யிலுள்ள திரவத்தின் அடர்த்தி $\frac{1}{4}(\rho_1+\rho_2+\rho_3)$ எனக் காட்டுக.

10. சமபக்க முக்கோணி வடிவத்திலுள்ள ஒரு நுண்ணிய கண்ணாடிக் குழாய் கூட்டல் விருத்தியிலுள்ள அடர்த்திகளையுடைய ஒன்றோடொன்று கலவாத மூன்று திரவங்களின் சமகனவளவுகளால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அக்குழாய் ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்திற் பிடித்து வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. மிகப்பாரமான திரவத்தின் பங்கையும் மிக இலேசான திரவத்தின் பங்கையுங்கொண்ட பக்கம் நிலைக்குத்தோடு கோணம் θ வை ஆக்குகின்றது. பிரிபரப்புக்கள் பக்கங்களை

கோசை $\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$: கோசை $\left(\dfrac{\pi}{6}+\theta\right)$ என்னும் விகிதத்

திற் பிரிக்குமெனக் காட்டுக.

அதிகாரம் II

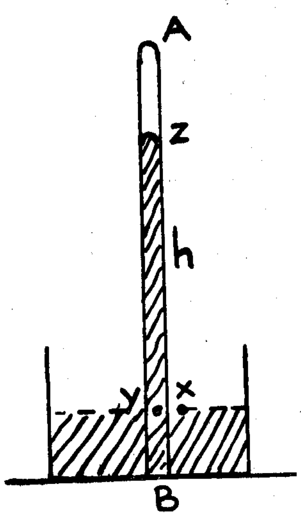
வளியமுக்கம் (π)

புவியின் மேற்பரப்புக்கு மேல் ஒரு குறித்த உயரம்வரை வளி காணப்படுகிறது. வளித் துணிக்கைகளில் புவியீர்ப்பு காரணமாக அதன் நிறைகள் கீழ் நோக்கித் தாக்குகின்றது. இதனால் புவியின் மேற்பரப்பில் ஓர் அமுக்கம் ஏற்படுகிறது. இவ்வமுக்கம் வளிமண்டல அமுக்கம் என அழைக்கப்படும் இதை நாம் π எனக் குறிப்போம்.

ஒரு திரவம் புவியீர்ப்பில் ஓய்வில் இருக்கையில் அதன் சுயாதீனப் பரப்பில் அமுக்கம் பூச்சியம் எனக் கொண்டால் அதன் பொருள் வளியமுக்கம் புறக்கணிக்கப்படுகிறது என்பதாகும். வளிமண்டல அமுக்கம் ஒரு போதும் பூச்சியமாக இருக்கமாட்டாது வளி மண்டல அமுக்கத்தைக் கவனத்திற்கு எடுத்துக் கொண்டால் ஒரு திரவத்தின் சுயாதீனப்பரப்பில் யாதுமொரு புள்ளியில் அமுக்கம் வளிமண்டல அமுக்கமாகும் இச் சந்தாப்பங்களில் ஒரு திரவத்தின் சுயாதீனப் பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திலிருக்கும் ஒரு புள்ளியில் அமுக்கம் $(\pi + hpg)$ ஆகும். இஙகு π யும் hpg உம் ஒரே அலகுடையன.

வளியமுக்கம் கணித்தல்-:

பௌதிகத்துறையில் வளியமுக்கம் கணிப்பதற்குப் பல பரிசோதனைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன. இங்கு அவ்வகையான பரிசோதனைகள் மேற்கொள்ளத்தேவையில்லை ஆனால் ஒரு கணிதத்துறை மாணவனுக்கு ஒரு பரிசோதனையில் வளியமுக்கம் பரிசோதனையைப் பாதிக்கின்றதா? அவ்வாறாயின் அவ்வமுக்கம் எவ்வகையில் பரிசோதனையில் பங்கு எடுக்கின்றது? அதை நேரடியாகக் கணிக்கமுடியுமா? அல்லது சமன்பாடுகள் எழுதித்தான் கணிக்கவேண்டுமா என்று ஆராயும் திறன் இருத்தல் வேண்டும் சமன்பாடுகள் எழுதும்போது ஒரு விதியைப் பின்பற்றுவதுடன் மேலும் அவ் விதியை விளங்கி வைத்துக்கொள்ளல் வேண்டும்.



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் செய்யப்பட்ட பரிசோதனை ஒன்றை எடுத்து நோக்குவோம். இங்கு நாம் அதிகாரம் 1 இல் கற்றவற்றை முதல் எடுத்து கொள்வோம.

தொட்டியிலும், குழாயிலும் ஒரு திரவம் இருப்பதால் X இலும் Y இலும் அமுக்கங்கள் சமமாகும. இதற்குக் காரணம் X, Y ஒரே கிடை மட்டத்தில் கிடப்பதாகும். X இல் அமுக்கம் இருப்பதற்குக் காரணம் மேலுள்ள வளி இவற்றால் ஏற்படும் அமுக்கம வளிமண்டல அமுக்கம் என வரையறுத்துள்ளோம். Z சுயாதீனப்பரப்பில் இருப்பதால் இதில் அமுக்கம பூசசியம் எனக் கொண்டால் Y இல் (h ஆழத்தில்) அமுக்கம் $h\rho g$ ஆகும். இங்கு திரவத்தின் அடர்த்தி

$\therefore p = h\rho g = \pi$ ஆகும்.

இதிலிருந்து நாம் அறிவது வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் கணிக்காமல் நேரடியாக அளந்து கொள்ளலாம். இங்கு நாம் எடுத்த எடுகோளை மறத்தல் ஆகாது. அ-து Z இல் அமுக்கம் பூச்சியம் என்பது சாத்தியமானதா என்பதைச் சிந்தித்தல் வேண்டும். A Z வெற்றிடமாகக் காணப்படின் எடுகோள் உண்மையானது. அதாவது Z இல் அமுக்கம் பூச்சியம் ஆகும்.

இனி நாம் A Z வெற்றிடமாக இருக்கும் வண்ணம் பரிசோதனையை நிகழ்த்துவோமாயின் h ஐக் கொண்டு வளியமுக்கத்தைக் கணிக்கலாம். இதை நாம் எளிய பாரமானி என அழைப்போம்.

ρ வைக் கூட்ட h குறையும். திரவங்களுள் அடர்த்தி கூடிய திரவம் பாதரசம் ஆகும். ஆகவே இரசத்தைப் பயன்படுத்துதல் சிறந்தது இரசத்தைப் பயன்படுத்துகையில் h = 76 cm ஆகக் காணப்படும் இதை நாம் வளியமுக்கம் 76 cm இரசம் எனக் கூறுவோம்.

குறிப்பு:- Z இல் அமுக்கம் இருக்குமாயின் Y இல் அமுக்கம் $P_x = h\rho g$ ஆகும் ஆனல் $P_y = P_x$ ஆகும் என்பதை மறத்தல் ஆகாது.

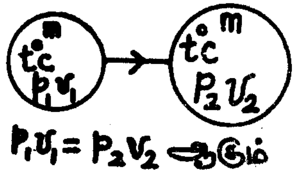
இனி Z இல் அமுக்கம் ஒன்று இருக்குமாயின் இதற்குக் காரணம் வெளி AZ இல் காற்று உட் புகுந்து கொண்டதாகும். இவ்வகையான பாரமானி பொய்யான பாரமானி எனவும், இதன் வாசிப்பு பொய்யான பாரமானியின் வாசிப்பு எனவும் அழைக்கப்படும். Z இல் அமுக்கம் P_z எனக் கொண்டால்

$P_x = P_y = h^1\rho g + P_z = h\rho g$ ஆகும். இங்கு உண்மையான பாரமானியின் வாசிப்பு h எனவும், பொய்யான பாரமானியின் வாசிப்பு h^1 எனவும் கொள்ளப்படுகிறது. $\therefore P_z = (h - h^1)\rho g$ ஆகும்.

இதை நாம் உள்ளடக்கப்பட்ட காற்றின் அமுக்கம் எனக் கூறுவோம் இங்கு பயன்படுத்தப்பட்ட தத்துவத்தை விளங்கிவைத்துக் கொள்ளல்வேண்டும்.

போயிலின் விதி:-

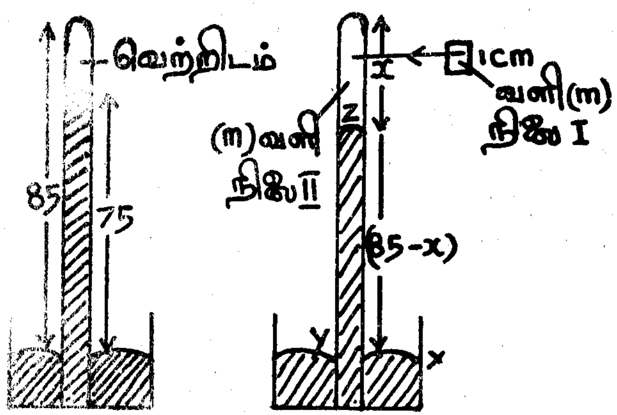
மாறாவெப்ப நிலையில் ஒரு குறித்த திணிவுள்ள வாயுவின் அமுக்கம் அதன் கனவளவிற்கு நேர்மாறு விகிதசமமானதாகும், அதாவது படத்தில் காட்டியவாறு இரண்டு நிலைகளை எடுத்துக் கொண்டால்



இதை நாம் pv = மாறிலி எனவும் கூறலாம்;

குறிப்பு:- மாணவர்கள் சுலபமாக pv ஒரு மாறிலி எனக் கூறி விடுவார்கள். ஆனால் பரீட்சையில் இப் பகுதியைச் சரியாகச் செய்வதில்லை. இதற்குக் காரணம் திணிவு (m) தவனத்திற்கு எடுத்துக் கொள்ளாததே இதன் பொருள் சமன்பாட்டில் m வரப்பண்ணுவதல்ல. ஆனால் m ஐக் கவனத்தில் வைத்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு கூறப்பட்ட நிலைகளிலும். கணிக்கப்பட்டது சரியா என்பதை உற்றுநோக்குதல் வேண்டும். இதை மாணவர்கள் செய்துகாட்டப்பட்ட உதாரணங்களில் இருந்து அவதானிக்கலாம்.

உ+ம் 1. வளிமண்டல அமுக்கத்தில் குழாயில் 1 cm அளவைக் கொள்ளக்கூடிய வளியைக் கொண்டு ஒரு பாரமானியின் குழாய், தாழியில் உள்ள இரசத்துக்கு மேல் 85 cm க்கு எழுகிறது. பாரமானிக்குரிய உண்மையான உயரம் 75 cm ஆக இருக்க வளியின் அமுக்கம் அதன் கனவளவுக்கு நேர்மாறாக மாறினால், குழாயின் 15 cm அளவிற்கு வளி இருக்கிறது எனக்காட்டுக. (Aug 1981



குழாயின் குறுக்கு முகப் பரப்பு a cm^2 என்போம்

நிலை I இல் (m) திணிவுள்ள வளியின் கனவளவு (v_1), (p_1) முறையே $v_1 = a_1$ $p_1 = 75$ pg இங்கு p அடர்த்தி, g புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல். நிலை II இல் (m) திணிவுள்ள வளியின் கனவளவு (v_2) அமுக்கம் (p_2) முறையே $v_2 = xa$, $p_2 = p_Z = p_X - (85 - x)pg$

pv = மாறிலி ஆதலால் நாம் பெறுவது

$a75pg = xa(75 + x - 85)pg$

$\Rightarrow 75 = x(x - 10)$

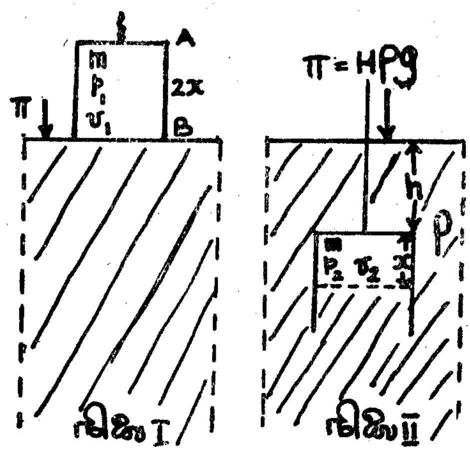
$\Rightarrow x^2 - 10x - 75 = 0$

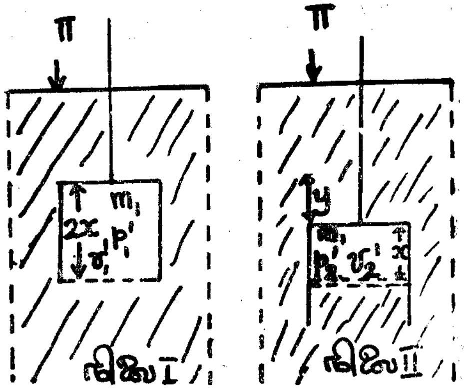
$\Rightarrow (x - 15)(x + 5) = 0$

$\therefore x = 15, -5$

இங்கு $x > 0$ ஆதலால் $x = 15$ cm ஆகும்.

உ+ம் 2 உருளை வடிவ ஆழ்மணியொன்று அதன் உச்சியானது நீர்ப்பரப்புக்குக் கீழே h ஆழத்தில் இருக்கும் வரை தாழ்த்தப்படுகிறது. இப்பொழுது ஆழ் மணியானது நீரினால் அரைவாசி நிறைந்திருப்பின், நீரை முற்றாக வெளியேற்றும்வரை வளி உள்ளே பம்பப்பட்டால் மணியில் மீண்டும் அரைவாசிக்கு நீர் நிறைவதற்கு முன்னர் மணியானது மேலும் 2(2H – h) எனும் தூரத்துக்குத் தாழ்த்தப்பட வேண்டுமெனக் காட்டுக. இங்கு H என்பது நீர்ப்பாரமானியின் உயரமாகும்.





நிலை	திணிவு m	கனவளவு (v)	அமுக்கம் (p)
I	m	$2x\alpha$	$H\rho g$
II	m	$x\alpha$	$(H+h+x)\rho g$
I	m^1	$2x\alpha$	$(H+h+2x)\rho g$
II	m^1	$x\alpha$	$(H+h+y+x)\rho g$

α: உருளையின் குறுக்கு முகப்பரப்பு.

$2x$: உருளையின் உயரம்.

m திணிவுள்ள வளிக்கு போயிலின் விதிப்படி

$2x\alpha H\rho g = x\alpha\,(H+h+x)\rho g$ அதாவது $x = H - h$ ஆகும் —I

m' இற்கு $2x\alpha\,(H+h+2x)\rho g = (H+h+y+x)\rho g$ —II

$2(2x+H+h) = H+h+y+x$

$\therefore\ y = H+h+3x = H+h+3(A-h) = 2(2H-h)$

$\therefore$ தாழ்த்தப்படவேண்டிய தூரம் $2(2H-h)$ ஆகும்.

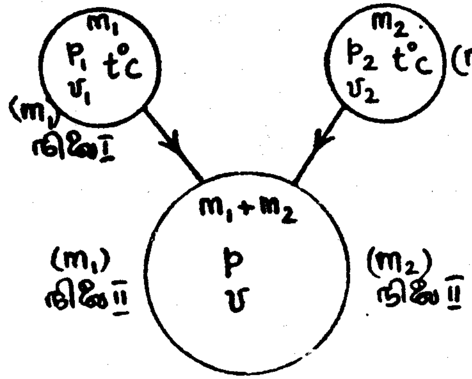
உ+ம் 3 ஒரே வெப்ப நிலையிலுள்ள இரு வாயுக்களின் அமுக்கங்கள் p_1, p_2 ஆகவும் அவற்றின் கனவளவுகள் முறையே v_1 v_2 ஆகவும் அமைந்துள்ளன. வெப்பநிலை மாறாதிருக்க இவ்வாயுக் கலவையின் கனவளவு v ஆகும்பொழுது அமுக்கமானது

$$\frac{p_1v_1+p_2v_2}{v}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

வளிமண்டல வளியின் கனவளவுகள் v_1, v_2 முறையே கனவளவுகள் V_1, V_2 கொண்ட இரு பாண்டங்களினுட் செலுத்தப்பட்டு இவ்விரு பாண்டங்களும் இடையே தொடர்பு ஏற்படுமாறு ஒரு வழியானது ஏற்படுத்துகின்றது. வளிமண்டல அமுக்கத்தில் கனவளவு

$$\frac{|V_1v_2-V_2v_1|}{V_1+V_2}$$ கொண்ட வளித்திணிவு ஒன்று ஒரு பாண்டத்திலிருந்து மற்றைய பாண்டத்திற்குச் செல்லுமெனக் காட்டுக.

(1975 April)



p கலவையின் அமுக்கம் என்போம்.

நிலை ii) இல் m_1 திணிவுள்ள வளியின் கனவளவு v_1^1, m_2 இன் கனவளவு v_2^1 எனக் கொள்வோம். ஆயின் $v_1^1 + v_2^1 = v$ ஆகும்.

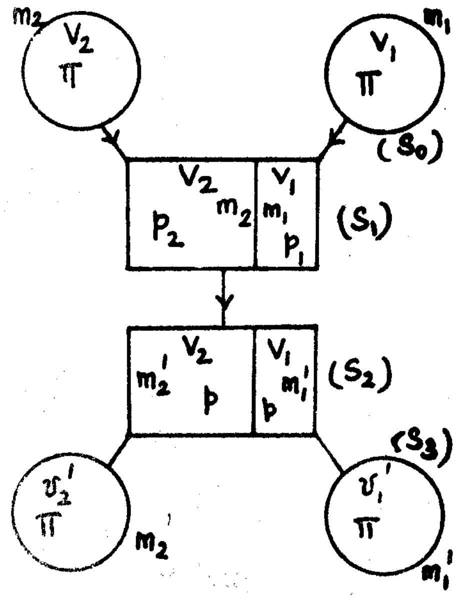
போயிலின் விதிப்படி $(m_1) \Longrightarrow Pv_1^1 = p_1v_1$ —(1)

$(m_2) \Longrightarrow pv_2^1 = p_2v_2$ —(2)

கூட்ட $p(v_1{}^1 + v_2{}^1) = p_1v_1 + p_2v_2$

அ-து $pv = p_1v_1 + p_2v_2$

$$\therefore \quad p = \frac{p_1v_1 + p_2v_2}{v} \quad \text{——(R)}$$



S_0 இல் $V_2 \rightarrow v_2$
$V_1 \rightarrow v_1$
எனக் கொள்க.

S_0, S_1, S_2, S_3 நிலைகளைக் குறிக்கின்றது.

திணிவுகளைக் கவனத்திற்கு எடுத்துக்கொள்வதால் கணித்தல் இலகுவாக அமைகிறது.

$S_0 \rightarrow S_1$ போயிலின் விதிப்படி $(m_1) \Rightarrow \; p_1V_1 = \pi v_1$ —(1)
போயிலின் விதிப்படி $(m_2) \Rightarrow \; p_2V_2 = \pi v_2$ —(2)

$S_1 \rightarrow S_2$ இற்கு பகுதி I இன் முடிவு (R) ஐப் பிரயோகிக்கப்

பெறுவது $p = \dfrac{V_1p_1 + V_2p_2}{V_1 + V_2}$ —(3)

$S_2 \rightarrow S_3$ போயிலின் விதிப்படி $(m_1{}^1) \Rightarrow \; \pi v_1{}^1 = V_1p$ —(4)
போயிலின் விதிப்படி $(m_2{}^1) \Rightarrow \; \pi v_2{}^1 = V_2P$ —(5)

$$(3) \Rightarrow \quad p = \frac{\pi(v_1 + v_2)}{V_1 + V_2} \quad \text{—(6)}$$

$$(4) \Rightarrow \quad v_1{}^1 = \frac{V_1p}{\pi} = V_1\left(\frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2}\right) \quad \text{—(7)}$$

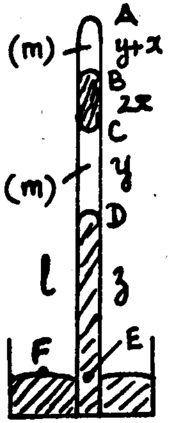
$$v_1 - v_1{}^1 = v_1 - \frac{V_1(v_1 + v_2)}{V_1 + V_2} = \frac{v_1V_2 - v_2V_1}{V_1 + V_2}$$

$$v_2 - v_2{}^1 = v_2 - \frac{V_2(v_1 + v_2)}{V_1 + V_2} = \frac{v_2V_1 - v_1V_2}{V_1 + V_2}$$

$v_1V_2 \gtrless v_2V_1$ ஏற்ப $v_1 \gtrless v_1{}^1$ ஆகும். அதாவது மட்டுப்பெறுமானம்
$v_2 \lessgtr v_2{}^1$

சமமாகும். ஆகவே $\dfrac{|V_1v_2 - V_2v_1|}{V_1 + V_2}$ கொண்ட வளித்திணிவு ஒரு பாண்டத்திலிருந்து மற்றைய பாண்டத்திற்குச் செல்லும்.

உ+ம் 4. ABCD என்னும் சீரான குழாயொன்று இரசப் பாத்திரமொன்றில் நிலைக்குத்தாக நிற்கிறது. மூடப்பட்ட மேல் முனையில், வளி நிரம்பிய A B என்னும் வெளியும், பின்னர் ஒருபகுதி B C இரசத்தால் நிரப்பப்பட்டும், C D வளியால் நிரப்பப்பட்டும் உள்ளது. D யிலிருந்து கீழ்முகமாக இரசம் உள்ளது. A B யிலும், C D யிலும் உள்ள வளியின் நிறைகள் சமன். அவற்றின் கனவளவுகளின் வித்தியாசம் BC யின் அரைப்பங்கு ஆகும். தரப்பட்ட நிறையுடைய வளியின் அமுக்கம், அதன் கனவளவுக்கு நேர்மாறு விகிதசமமாக மாறுகிறது எனக்கொண்டு வெளியேயுள்ள வளியமுக்கம், B C யின் நீளத்தின் அரைப்பங்கினால் அமிழ்த்தப்படாத குழாயின் பகுதியிலும் குறைந்த நீளமுடைய இரசநிரலிற்குச் சமமாகும் எனக்காட்டுக.



குறிப்பு:- (1) B இல் அமுக்கம், D இல் அமுக்கதிலும் குறைவு. ஆகவே AB > CD ஆகும். BC = 2x ஆயின் AB − CD = x ஆகும் CD = y எனக் கொண்டால் AB = y + x.

இவற்றை மாணவர்கள் ஒரு படம் போட்டு யோசித்துக் கொண்டு எடுகோளை எப்படி எடுத்துக் கொண்டால் கணித்தல் சுலபமாக அமையுமெனப் பார்த்தல் வேண்டும். இங்கு BC = 2x என எடுத்தால் ½ பங்கு x ஆகும். இதன் பின்னர் படத்தை விடைத்தாளில் பருமட்டாக அமைத்தல் வேண்டும்.

$P_F = h\rho g$ (வளியமுக்கம்) என்போம்

$= P_E$

$P_D = (h - z)\rho g = P_C$

$P_B = P_C - 2x\rho g = (h - z - 2x)\rho g$

pv = மாறிலி ஆதலால் [சமமான வளித்திணிவுகளுக்கு]

$(y + x)a.P_B = ya\, P_D$ ——— (1) இங்கு a குழாயின் குறுக்கு முகப்பரப்பு.

$(y + x)(h - z - 2x) = y(h - z)$ —— I

$y(h - z) - 2xy + x(h - z - 2x) = y(h - z)$

$\therefore 2y = h - z - 2x \quad \because x \neq 0$

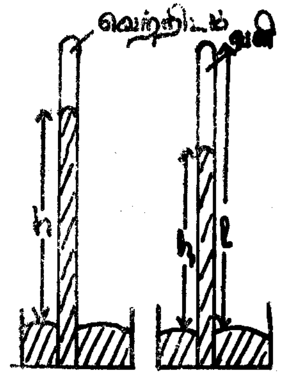
$\therefore h = z + 2x + 2y$ — II

இனி $AE = l = z + 2y + 3x$ ஆகும் படத்திலிருந்து

$\therefore\ \underline{l - x = h}$

அதாவது AE - ½BC = h. இதை நாம் வெளியேயுள்ள வளியின் அமுக்கம் BCயின் நீளத்தின் அரைப்பங்கினுல் அமிழ்த்தப்படாத குழாயின் பகுதியிலும் குறைந்த நீளமுடைய இரச நிரலிற்குச் சமமாகும்.

உ + ம் 5 உண்மையான வாசிப்புக்கள் முறையே 72 cm 76 cm ஆக இருக்கும்போது, சிறிதளவு வளியைக் கொண்ட பொய்ப் பாரமானியொன்றின் வாசிப்புகள் முறையே 71 cm, 74 cm இரசம் ஆகும். தரப்பட்ட அளவு வளியின் அமுக்கம் அதன் கனவளவிற்கு நேர்மாருக மாறுகிறது எனக் கொண்டு பொய்ப் பாரமானி 72 cm இரசத்தைக் காட்டும்போது உண்மையான வாசிப்பைக் காண்க.



உள்ளடக்கப்பட்ட வளியின் கனவளவு $v = (l - h_1)a$ இங்கு குறுக்கு முகப்பரப்பு அமுக்கம் $p = (h - h_1)\rho g$. ρ திரவத்தின் அடர்த்தி.

h; உண்மையான வாசிப்பு.

h_1: பொய்யான பாரமானியின் வாசிப்பு.

	h	h_1	$l - h_1$	$h - h_1$
(1)	72	71	$l - 71$	1
(2)	76	74	$l - 74$	2
(3)	h	72	$l - 72$	h—72

p v = மாறிலி ஆதலால்

$(l - 71)\, a.\rho g = (l - 74)\, a2\rho g = (l - 72)\, a\, (h - 72)\, \rho g$

அதாவது $(l - 71) = (l - 74)\,2 = (l - 72)(h - 72)$ ——— (1)

$l - 71 = 2l - 148$

$\therefore l = 77.$

$6 = 5(h - 72)$

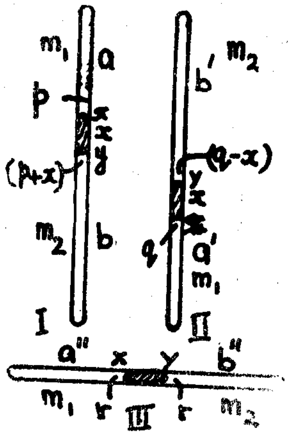
$\therefore h = 72 + 1.2 = 73.2$

∴ உண்மையான வாசிப்பு 73.2 ஆகும்.

குறிப்பு;- படம் பொது நிலக்குப் போட்டுக் கொண்டு வாசிப் புக்களை அட்டவணைப்படுத்துவது சிறந்தது. இவ்வழி பௌதிகப் பரிசோதனைகளில் வாசிப்புக்களைக் குறிப்ப தைப் போன்றது.

உ+ம்:- 6 சீரான நுண்துவாரமுள்ள ஓர் அடைத்த நேர்குழாய் நடுவில் இரசமும் ஒவ்வொரு மூலையிலும் வளியுங் கொள்ளும். குழாய் நிலைக்குத்தாகுமிடத்து வளி இடங் கொள்ளும் பாகங்கள் முறையே a, b என்னும் நீளங் களுடையன. குழாய் கவிழ்க்கப்படுமாயின் இந் நீளங் கள் a^1, b^1 ஆகும். குழாய் கிடையாயின் இந்நீளங்கள்

$$\frac{aa^1(b+b^1)}{ab+a^1b^1}, \quad \frac{bb^1(a+a^1)}{ab+a^1b^1}$$ ஆகுமென நிறுவுக.



நிலை	திணிவு(m)	கனவளவு v	அமுக்கம் (p)
I	m_1	$a\alpha$	$p\rho g$
II	m_1	$a^1\alpha$	$q\rho g$
II	m_1	$a^{11}\alpha$	$r\rho g$
I	m_2	$b\alpha$	$(p+x)\rho g$
II	m_2	$b^1\alpha$	$(q-x)\,\rho g$
II	m_2	$b^{11}\alpha$	$r\,\rho g$

α: குறுக்கு முகப்பரப்பு

நிலை I இல் x இல் அமுக்கம் $r\rho g$ எனக் கொள்ளப்படுகிறது.

,, II ,, x ,, ,, $q\rho g$,, ,,

,, III ,, x ,, ,, $r\rho g$,, ,,

போயிலின் விதிப்படி (m_1) இற்கு நாம் பெறுவது

$$a\alpha . p\rho g = a^1\alpha q\rho g = a^{11}\alpha r\rho g$$

அதாவது $ap = a^1q = a^{11}r$ ——(1)

இதேபோல் (m_2) இற்கு நாம் பெறுவது

$$b(p+x) = b^1(q-x) = rb^{11} \quad \text{——(2)}$$

குழாயின் நீளம் எல்லா நிலைகளிலும் சமம் ஆதலால்

$$a+b = a^1+b^1 = a^{11}+b^{11} \quad \text{——(3)}$$

(1) உம், (2) உம் பின்வருமாறு எழுதலாம்

$$\frac{p}{\frac{1}{a}} = \frac{q}{\frac{1}{a^1}} = \frac{r}{\frac{1}{a^{11}}} = \frac{p+q}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^1}} \quad \text{——(4)}$$

$$\frac{p+x}{\frac{1}{b}} = \frac{q-x}{\frac{1}{b^{1}}} = \frac{r}{\frac{1}{b^{11}}} = \frac{p+q}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^{1}}} \quad \text{——(5)}$$

$$\frac{(4)}{(5)} => \frac{a^{11}}{b^{11}} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^{1}}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^{1}}}$$

$$=> \frac{a^{11}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{b^{1}}} = \frac{b^{11}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^{1}}} = \frac{a^{11}+b^{11}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^{1}}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^{11}}} =$$

$$\frac{a+b}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^{1}}\right)}$$

$$\therefore a'' = \frac{\left(a+b\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b^{1}}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a^{1}}+\frac{1}{b^{1}}\right)}$$

$$= \frac{\left(a+b\right)\left(b^{1}+b\right)}{bb^{1}\left(\frac{a+b}{ab}+\frac{a^{1}+b^{1}}{a^{1}b^{1}}\right)}$$

$$= \frac{a^{1}a\ (b^{1}+b)}{a^{1}b^{1}+ab} \qquad \therefore\ a+b=a^{1}+b^{1}$$

இதேபோல்

$$b'' = \frac{b^{1}b\ (a^{1}+a)}{a'b'+ab}$$ ஆகும்.

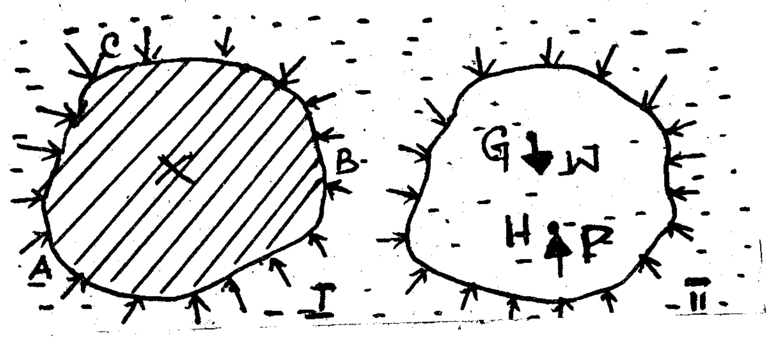
குறிப்பு: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரே அலகு கொண்ட கணியங்கள் பகுதியிலும் தொகுதியிலும் இருத்தல் வேண்

டும். இதைச் சமன்பாடு (4) (5) இல் அவதானிக்கலாம். மாணவர்கள் வேறு வழிகளால் செய்துபார்க்கும்போது தான் இதன் முறையைப் பின்பற்றத் தெண்டிப்பார்கள். தூயகணிதம் ஒரு பாடமாகப் படித்துக்கொண்டு இவ்வழி கடினம் என்று கூறுவது கணிதத்துறைக்கு ஓர் இழுக்காகும். மனிதனுல் செய்யமுடியாதது என்று ஒன்றுமில்லை. கடின உழைப்புத்தான் வேண்டும்.

ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாடு:

ஒரு திண்மம் ஓய்விலிருக்கும் ஒரு பாயியில் முழுமையாகவோ அல்லது பகுதியாகவோ அமிழ்த்தப்பட்டிருந்தால் அத் திண்மத்தின் மீது அப்பாயியின் விளையுளுதைப்பானது, அத்திண்மத்தால் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் நிறைக்குச் சமனும் எதிருமாகி அவ்விடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் புவியீர்ப்பு மையத்திறகூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துகோட்டின் திசையிலே தாக்கும்,

நிறுவல்:-



படம் I இல் காட்டியவண்ண

வளைபரபிப்ல் தாக்கும் உதைப்பு திண்மத்தின் அடர்த்தியால் பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆகவே படம் II இல் காட்டியவண்ணம் இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் சம நிலையை அத்திரவத்தினுள் எடுத்து நோக்கலாம. இத்திரவம் சூழ்ந்துள்ள திரவத்தால் சமநிலையில் இருப்பதால் இடையாக விளையுள் உதைப்பு பூச்சியமாக வேண்டும். நிலைக்குத்து உதைப்பானது இடம்பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமனுய் இதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாய்ச் செல்லவேண்டும். [இரண்டு விசைகளின் கீழ் சம நிலையை எடுத்து நோக்குக] படம்

I இலும் படம் II இலும் வளைபரப்பிலான் உதைப்புகள் சமமாகும். ஆகவே திண்மம் (x) இலுள்ள விளையுள் உதைப்பானது இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் நிறைக்குச் சமனும் எதிருமாகி அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக மேல்நோக்கித் தாக்கும்.

குறிப்பு:— (1) இவ்விளையுள் உதைப்பு மீயூந்தல் விசை (P) என அழைக்கப்படும். இடம் பெயர்க்கப்பட்ட பாயியின் புவியீர்ப்பு மையம் மீயூந்தல் மையம் [H] எனப்படும்.

(2) கணக்குகள் செய்யும்போதும், விசைகள் குறிக்கும்போதும் பொருளின் அமிழ்த்த பாகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தில் குறித்துக் காட்டலாம். அமிழ்த்த பாகத்தை ஒரு சீரான திண்மமாகக் கருதிக் கொள்ளல் வேண்டும். பொருள் முழுமையாகத் திரவத்தினுள் இருக்கும்போது G≡H ஆக இருக்கவேண்டியதில்லை இதற்குக் காரணம் பொருள் சீரான அடர்த்தியுடையதாக இருக்கவேண்டியதில்லை. பொருள் சீரானதாக இருப்பின் இது உண்மையானதாகும்.

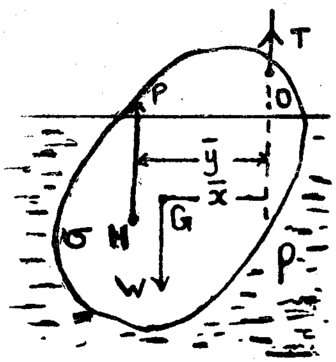
3. திண்மத்தின் சமநிலை எடுத்துக்கொள்ளப்படவில்லை என்பதை மாணவர்கள் மறந்து விடல் ஆகாது.

4. திண்மம் திரவத்தினுள் இருவகைகளில் இருக்கும்வண்ணம் செய்யப்படலாம்.

1) அதன் ஒரு புள்ளியில் கட்டித் தொங்கவிடுதல்.
2) திரவத்தில் தன்னிச்சையாக மிதக்கவிடுதல்

(இவ்விருவகைகளையும் நாம் தனித்தனியாக ஆராய்வோம்.)

I) ஒரு பொருளின் யாதுமொரு புள்ளியுடன் இணைக்கப்பெற்றுள்ள ஓர் இழையினால் அதன் ஒரு பகுதி ஒரு திரவத்திற்குள் அமிழ்த்தப்பட்டு மிதப்பதற்கான சமநிலை நிபந்தனைகள்:



படத்தில் காட்டிய வண்ணம் G பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம். H இடம் பெயர்க்கப்பட்ட திரவத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் என்போம். பொருளின் கனவளவு V எனவும், அமிழ்ந்த பாகத்தின் கனவளவு v எனவும் கொள்வோம். பொருளின் அடர்த்தி σ எனவும், திரவத்தின் ρ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

∴ $W = V\sigma g$, $P = v\rho g$ ஆகும்.

பொருள் சமநிலையில் இருப்பதால்

$P + T = W$ ——(1)

O ↙ $P\bar{y} = W\bar{x}$ ——— (2) ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

[நிலையியலில் சமாந்தர விசைகளின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குக]

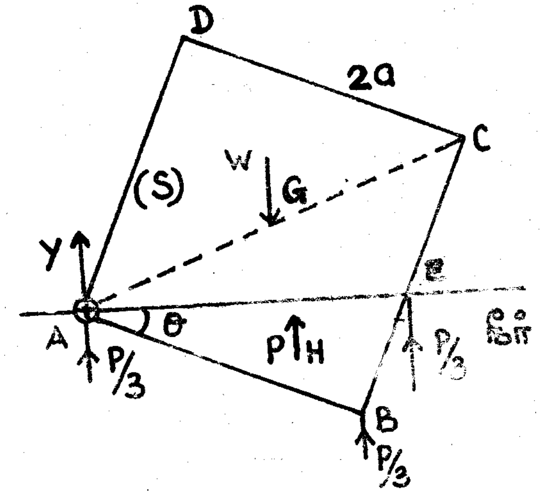
குறிப்பு:- T நிலைக்குத்தாக விருப்பதற்குக் காரணம் W உம் P உம் நிலைக்குத்தாகவிருப்பதால.

உய்த்தறிதல்:- $T = 0$ ஆயின் $W = P$, $\bar{y} = \bar{x}$ ஆயிருத்தல் வேண்டும் இவற்றை நாம் ஒரு திரவத்துள் சுயாதீனமாய் மிதக்குமொரு பொருளின் சமநிலை நிபந்தனைகள் எனக் கூறுவோம்.

உ+ம் 1. ஒரு சீர்ச் சதுரத்தட்டானது மூலையொன்றினூடான ஒரு கிடை அச்சைப்பற்றி சுயாதீனமாய்த் திரும்பக்கூடியது. இவ்வச்சு, தட்டினது தளத்திற்குச் செங்குத்தானது. இவ்வச்சானது ஒரு நீர்த்தாங்கியின் பரப்பிலிருப்பதோடு, தட்டினது பாதியிலும் குறைவான பகுதி அமிழ்ந்துமிருப்பின் தட்டின் தண்ணீர்ப்பு

$$\frac{\text{தான்}^3\theta + 2\,\text{தான்}\,\theta}{3(1 + \text{தான்}\,\theta)}$$

எனக் காட்டுக. இங்கு θ அச்சினூடாகவுள்ள அமிழ்ந்த பக்கம் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம்.



சதுரத்தட்டின் நிறை $W=4a^2tsw$ ஆகும். இது G யினூடாக நிலைக்குத்தாகத்தாக்கும். இங்கு $AB=2a$, தடிப்பு t, தன்னீர்ப்பு s, நீரின் தன் நிறை w. திரவத்தின் விளையுள் நிலைக்குத்துதைப்பு A B E எனும் நீரின் நிறையாகும். இது அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடு நிலைக்குத்தாக மேல்நோக்கித்தாக்கும்.

$$\therefore\ P=\tfrac{1}{2}.\ 2a.\ 2a\ \tan\theta\ tw$$
$$=2a^2\,tw\ \tan\theta$$

H இல் தாக்கும் இவ் உதைப்பு P ஆனது A, B, E என்னும் ஒவ்வொரு கோணப்புள்ளியிலும் தாக்குகின்ற $\frac{P}{3}$ என்பதற்குச் சமன் ஆகும். (திணிவு மையத்தில் இவற்றை திரும்பிப்பார்க்கவும்)

A பற்றித் திருப்பம் எடுக்கப் பெறுவது

$$A\swarrow\ W\,AG\,Cos(45-\theta)-\frac{P}{3}\,2a\,Cos\,\theta-\frac{P}{3}\,2a\,Sec\,\theta=0\quad\text{—(1)}$$

$$W\sqrt{2}a\ [Cos\,45\ Cos\theta+Sin\,45\ Sin\theta]=\frac{P}{3}\,2a\,(Cos\,\theta+Sec\,\theta)$$

$$\frac{W}{P}=\frac{2}{3}\left(\frac{Cos\theta+Sec\theta}{Cos\theta+Sin\theta}\right)$$

$$\frac{4a^2tsw}{2a^2tw\,tan\theta}=\frac{2}{3}\left(\frac{Cos^2\theta+1}{Cos\theta+Sin\theta}\right)\frac{1}{Cos\theta}$$

$$\therefore\ S=\frac{tan\theta}{3}\left(\frac{1+Sec^2\theta}{1+tan\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\ \frac{tan^3\theta+2tan\,\theta}{1+tan\,\theta}$$

உ + ம் 2. ஒரு சீரான சடப்பொருளினாலாய சிறிய சீரான தடிப்பையுடைய ஓர் அரைவட்ட அடரின் விட்டத்தின் முனைகள் A, B ஆகும். A B இன் நடுப்புள்ளி நீரின் மேற்பரப்பிலிருக்கவும், அடரின் பாதியிலும் கூடியபகுதி நீரில் உள்ளாழ்ந்தும் இருக்க, நீரின் மேற்பரப்புக்கு மேலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் A அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டு

அடர் சமநிலையிலுள்ளது. நீரின் மேற்பரப்புடன் A B இன் சாய்வு θ ஆரையன் $\left(\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ ஆயின் தன்னீர்ப்பு

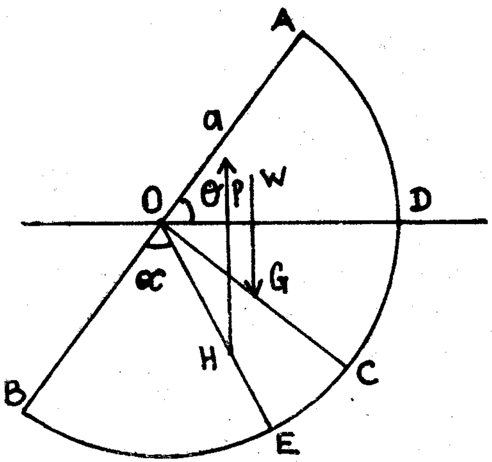
$$\frac{\{3(\pi-\theta)-2\ tan\theta\}}{3\pi-4\ \ tan\theta}$$ எனக்காட்டுக.

AB = 2a என்போம். $\underline{|BOD}=2\alpha=\pi-\theta$

$OG=\frac{4a}{3\pi}$, $OH=\frac{2}{3}\,a\,\frac{Sin\alpha}{\alpha}$ [புவியீர்ப்பு மையத்தில் பார்க்கவும்]

$P=a^2\alpha\,t\,w$, $W=\frac{\pi a^2}{2}\,tsw$ இங்கு s தன்னீர்ப்பு.

அடரின் சமநிலைக்கு A யில் திருப்பம் எடுக்கப் பெறுவது



$$A\swarrow\ \ P\,(Cos\,\theta-OH\,Cos\,\alpha)-W\,(a\,Cos\,\theta-OG\,Sin\,\theta)=0\quad\text{—(1)}$$

$$a^2\alpha\,tw\left(a\,Cos\theta-\frac{2}{3}\ a\ \frac{Sin\,2\alpha}{2\alpha}\right)=\frac{\pi a^2}{2}tsw\left(a\,Cos\,\theta-\frac{4a}{3\pi}\,Sin\,\theta\right)$$

$$2\alpha\,Cos\,\theta-\frac{2}{3}\,Sin\,2\alpha=S\left(\pi\,Cos\,\theta-\frac{4}{3}\,Sin\,\theta\right)$$

$$S = \frac{6\,\alpha \cos\theta - 2 \sin 2\alpha}{3\pi \cos\theta - 4 \sin\theta}$$

$$S = \frac{3(\pi - \theta) - 2 \tan\theta}{3\pi - 4 \tan\theta}$$

குறிப்பு: மாணவர்கள் இப்பகுதியில் நிலையியலின் பங்கு எவ்வளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது என்பதையும், புவியீர்ப்பு மையத்தில் சம வலுத்தொகுதி பயன்படுத்தும்போது திருப்புத்திறன் கணிப்பதில் ஏற்படும் சுருக்கமுறைகளையும் மறந்துவிடல் ஆகாது இப்பகுதி கடினமாகவிருப்பின் நிலையியல் பகுதியைத் திருப்பிப்பார்த்தல் வேண்டும். தூரங்களைக் கணிக்கும்போது திரிகோண கணிதத்தை நுட்பமாக உபயோகிக்கப்பழகவேண்டும்.

(II) ஒரு திரவத்திற் சுயாதீனமாய் மிதக்கும் ஒரு பொருளினுடைய சமநிலை நிபந்தனைகள்.

W, P, G, H (I) இல் கூறியவண்ணம் மிதக்கும் பொருள் ஒன்றிற்கு எடுத்துக்கொள்வோம்.

இரு விசைகளின் தாக்கத்தின்கீழ் பொருளின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குவோமாயின் W = P ஆயும், GH ஒரு நிலைக்குத்துக்கோட்டிலும் இருத்தல் வேண்டும். (W உம், P உம் நிலைக்குத்தாகவிருப்பதால்)

குறிப்பு 1: சில கணக்குகள் W = P ஐக்கொண்டு விடை எடுக்கக்கூடியதாகவிருக்கும். அவ்வகையானவை மிகவும் சுலபமானவை என்பதை மறத்தல் ஆகாது.

2) GH நிலைக்குத்து என்ற நிபந்தனை பிரயோகிக்கவேண்டிய இடங்களில் படம் மிகவும் கவனம் எடுத்து வரைதல் வேண்டும் அல்லது ஆள்கூற்று அச்சுகள் எடுத்து சுயாதீன மேற்பரப்பு, GH இற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும் என்ற நிபந்தனையை அவற்றின் படிசதிறன்களின் பெருக்கம் (− 1) என்பதன் மூலம் பெறத்தெரிதல் வேண்டும்.

3) இங்கும் கணிதம் நுட்பமாக உபயோகிக்கப் பழகவேண்டும் அல்லது போனால் விடை எடுப்பது சுலபமாக அமையாது. இப்பகுதியில் W = P, GH ↑ என்று கூறுவது சுலபம் ஆனால் கணக்குச் செய்து முடிப்பது கடினமாகும். செய்து காட்டப்படும் உதாரணங்களை மீண்டும் செய்து பார்த்துக்கொண்டு அதில் கையாளப்படும் கணித நுட்

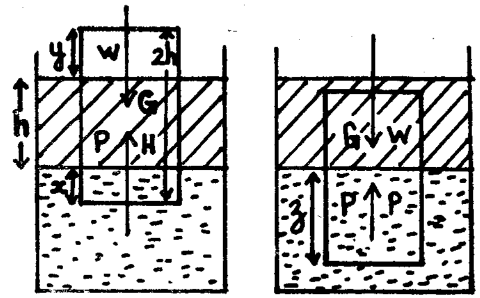
பத்தை அறிந்து பயிற்சியிலுள்ள கணக்குகளை சுயமுயற்சியாலும், கடின உழைப்பாலும் செய்து விடைகாண முயலவேண்டும். அப்போதுதான் மாணவர்களுக்கு ஒரு தன்னம்பிக்கை பிறந்து முன்நோக்கிச் செல்வார்கள்.

உ+ம் 1. பெரிய தாங்கியொன்றின் நீர்ப்பரப்பின் மீது, $\frac{1}{4}$ சாரடர்த்தியுள்ள திரவமொன்று h தடிப்புடைய ஒரு தடிப்பமுடைய ஒரு படையை ஆக்குகின்றது. 2h உயரமும் சாரடர்த்தி s உம் உடைய சீரான செவ்வட்டத் திண்ம உருளையொன்று அதனச்சு நிலைக்குத்தாகவிருக்குமாறு தாங்கியினுள் மிதக்கிறது.

1) $\frac{1}{8} < S < \frac{5}{8}$ எனின், உருளை நீரினுள் $(8s - 1)\frac{h}{4}$ உயரத்துக்கு அமிழ்ந்துள்ளது எனவும்

2) $\frac{5}{8} < S \leqslant 1$ எனின், உருளை நீரினுள் $2(4s - 1)\frac{h}{3}$ உயரத்துக்கு அமிழ்ந்துள்ளது எனவும் காட்டுக. (Aug 1982 Int)

படம் I படம் II



படம் I எடுத்துக்கொண்டால்

W = P —(1) ஆகும்.

இங்கு $W = A\,2hs\rho$ A: குறுக்குமுகப்பரப்பு

$P = Ax\,w + Ah\cdot\frac{1}{4}w$

$$(1) \Rightarrow 2hs = x + \frac{h}{4}$$

$$\therefore x = (8s - 1)\frac{h}{4}$$

படத்தில் காட்டியவண்ணம் உருளை மிதப்பின் $x > o$ ஆயும், $y = h - x > o$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $o < x < h$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$$o < (8s - 1)\frac{h}{4} < h$$

$$o < 8s - 1 < 4$$

$$1 < 8s < 5$$

$$\frac{1}{8} < s < \frac{5}{8}$$

ஃ $\frac{1}{8} < s < \frac{5}{8}$ எனின் உருளை நீரினுள் $(8s - 1)\frac{h}{4}$ உயரத்துக்கு அமிழும்.

படம் (II) ஐ கவனத்துக்கு எடுக்கையில்
$W = P$ ஆகும்

இங்கு $W = A\,2hsw$
$P = zAw + (2h - z)\,A\,\frac{1}{4}\,w.$

$$ஃ\ 2\,hs = z + \frac{h}{2} - \frac{3}{}$$

$$\frac{3}{4}\,z = \frac{h}{2}(4s - 1)$$

$$\therefore z = \frac{2}{3}(4s - 1)\,h$$

உருளை இவ்வாறு மிதப்பதற்கு $2h \geqslant z > h$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்,
அதாவது $2h \geqslant \frac{2}{3}(4s - 1)h > h$ ——(1)

$$6 \geqslant 8s - 2 > 3$$

$$8 \geqslant 8s > 5$$

$$1 \geqslant s > \frac{5}{8}$$

$\therefore \frac{5}{8} < S \leqslant 1$ எனின் உருளை நீரினுள்
$\frac{2}{3}(4s - 1)h$ உயரத்துக்கு அமிழும்.

குறிப்பு: $W = P$ மட்டும் உபயோகிக்கப்பட்டுள்ளது. பொருள் சீரான உருளை ஆதலால் G H ↑ என்பது வெளிப்படையாகும். x, z இன் பெறுமானங்கள் கணிப்பது சுலபம். ஆனால் S இன்வீச்சு எடுப்பதை மாணவர்கள் நன்றாய் விளக்கி வைத்துக் கொள்ளுதல் வேண்டும். நீரினுள் உருளை அமிழ்ந்து மிதப்பதால் இதன் மாதிரி வெளியை யோசித்தல்வேண்டும். ஒரு வகையைக் கருத்திற்கொண்டு அதற்குரிய சமநிலை நிபந்தனைகளை எழுதி விடையைப் பெறத் தெண்டித்தல் வேண்டும். S இன் விச்சு அதிகரிக்கையில் பொருள் அமிழ்வது கூடும் என்பதையும் கவனித்தல் வேண்டும். ஆகவே இவ்வகையான கணக்குகளில் மாதிரி வெளியையும் S இன் வீச்சையும், கவனித்தல் வேண்டும்.

உ+ம் 2. S எனும் தன்னீர்ப்புடைய ஒரு பொள் கோளத்தின் வெளி ஆரையும் உள் ஆரையும் முறையே a, b ஆகும். கோளமானது நீரில் மிதக்குமாயின்

$$\frac{b}{a} > \left(1 \frac{1}{S}\right)^{\frac{1}{3}}$$ என நிறுவுக.

தன்னீர்ப்பு 7.8 கொண்ட இரும்புக் கோளமொன்றின் தடிப்பு 0.045a இலும் பெரிதாய் இருக்கமுடியாதென இதிலிருந்து உய்த்தறிக.

$$\left[\left(\frac{34}{39}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.955 \text{ எனக் கொள்க.}\right]$$

(1978 Aug)

கோளத்தின் நிறை $W = \frac{4}{3}\pi\,(a_3 - b_3)\ SW$ ——(1)
கோளம் முழுவதும் அமிழ்ந்திருக்கும் ஆயின் மேல் உதைப்பு

$$P = \frac{4}{3}\pi\,a^3w \text{ ஆகும்}$$

$P > W$ ஆயின் கோளம் நீரில் மிதக்கமுடியும்.

அதாவது $\frac{4}{3}\pi a_3 w > \frac{4}{3}\pi\left(a^3 - b^3\,Sw\right)$

$b^3S > a^3(S - 1)\ \ S > 1$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 > \left(1 - \frac{1}{S}\right.$$

$a^3 > b^3$ ஆயும் a, b நேரானவையாயும் இருப்பதால் $a > b$ ஆகும். இக்கூற்றின்படி

$$\frac{b}{a} > \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ ஆகும்.}$$

∴ கோளம் நீரில் மிதக்குமாயின்

$$\frac{b}{a} > \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ ஆகும்.}$$

$s = 7.8 > 1$ ஆதலால்

$$\frac{b}{a} > \left(1 - \frac{1}{7.8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{b}{a} > \left(\frac{34}{39}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} > 0.955$$

$$-b < -0.955\,a$$

$$a - b < a - 0.955\,a$$

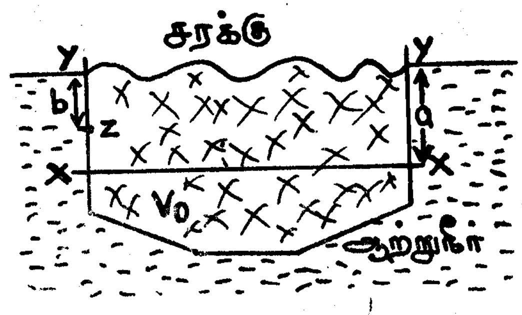
$$a - b < 0.045\,a$$

∴ தடிப்பு $d \not> 0.045\,a$ ஆயிருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு:- நிறை W ஆனது மேல் உதைப்பிலும் பெரிதாகின் பொருள் அமிழ்ந்துவிடும் என்பது ஒரு பொது அறிவு ஆகும். கோளம் பகுதி அமிழ்ந்து மிதக்கும் என எடுத்துக் கொண்டால் இவ் விடையை எடுப்பது மாணவர்களுக்குச் சிரமமாகவிருக்கும். மேலும் சமநிலியைப் பற்றிய விதிகள் நன்கு தெரிதல் வேண்டும். தடிப்பு (a—b) ஆதலால் (a—b)ஐ ஒரு சமநிலிக்கு உட்படுத்துதல் அவசியமாகும். உதாரணம் I இலும் சமநிலி முக்கிய பங்கு வகிக்கிறதென்பதையும் கவனித்தல் வேண்டும்.

உ+ம் 3. கடலிலிருந்து ஒரு ஆற்றினுள் பிரவேசிக்கும் கப்பலொன்று a cm தாழுகின்றது. கப்பற் சரக்கிலிருந்து W kg ஐ இறக்கிய பின்னர் அது b cm உயருகின்றது. கடல் நீரானது ஆற்று நீரிலும் பார்க்க $\alpha\,(>1)$ மடங்கு பாரமானது. நீர் மட்டக்கோட்டிலே கப்பலின் பக்கங்கள் அண்ணளவாக நிலைக்குத்தானவை.

கப்பலின் நிறை $\frac{aw\alpha}{(\alpha - 1)b}$ kg ஆகுமெனக் காட்டுக.



படத்தில் காட்டியதுபோல் கப்பலானது கடலில் செல்லும்போது புள்ளி x சுயாதீனப்பரப்பில் இருந்தது என எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது கப்பலால் இடம்பெயர்க்கப்பட்ட கடல் நீரின் கனவளவு V_0 என்போம்,

∴ கப்பலின் நிறை W_0 ஆனது.

$W_0 = V_0 w_0$ —(1) ஆகும். இங்கு w_0 கடல் நீரின் தன்னிறை.

கப்பலின் மேல் தட்டின் பரப்பளவு A cm^2 என்போம். ஆற்று நீரில் புள்ளி y சுயாதீனப் பரப்பில் இருக்கும் என எடுத்துக்கொண்டால் $xy = a$ cm ஆகும்.

∴ $W_0 = (V_0 + Aa)\,w$ –(2) இங்கு w ஆற்று நீரின் தன்னிறை W kg சரக்கு இறக்கியதும் b cm உயருகின்றது. இந்நிலையில் புள்ளி Z சுயாதீனப் பரப்ப்ல் இருக்கும். இங்கு $YZ = b$ cm ஆகும்.

∴ $W_0 = (V_0 + Aa)\,w$ –(2) இங்கு w ஆற்று நீரின் தன்னிறை.

W kg சரக்கு இறக்கியதும் b cm உயருகின்றது. இந்நிலையில் புள்ளி Z சுயாதீனப் பரப்பில் இருக்கும். இங்கு $YZ = b$ cm ஆகும்.

∴ $W_0 - W = [V_0 + (a - b)A]\,w$ —(3)

இனி $w_0 = \alpha w$ ஆகும் தரவு

$(1), (2) \Longrightarrow V_0 \alpha w = (V_0 + Aa)\,w$

∴ $V_0(\alpha - 1) = Aa$ —(4)

$(2) - (3) \Longrightarrow W = bAw$ —(5)

$$(1) \Longrightarrow \therefore W_0 = \frac{A a \propto w}{\propto - 1} = \frac{a \propto W}{(\propto - 1) b} \text{ kg}$$

∴ கப்பலின் நிறை $\frac{a \propto W}{(\propto - 1)b}$ kg ஆகும்

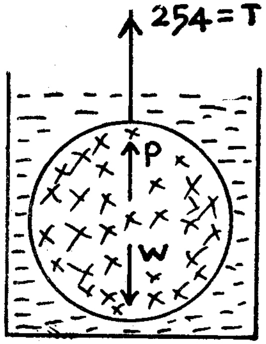
உ+ம்:- 4 ஒரு திரவத்தில் முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்பட்ட ஒரு திண்மத்தின் மீயுந்தல் விசை தொடர்பான ஆர்க்குமிடிசின் கோட்பாட்டைக் கூறி நிறுவுக.

படிகமும் தங்கமும் கொண்ட ஒரு கலவைக் கட்டியின் நிறை வளியில் 364 கிராமும் நீரில் 254 கிராமுமாகும். படிகத்தினதும் தங்கத்தினதும் தன்னீர்ப்பு முறையே 2.6 உம் 19.5 ம் எனக்கொண்டு கட்டியில் உள்ள தங்கத்தின் நிறையைக் காண்க.

(1980 Aug Int)

பகுதி I மாணவர்கள் புத்தகத்தை வாசித்து விளங்கிவைத்துக் கொண்டு புத்தகத்தைப் பாராது எழுதிப் பழகுதல் வேண்டும். எப்போதும் பாடமாக்காது படம் ஒன்றின் உதவியுடன் விளங்கிவைத்துக் கொண்டு தனது சொந்த வசனநடையில் எழுதுதல் போற்றத்தக்கதும் சிறந்ததுமாகும். இவ்வழிக்கு வந்துவிட்டால் விதிகளைக் கணிதவடிவில் எழுதி வைத்துக்கொண்டு வசனநடைக்கு மாற்றலாம். இதை மாணவர்கள் பௌதிகம், இரசாயனம் என்பவற்றிலும் பரீட்சித்துப்பார்க்கலாம். இவ்வகையான ஆராய்ச்சி செய்தல் மேல்படிப்புக்கு சிறந்ததாகும்.

பகுதி II



W=p+T (மிதத்தல் விதி)

$\therefore P = W - T$

$= 364 - 254$

$= 110$ gm

∴ கலவையின் கனவளவு 110 cm³ ஆகும்.

அங்கங்களின் கனவளவு = கலவையின் கனவளவு

$$\therefore \frac{W}{19.5} + \frac{364 - W}{2.6} = 110$$ ஆகும். இங்கு W பொன்னின் நிறை ஆகும்

$$\frac{W}{2.6} - \frac{W}{19.5} = \frac{364}{2.6} - 110 = \frac{364 - 286}{2.6} = \frac{78}{2.6}$$

$$\therefore W - W\frac{2.6}{19.5} = 78$$

$$W(195 - 26) = 195 \times 78$$

$$W\ 169 = 195 \times 78$$

$$W = \frac{195 \times 78}{169}$$

$$= \frac{15 \times 78}{13}$$

$$= 15 \times 6$$

$$= 90 \text{ gm}$$

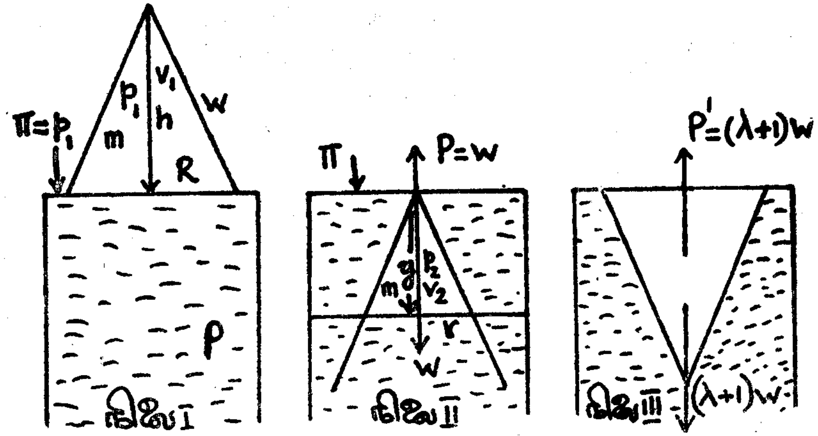
∴ பொன்னின்நிறை 90 கிராம் ஆகும்.

குறிப்பு:- இவ்வகையான கணக்குகளில் மாணவர்கள் பிழை விடுவது அதிகம். காரணம் வாய்ப்பாடுகளை விளங்காது பாடமாக்கிக்கொள்வதே. எப்போதும் ஒரு படம் வரைந்து பொருளில் தாக்கும் விசைகளைக் குறித்துக்கொண்டு அதன் உதவி கொண்டு சமன்பாடுகள் எழுதப்பழகவேண்டும். அதிகாரம் I இன் கற்றலையும் இங்கு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

உ+ம் 5. உயரம் h உம் நிறை w வுமுடைய செவ்வட்டப் பொட்கூம்புவடிவப் பாத்திரமொன்று அதனுச்சி மேனோக்கியிருக்குமாறு ஒரு நிலைக்குத்து நிலையில் பிடிக்கப்பட்டுப் படிப்படியாகத் திரவமொன்றினுள் தாழ்த்தப்படுகிறது. அது பின்னர் அதனுச்சி மேற்பரப்பின் மீது இருக்குமாறு சுயாதீனமாக மிதக்கிறது. கூம்பு அதனுச்சி கீழ்முகமாக இருக்குமாறு தாழ்த்தப்படின் அதை, அதன் வட்ட விளிம்பு மேற்பரப்பின் மீது இருக்குமாறு சுயாதீனமாக மிதக்கச் செய்வதற்கு ஒரு நிறை λw அதனுள் வைக்கப்படவேண்டும் பாத்திரத்தின் சுவரின் தடிப்பு சிறிதாகவும், தரப்பட்ட

திணிவுடைய வளியின் அமுக்கம் அதன் கனவளவுக்கு நேர் மாருக மாறுவதாகவுமிருப்பின், அதே திரவத்திஞலான பாரமானியின் உயரம்

$\lambda^{-1}(1+\lambda)^{-\frac{1}{3}}h$ எனக் காட்டுக. *(1983)*



நிலை I (m) => $p_1 = H\rho g$ நிலை II (m) => $p_2 = (H+y)\rho g$ $R_1 r$ கருதப்படும் கூம்புகளின் ஆரைகள்.

$V_1 = \frac{\pi}{3}R^2h$ $V_1 = \frac{\pi}{3}r^2y$ H: திரவப் பாரமானியின் வாசிப்பு

$pv =$ மாறிலி ஆதலால்

$p_1v_1 = p_2v_2$ ஆகும்.

அதாவது $H\rho g\ \frac{\pi}{3}R^2h = (H+y)\rho g.\frac{\pi}{3}r^2y$

$\therefore\ Hh\ R^2 = (H+y)\ yr^2$ ——(1)

கூம்பு சுயாதீனமாக மிதப்பதால் (II) இலும் (III) இலும் இருந்து பெறுவது

$\frac{1}{3}\pi r^2 y\rho g = w$ ——(2)

$\frac{1}{3}\pi R^2\ h\rho g = (\lambda+1)w$ ——(3)

(2), (3) => $R^2h = (\lambda+1)\ yr^2$ —(4)

$\frac{(1)}{(4)}$ => $H = \frac{H+y}{\lambda+1}$

$\therefore\ y = H\lambda$ ——(5)

இனி $\frac{R}{r} = \frac{h}{y}$ ஆகும்.

$\therefore\ \frac{R^2}{r^2} = \frac{h^2}{y^2} = \frac{(H+y)y}{Hh}$ ——(6) (1) இலிருந்து

(6), (5) => $\frac{h^2}{y^2} = \frac{(H+h\lambda)H\lambda}{Hh} = \frac{h^2}{H^2\lambda^2}$

$\therefore\ H^3 = h^3\frac{1}{\lambda^3(\lambda+1)}$

$\therefore\ H = \frac{h}{\lambda}\frac{1}{(\lambda+1)^{\frac{1}{3}}}$

$H = \lambda^{-1}\left(1+\lambda\right)^{-\frac{1}{3}}h$

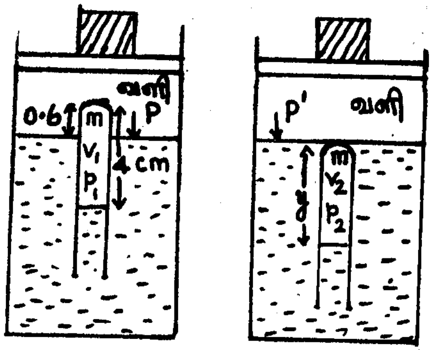
குறிப்பு:- இவ்வுதாரணத்தில் போயிலின் விதியும், மிதத்தல் விதியும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஆகவே படம் தெளிவாக இருக்க வேண்டும். விதிகளைச் சரியாக உபயோகித்தல் வேண்டும். பரீட்சைக்கு இவ்வகையில் கூடிய ஆண்டுகள் போடப்பட்டுளளது. மாணவர்கள் பிழைகள் விடுவதும் அதிகம். இவ்வுதாரணங்களை விளக்கிக் கொண்டு பயிற்சியில் இருக்கும் கணக்குகளைச் செய்து பாாக்கவேண்டும். ஒவ்வொரு பகுதியிலும் மாணவர்கள் கையாளப்படவேண்டிய நுட்பங்களை அறிந்திருத்தல் வேண்டும்.

உ+ம் 6. வளி போகாத நகர்த்தக்கூடிய முசலமொன்றினல் மேற்பக்கம் அடைக்கப்பட்ட கண்ணுடி உருளையுள் உள்ள நீரில் சீரான வெட்டுமுகமுள்ள பரிசோதனைக் குழாய் ஒன்று தலைகீழாக மிதக்கிறது. உருளையில் உள்ள நீருக்கு மேலேயுள்ள

வளியின் அமுக்கம் 76 cm இரசமாக இருக்கும்போது, சோதனைக்குழாய் 4.0 cm வளி நிரலை உள்ளடக்கியுள்ளது. அப்போது நீர்மட்டத்துக்கு மேலேயுள்ள குழாயின் நீளம் 0.6 cm ஆகும். தரப்பட்ட ஒரு திணிவு வளியின் அமுக்கம், அதன் கனவளவுடன் நேர்மாறாய் மாறும் எனக்கருதி, குழாயை முற்றாக உள்ளாழ்துவதற்கு, உருளையினுள் உள்ள வளியின் அமுக்கத்தில் ஏற்படவேண்டிய தேவையான அதிகரிப்பைத் துணிக.

(இரசத்தின் அடர்த்தி = 13.6 gm/ce)

(1984)



நிலை I   நிலை II

மிதத்தல் விதியை முதலில் உபயோகிப்போமாயின் குழாயின் நிறை (W) = இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீரின் நிறை

$$\therefore \ W = 3.4\ a\rho g \quad \text{—I நிலை (I) இல்}$$
$$W = ya\rho g \quad \text{—II நிலை (II) இல்}$$

$$\therefore \ y = 3.4 \text{ cm ஆகும்}$$

நிலை I இல் (m) $v_1 = 4a$ — a: குறுக்குமுகப்பரப்பு

$p_1 = (76 \times 13.6g + 3.4g)$ — g: புவியீர்ப்பு ஆர்முடுகல்

நிலை II இல் (m) $v_2 = 3.4\ a$

$p_2 = (76 + h)13.6 + 3.4g$ — இங்கு அதிகரிப்பு h cm இரசம்.

$p_1 v_1 = p_2 v_2$ ஆதலால்

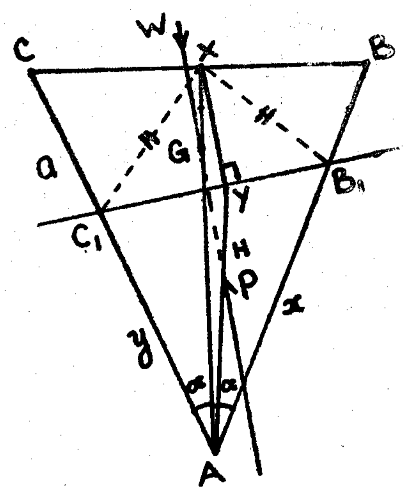
$$4a\,(76 \times 13.6 + 3.4)\,g = [\,(76 + h)\ 13.6 + 3.4]g\,(3.4a)$$
$$4 \times 76 \times 13.6 + 4 \times 3.4 = 3.4 \times 76 \times 13.6 + 3.4 \times 13.6h + 3.4^2$$
$$76 \times 13.6\,(4 - 3.4) + 3.4\,(4 - 3.4) = 3.4 \times 13.6 \times h$$
$$76 \times 13.6 \times 0.6 + 3.4 \times 0.6 = 3.4 \times 13.6h$$
$$76 \times 4 \times 0.6 + 0.6 = 13.6h$$
$$(304 + 1)\,0.6 = 13.6h$$

$$\therefore \ h = \frac{305 \times 6}{136} \text{ cm}$$

$$= \frac{1830}{136} \text{ cm}$$

குறிப்பு:- படம் போட்டுக்கொள்வதனால் கணக்கு இலகுவானதாக அமைகின்றது. எண்களைச் சுருக்கும்போது காரணிகளைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். h இற்கு ஒரு கோவை பெற்றுக் கொண்டுதான் பெருக்கல் பிரித்தல் செய்யவேண்டும். இங்கு g கணித்தலுக்கு உட்படுத்தப்படவில்லை. அதிகரிப்பும் 76 உடன் சேர்க்கப்படுகின்றது. இதனால் கணித்தல் சுலபமாய் அமைகின்றது.

உ+ம் 7 AB = AC = a ஆயும் ∠BAC = 2∝ ஆயுமுள்ள ஒரு சீரான முக்கோண அடர் (தன்னீர்ப்பு s) A திரவத்துக்குள்ளும் BC திரவத்துக்கு வெளியேயும் BC கிடையாகவும் இல்லாமலிருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் நீரினுள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில் AB, AC என்பவற்றில் அமிழ்ந்த பகுதிகளின் கூட்டுத்தொகை $2a\,Cos^2\alpha$ எனவும், மேலும் $S < Cos2\alpha$, $S < Cos^4\alpha$ எனவும் காட்டுக



அடர் சுயாதீனமாக மிதப்பதால் GH நிலைக்குத்தாகவிருக்க வேண்டும் இனி △ABC இன்மையைப் போலி G ஆதலால் AG: GX = 2:1 ஆகும். இதேபோல AH; HY = 2:1 ஆகும். ஆகவே கேத்திரகணிதப்படி GH|| xy ஆகும்.

GH நிலைக்குத்தாகவிருப்பதால் xy உம் நிலைக்குத்தாகவிருக்கும். Y, C_1B_1 இன் நடுப்புள்ளிஆகவிருப்பதால் $C_1X = B_1X$ ஆகும்.

$\Delta\ AB_1X$ இல் கோசைன் விதிப்படி

$$B_1X^2 = x^2 + AX^2 - 2xAX\cos\alpha \quad —(1)$$

$\Delta\ AC_1X$ இல் $C_1X^2 = y^2 - 2y\,AX\cos\alpha \quad ——(2)$

$$(1) —(2) \Rightarrow \quad O = x^2 - y^2 + 2AX\cos\alpha\,(y - x)$$

$$y + x = 2AX\cos\alpha$$

$$= 2a\cos^2\alpha \qquad (\because AX = AB\cos\alpha = a\cos\alpha)$$

குறிப்பு: இம்முடிவு GH நிலைக்குத்து என்பதை மட்டும்பயன்படுத்திப் பெறப்பட்டுள்ளது. படத்தை மாணவர்கள் வரைவதற்கு கேத்திரகணித எளிய அமைப்புகள் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். இங்கு B_1, C_1, X, Y முதல் அமைத்துக்கொண்டு படம் வரைந்தால் படம் பருமட்டாக அமையும். இதை வரைந்துபார்த்தல் நன்று.

$W = P$ ஆதலால்

$$\tfrac{1}{2}a^2 \sin 2\alpha\ tsw = \tfrac{1}{2}xy \sin 2\alpha\ tw$$

$$\therefore \quad S = \frac{xy}{a^2} \quad —(1) \qquad t: \text{ தடிப்பு.}$$

$x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$ ஆதலால் (சமம் $x = y$ ஆக)

$2a\cos^2\alpha \geqslant 2\sqrt{xy}$ ஆகும்.

இனி BC கிடையாக இல்லாதிருப்பதால் $x \neq y$ ஆகும்.

$$\therefore \quad 2a\cos^2\alpha > 2\sqrt{xy}$$

$$a^2\cos^4\alpha > xy = a^2 s$$

$\therefore \quad S < \cos^4\alpha$ ஆகும்.

$B_1 \rightarrow B$ ஆக $x = a$ ஆகும். இந்நிலையில் $s = \bar{s}$ என்போம்.

$$\therefore \quad \bar{s} = y/a = \frac{2a\cos^2\alpha - a}{a} = \cos 2\alpha$$

$\therefore \quad s < \cos 2\alpha$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $s < \cos^4\alpha$ ஆயும், $s < \cos 2\alpha$ ஆயும் இருத்தல் வேண்டும்.

உ+ம் 8. இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணியொன்றின் வடிவத்திலுள்ள $\frac{1}{6}$ என்ற தன்னீர்ப்புடைய ஒரு சீர் அடரொன்று நீரில் செம்பக்கம் நீருக்கு முற்றிலும் வெளியேயும், கிடையுடன் 30° கோணத்தில் சாய்ந்துமிருக்க, மிதக்கமுடியுமெனக் காட்டுக.

செய்வழி I உதாரணம் (7) ஐ எடுத்துக்கொண்டால் $\alpha = 45^\circ$ இட முக்கோணி இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணி ஆக அமையும். Sஐ $\frac{1}{6}$ என எடுத்துக்கொள்ளுதல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad x + y = a \quad ——(1)$$

$xy = \dfrac{a^2}{6} \quad ——(2)$ என நாம் பெறமுடியும்.

a ஐ நீக்க $(x+y)^2 = 6xy$ ஆகும்.

அதாவது $x^2 - 4xy + y^2 = 0$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\tan^2\theta - 4\tan\theta + 1 = 0 \quad ———(1) \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

வகை I $\tan\theta = 2 + \sqrt{3}$ ஆயின் $\theta = 75^\circ$

$\therefore$ செம்பக்கம் நீருள் இருக்கும்.

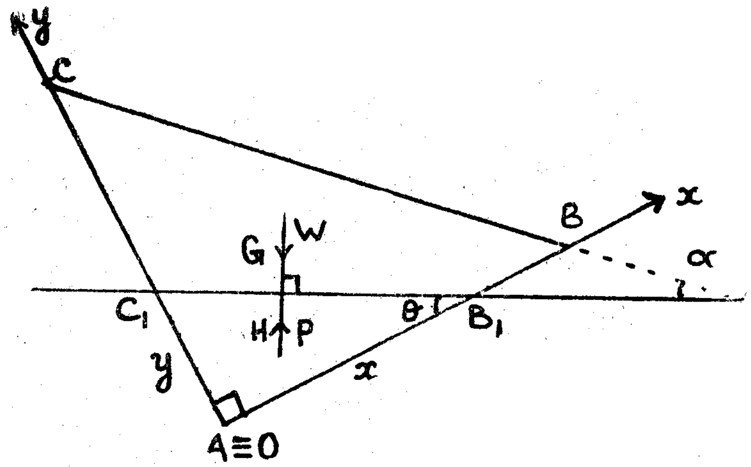
வகை II $\tan\theta = 2 - \sqrt{3}$ ஆயின்

$\theta = 15^\circ$

இந்நிலையில் செம்பக்கம் வெளியேயும் கிடையுடன் 30° இலும் சாய்ந்துமிருக்க மிதக்க முடியுமாகும்.

செய்வழி II

படத்தில் காட்டியவண்ணம் x,y அச்சுக்களை தேர்ந்தெடுப்போமாயின்



(G H இன் படிதிறன் x (B$_1$C$_1$ இன்படிதிறன்) = -1 ஆகும்.

$A \equiv O$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$B_1 \equiv (x, o)$, $B \equiv (a, o)$, $C_1 \equiv (o, y)$, $C \equiv (o, a)$ ஆகும்.

∴ $H \equiv \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$, $G \equiv \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ ஆகும்.

H G இன் படிதிறன் $(m_1) = \frac{y-a}{x-a}$

B$_1$C$_1$ இன் படிதிறன் $(m_2) = \frac{-y}{x}$

$m_1 m_2 = -1$ ஆதலால்

$$\frac{y-a}{x-a} \times \frac{y}{x} = -1$$

$$y^2 - ay = x^2 - ax$$

$$(x-y)\,a = x^2 - y^2$$

∴ $x + y = a$ —(1) $x =/= y$ ஆயிருக்கையில்

$W = P$ ஆதலால்

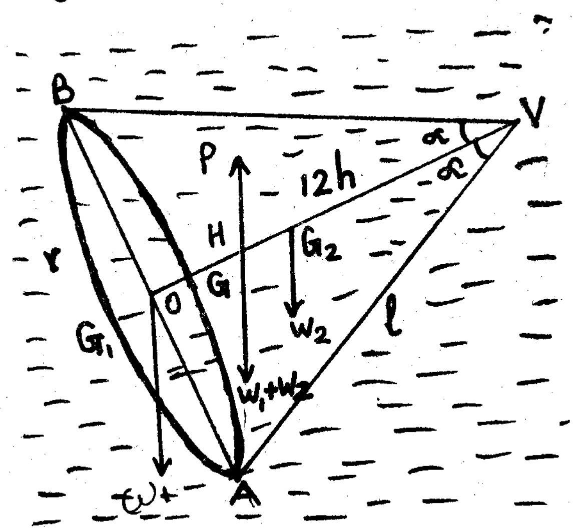
$\frac{1}{2}a^2\frac{1}{6}t\,w = \frac{1}{2}\,xytw$ t: தடிப்பு

∴ $xy = \frac{a^2}{6}$ — (2)

செய்வழி I இலிருந்து $\tan\theta = 2 \pm \sqrt{3}$ எனக் காட்டலாம் அதாவது $\theta = 15°$ சாத்தியமானது தரப்பட்ட நிபந்தனைக்கு அமைய.

∴ படத்திலிருந்து $\alpha = 30°$ ஆகும்.

உ+ம் 9. அடித்தளமுடைய ஒரு மெல்லிய பொட்கூம்பு நீரில் எங்கு வைக்கபபட்டாலும் முழுவதும் அமிழ்த்தப்பட்ட வண்ணம் மிதக்கின்றது. அதன் உச்சிக்கோணம் 2 சைன்$^{-1}$ $(\frac{1}{3})$ எனக் காட்டுக.



அடித்தட்டின் நிறை W_1, வளைபரப்பின் நிறை W_2 என்போம். இடம் பெயர்க்கப்பட்ட நீர் ஒரு திண்மக்கூம்பு VAB ஆகவிருப்பதால் மேலுதைப்பு (P) இதன் திணிவுமையம் H இனூடாக மேல்நோக்கித் தாக்கும். இங்கு $VH = \frac{3}{4}\,OV = 9h$. $(OV = 12h$ என்போம்$)$. கூம்பு எந்நிலையிலும் மிதப்பதால் W_1, W_2 இனது விளையுள் H இன் ஊடாகக் கீழ்நோக்கி இருத்தல் வேண்டும். இதை நாம் அடித்தட்டுடைய பொட்கூம்பின் திணிவுமையம் $G\ (\equiv H)$ என அழைப்போம்.

பொட்கூம்பின் திணிவுமை G_2 ஆதலால் $OG_2 = \frac{1}{3} \times 12h$

இனி $OG = 3h$ $= 4h$

∴ $GG_2 = h$ ஆகும்.

$$\text{அதாவது } \frac{OH}{HG_2} = \frac{3h}{h} = \frac{3}{1} \quad \text{——— (1)}$$

W_1, W_2 இனது விளையுள் H ஆதலால் சமாந்தரவிசைக் கொள்கையின்படி

$$\frac{OH}{HG_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{3}{1} \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது $w_2 = 3w_1$ ——— (2)

$\pi r l w = 3\pi r^2 w$, w: ஓரலகுப்பரப்பின் நிறை.

$l = 3r$

$$\frac{r}{l} = \frac{1}{3} = \sin\alpha$$

இங்கு l: சாய்வு ஒரே நீளம்

r: ஆரை

∴ உச்சிக்கோணம் $2 \sin^{-1}(\frac{1}{3})$ ஆகும்.

குறிப்பு:- $OV = 12h$ எனக்கொண்டதால் $HG_2 = h$ எனவும் பெறக் கூடியதாக உள்ளது. மாணவர்கள் வழக்கமாக $OV = h$ என எடுப்பார்கள் இதனால் HG_2 பின்னமாக அமையும் OV எவ்வண்ணம் எடுதுக்கொண்டால் பின்னம் முழுவெண்ணாக அமையும் என்பதை மாணவர்கள் நன்கு விளங்கி வைத்துக்கொள்ளவேண்டும். இவ்வித கணித நுட்பங்களை மற்றையப் பகுதிகளிலும் பயன்படுத்தத் தவறக்கூடாது.

மேலும் இங்கு $G \equiv H$ மட்டும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளது. $W = P$ பயன்படுத்தப்படவில்லை. எச்சாய்விலும் பொருள் மிதக்கும்போது $G \equiv H$ ஆகும். இதை ஒரு படம் வரைந்து கண்டுகொள்ளவது சிறந்ததாகும்.

இப்பகுதி படிக்கும்போது மாணவர்கள் சுலபம் என்று கவனம் செலுத்துவதில்லை. பௌதிகத்தில் கற்றவை என்று கூறிக்கொண்டு

படிக்கமாட்டார்கள். ஆனல் கடந்தகாலப் பரீட்சைப்புள்ளி விபரப்படி மாணவர்கள் கூறுவதற்கு அமைய இப்பகுதி சரியாகச் செய்வதில்லை. இதற்குக் காரணம் இப்பகுதியில் கையாளவேண்டிய நுட்பங்களை அறிந்து கொள்வதுமில்லை, அறியத்தெண்டிப்பதுமில்லை. இங்கு செய்து காட்டப்பட்ட கணக்குகளைப் பாராது படித்த கொள்கைகளை வைத்துக்கொண்டு சமன்பாடுகள் எழுதப்பழகிப் பின்பு அவற்றை விடுவித்தல் வேண்டும். அதன் பின்புதான் செய்து காட்டப்பட்ட வழியைப் பார்த்து உங்கள் குறைகளைக்கண்டு நிவர்த்தி செய்தல் வேண்டும் இவ்வழி கடினமாகவிருக்கலாம் ஆனல் பின்பற்றும்போதுதான் A/L இல் விடிவு ஏற்படும். கஷ்டப்படாமல் விடிவு ஏறபடும் என நினைப்பது சரித்திரத்திற்குப் புறம்பானது. இவற்றை நடைமுறையில் அவதானித்துப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 1

போயிலின் விதி மட்டும் பயன்படுத்தும் கணக்குகள்

1 கடல் நீரின் கீழே ஏற்பட்ட கப்பற் சிதைவொன்றிலிருந்து விடுவிக்கப்பட்ட வழிக்குமிழியொன்று மேற்பரப்பிற்கு வந்ததும் அதன் கனவளவு இருமடங்காகிறது. பாரமானி உயரம் 76 சதம மீற்றர் இரசம் எனவும் கடல் நீரின் அடர்த்தி 1.04 கி. சமீ$^{-3}$ எனவும், இரசத்தின் அடர்த்தி 13.6 கி. சமீ$^{-3}$ எனவும் கொண்டு கப்பற் சிதைவின் ஆழத்தை மதிப்பிடுக.

2. காற்று நிரப்பப்பட்டுள்ள ஒரு குடுவை நிறுதிட்டமாக இருக்கின்றது இது ஒரு தக்கையினுல் மூடப்புட்டுள்ளது. தக்கைக்கூடாக சீரான துளையுள்ள நிலைக்குத்தான குழாய் செல்கிறது. இதனுள் h நீளமுள்ள இரச நிரல் உள்ளது. முழுவதும் குழாய் கிடையாய் இருக்குமாறு வைக்கப்படின் இரசம் x தூரம் செல்லும். குழாய் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு கவிழ்த்து வைக்கப்படின் y தூரம் செல்லும் வளிமண்டல அமுக்கத்தைக் காண்க.

3. ஒரு உருளை வடிவான 6h உயரமுள்ள ஆழ்மணியொன்று இதனுள் அடங்கிய வளி மூன்றில் இரண்டு பங்கு உள்ளிடத்தில் அடங்கும் வரை ρ அடர்த்தியுள்ள நீரினில் இறக்கப்பட்டது. இப்பொழுது மீண்டும் அதைப்போல் அரைப்பங்குவளி, மணியினுள் பம்பிக்கப்பட்டது. வளிமண்டல அமுக்கம் $2H\rho g$ எனின் இந்த வளியினுள் அரைப்பங்கு நீர் நிறைவதற்கு மணி மேலும் $(3H + h)$ தூரம் இறங்கவேண்டும் எனக்காட்டுக.

4. சீரான குறுக்கு வெட்டுள்ள U குழாயொன்றில் இரசம் உள்ளது இக் குழாயானது A B என்னும் அதன் புயங்கள் நிலைக்குத்தாய் இருக்குமாறு நிறுத்தப்பட்டுள்ளது. புயம் A மூடப்பட்டிருக்க, புயம் B திறந்திருக்கின்றது. A யின் உச்சியில் வெற்றிடம் உண்டு. இரு புயங்களிலுமுள்ள இரசத்தின் மட்டங்களின் வித்தியாசம் 76 cm ஆகும். வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 57 cm நீளமுள்ள ஒரு நீளமுள்ள ஒரு வளி நிரலை உள்ளடைத்தவாறு B யின் உச்சி மூடப்படுகிறது. A யின் உச்சி இப்பொழுது திறக்கப்பட்டால் புயம் B யிலுள்ள இரசமட்டத்தின் ஏற்றத்தைக் கணிக்க.

5. உருளையொன்று, ஒட்சிசனை 100 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் கொண்டுள்ளது. 20 வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள 1 கன செ. மீ ஒட்சிசன், உருளைக்குள் புகுத்தப்பட்டதும் உருளையிலுள்ள அமுக்கமானது. 150 வளிமண்டல அமுக்கத்தில் உருளையிலுள்ள ஒட்சிசனின் அளவு இப்பொழுது என்னவாகும்?

6. u-குழாயொன்று ஒரு முனையில் மூடப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு புயமும் 60 cm நீளமானது குழாயின் 60 cm ஐக்கொள்ளக் கூடியதாக மறுமுனையிலே இரசம் உள்ளே விடப்படுகிறது. இரசப் பாரமானியின் உயரம் 75 cm எனவும் மூடிய புயத்தினுள்ளே அடைக்கப்பட்டுள்ள வளி PV = மாறிலிஇற்கு அமைவதாயின் ஒவ்வொரு புயத்திலுமுள்ள இரசத்தின் உயரத்தைக் காண்க,

7. ஒரு மயிர்த்துளைக்குழாயினுடைய இரண்டு கிளைகளும் அங்குலத்தில் அளவுகோடிடப்பட்டுள்ளன. குறுங்குழாயினுள் இரசம் 4 என்னும் அளவு கோட்டில் நிற்கின்றது. அதற்கு மேலே 5 அங்குலக் காற்று சிறையாக்கப்பட்டிருக்கிறது. மற்றக் கிளையிலுள்ள இரசம் 38 என்னும் அளவுக்கோட்டிலே நிற்கின்றது. அப்போது பாரமானியின் 29.5 அங். அமுக்கங் காட்டுகின்றது. அந்த 5 அங்குலக் காற்று எவ்வமுக்கத்திற்கு உட்படுத்தப்படுகின்றதென்றும் தனியே பாரமானி அமுக்கத்தின் கீழ், குழாயின் எந் நீளத்தை இடம் கொள்ளுகின்றதென்றும் காண்க.

8. ஒரு பாரமானி 30 அங் இலே நிற்கிறது; அப்போது தொரிசெல்லியின் வெற்றிடம் 2 அங்.; வளிமண்டல அமுக்கத்தில் அக் குழாயின் அரையங்குலம் கொள்ளக்கூடிய ஒரு காற்று குமிழி இப்போது அதற்குள்ளே செலுத்தப்பட்டால் அக்குழாயிற்குள் இரசத்தின் பரப்பு 3 அங்குலம் தாழ்த்தப்படும் எனக் காட்டுக அன்றியும் திருத்தமில் பாரமானி x அங். இலே நிற்கும்போது திருத்தமுள் பாரமானியின் உயரம்

$$x + \frac{15}{32-x}$$ அங் என்று காட்டலாம்.

9. ஒரு பாரமானியிலே தொரிசெல்லியின் வெற்றிடத்தின் உயரம் a அங். உண்மையான அளவீடு c அங். ஆயிருக்கும்போது அஃ b அங்குல இரச அமுக்கத்தைக் காட்டுகின்றது. குறையான அளவீடுகளுக்கு பூரண வெற்றிடமின்மை காரணமாயின், d அங்குலத் தோற்ற அளவீட்டிற்கு ஒத்த உண்மையான அளவீடு

$$d + \frac{a(c-b)}{a+b-d}$$ என நிறுவுக.

10. ஒரு சீரான நுண் துவாரமுள்ள இரு சம புயங்கள் கொண்ட ஒரு u குழாய் அப்புயங்கள் நிலைக்குத்தாகவும் அவற்றுள் ஒன்றின் முனை அடைத்ததாகவும் இருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளது. பாரமானியின் உயரம் h ஆக, அடைத்த புயத்தில் இரச பரப்புக்குமேல் $\frac{h}{2}$ என்னும் நீளமுள்ள வெற்றிடம் இருக்குமாறு இக் குழாய் இரசத்தால் பகுதியாய் நிரப்பப்படும். அது நிலைக்குத்தோடு 60° கோணமாக்குமாறு சரிக்கப்படுமாயின் அடைத்த முனையை இரசம் அடையுமென நிறுவுக; அன்றியும் அதனைச் சரிக்க முன்னர் திறந்த முனை அடைக்கப்படுமாயின் வெற்றிட நீளம் பருமட்டாக $\frac{7h}{40}$ ஆகுமென நிறுவுக.

11. ஒரு பூரண பாரமானி, ஒரு பழுதுள்ள பாரமானி ஆகியவற்றின் வாசிப்புக்கள் இரு சந்தர்ப்பங்களில் ஒப்பிடப்பட்டு அவற்றின் வித்தியாசங்கள் x_1, x_2 அங்குலங்கள் என காணப்பட்டன; பூரண பாரமானி உயரங்கள் முறையே h_1, h_2 ஆகும். இரண்டாம் பாரமானியில் வளி இருத்தலால் வித்தியாசங்கள் ஆயின் எனக்கொண்டு பின்னை யதனில் h என்னும் வாசிப்புக்குத் திருத்தம் காண்க. சேமிப்புக் கலனின் எல்லைப்பட்ட கொள்ளளவுக்கு யாதுந் திருத்தம் வேண்டியதில்லை.

12. ஒரு பாரமான முசலம் ஓர் அடைத்த நிலைக்குத்து உருளைக்குள் உராய்வின்றி வழுக்கக் கூடும்; உருளைக்குள் முசலத்திற்கு மேலும் முசலத்திற்குக் கீழும் m என்னும் சம திணிவு வளிகள் இருக்குமிடத்து அவை இடங்கொள்ளுங் கனவளவுகள் K : 1 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளனவாயின் முசலம் சமநிலையில் இருக்கும் வெப்பநிலை மாறாதிருக்க, உருளை கவிழ்க்கப்படுமாயின் முசலம் தன் முன்னதான நிலையை மீள அடையச் செய்தற்கு முசலத்திற்குக் கீழ் உருளைக்குட் செலுத்தவேண்டிய வளித்திணிவு 2 (K - 1) m என நிறுவுக.

13. மூன்யொன்றில் மூடியுள்ள ஒரு சீர்க்குழாய் அதன் திறந்தமுனை கீழ்முகமாயிருக்க திரவத்தில் நிலைக்குத்தாக அமிழ்த்தப்படுகின்றது. குழாயின் நீளம் l ஆகும் இத் திரவம் சார்பாக பாரமானியின் உயரம் h ஆகும். குழாயின் கீழ்முனையானது பரப்பிற்குக் கீழே y ஆழத்தில் இருக்குமிடத்துத் திரவம் குழாயினுட் சென்ற தூரம் x ஆயின் $y = x + \frac{x}{l - x} h$ என நிறுவுக.

14. இரசத்தை கொண்டுள்ள சீரான குறுக்குவெட்டுடைய ஒரு u குழாய், அதன் புயங்கள் A உம், B உம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. A இனுள் ஒரு வெற்றிடம் இருக்கத்தக்கதாக A மூடப்பட்டும், B திறந்துமுள்ளன. இரு புயங்களிலுமுள்ள இரசமட்டங்களின் வித்தியாசம் 30 அங் வளிமண்டல அமுக்கத்தில் 40 அங். நீள வளிநிரல் B இல் இருக்க B இன் நுனி மூடி அடைக்கப்பட்டது. பின் A இன் நுனி திறக்கப்பட்டால், புயம் B இல் இரசமட்டம் உயரும் தூரத்தைக் காண்க.

15. l நீளமும் r ஆரையுமுடைய உருளையின் மேல், r ஆரையுடைய அரைக்கோளம் சேர்ந்து, ஓர் ஆழ்மணியை ஆக்கும் நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் h ஆயின், அரைக்கோளப் பகுதியில் மட்டுமே வளியிருப்பதற்கு ஆழ்மணியை எவ்வளவு தூரம் தாழ்த்த வேண்டுமென காண்க.

மணியின் இந்நிலையில், அதற்குள் இருக்கும் நீர் முழுவதையும் வெளியேற்ற, அதனுள் பம்பப்படவேண்டிய வளிமண்டல அமுக்கத்திலுள்ள காற்றின் கனவளவு

$$\frac{\pi r l}{6h} (3h + 2r)(3l + 2r)$$ என நிறுவுக.

16. மேலே தட்டையான விளிம்புகளால் மூடப்பட்டு, கீழே திறந்தவாறுள்ள இரண்டு உருளை வடிவான ஆழ்மணிகள், அவற்றினுடைய மூடப்பட்ட விளிம்புகள் நீர் மட்டத்திற்கு 2 அடி மேலே இருக்கத்தக்கதாக நீரில் அமிழ்த்தப்படுகின்றன. மணிகளின் உள்ளே இருக்கும் நீர் வெளியேயுள்ள மட்டத்திற்கு கீழே 4 அடி, 2 அடி மட்டங்களில் நிற்கின்றது. ஒரு சிறு குழாயினால் அவ்விரண்டு மணிகளுக்குமிடையில் தொடர்பை ஏற்படுத்திய பொழுது இரண்டிலுமுள்ள நீர் வெளியேயுள்ள மட்டத்துக்கு 3 அடி கீழே ஒரு பொதுமட்டத்தை அடைகின்றதென தரப்படுகின்றது. அவற்றினுடைய குறுக்குவெட்டு முகப்பரப்புகள் 20:21 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனவென காட்டுக. (நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் 33 அடியாகும். வெளியேயுள்ள நீர்மட்டத்தில் உண்டாகும் மாற்றத்தை புறக்கணிக்குக)

17. ஓர் ஆழ்மணியானது, a ஆரையுள்ள ஓர் அரைக்கோளத்தையும் a ஆரையையும் h உயரமுமுடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளையையும் ஒரு பொதுவட்ட அடி பொருத்தப்பட்டு அப்பொது அடியின் எதிர்ப்பக்கங்களிலே இருக்கின்றன. அவ் ஆழ் மணியானது, அதன் உட்புறத்திலே h உயரத்துக்கு நீர் எழும்பும் வரைக்கும் நீரிலே தாழ்த்தப்படுகின்றது நீர்ப் பாரமானியின் உயரம H எனின் திறந்த முனையின் ஆழம் $h\left(1 + \frac{3H}{2a}\right)$ எனக் காட்டுக.

ஆழ்மணிக்குள்ளேயுள்ள நீர் முழுவதையும் வெளியேற்றுவதற்கு வளிமண்டல அமுக்கத்தில் ஆழ்மணிக்குள்ளே பம்பிக்கப்பட வேண்டிய காற்றினது கனவளவு

$$\frac{\pi a^2 h^2}{H}\left(1 + \frac{2a}{3h}\right)\left(1 + \frac{3H}{2a}\right)$$ எனவும் காட்டுக.

18. ஒரு கண்ணாடி உருளை ஒன்றுனது h ஆழத்துக்கு நீரைக் கொண்டுள்ளது. இதன் குறுக்கு முகப்பரப்பு A ஆகும் K உயரமுள்ள வாயுச்சாடி ஒன்று இதன் திறந்தமுனை கீழ்நோக்கி இருக்கும் வண்ணம் உருளைக்குள் ஆழ்த்தப்படுகின்றது. மூனை உருளையின் அடித்தட்டில் தங்கி நிற்கும்போது இதனுள் நீரின் உயரம் y ஆகும் வாயுச்சாடியின் மூடப்பட்ட முனை திரவத்தின் மேலேயிருக்கின்றது. நீர்ப்பாரமானியின் வாசிப்பு $\frac{(h - y)(k - y)}{y(1 - c)}$ எனக் காட்டுக. வாயுச்சாடியின் கு. வெ. முகப்பரப்பு c A ஆகும்.

II மிதக்கும் உடல்கள்:-

19. S தன்னீர்ப்புள்ள சீர் செவ்வகக்குற்றி அதன் இருமுகங்கள் S_1, S_2 தன்னீர்ப்புள்ள இரு கலவாத திரவங்களினால் இடையாக இருக்கும்படி முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டு மிதக்கிறது. இங்கு $S_1 > S > S_2$ இரு திரவங்களின் பொதுப்பரப்பானது குற்றியின் நிலைக்குத்து முகங்களை என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கிறதெனக் காண்க.

20. ஒரு கப்பல் 1.025 தன்னீர்ப்புள்ள கடல் நீரிலிருந்து நன்னீரிற்குச் சென்று $2\frac{1}{2}$ cm தாழ்கின்றது 200 Kgm நிறையுடைய ஒரு மனிதன் வெளியேறுமிடத்து கப்பல் அதன் தொடக்க நேர் கோட்டிற்கு உயர்கிறது. நிறையைக் காண்க.

21. 20 gm நிறையுடைய மரத்துண்டு நீரில் அதன் கனவளவின் $\frac{2}{5}$ பகுதி அமிழ்ந்திருக்க மிதக்கிறது. அதன் தன்னீர்ப்பைக் காண்க? 0.6 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் எவ்வளவுபகுதி அமிழ்ந்திருக்கும்?

மரத்துண்டு நீரில் 0.4 பகுதி அமிழ்ந்திருக்க மிதக்கிறது. 0.8 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் என்னபகுதி அமிழ்ந்திருக்கும்?

22. 2.6 தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு சீரான கோல் அதன் ஒரு பகுதி 0.8 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்திலும் மற்ற பகுதி 13.6 தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் அமிழ்ந்திருக்க நிமிர்ந்த நிலையில் மிதக்கிறது. அதன் கனவளவின் என்ன பகுதி ஒவ்வொரு திரவத்திலும் அமிழ்ந்திருக்கும்?

23. 0.95 தன்னீர்ப்புள்ள சீரான நேர்வட்ட உருளை நீரில் முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டு அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்க மிதக்கிறது. அதன் உயரத்தில் $\frac{2}{5}$ பகுதி எண்ணெயிலும் மிஞ்சிய $\frac{3}{5}$ பகுதி எண்ணெயின் கீழுள்ள நீரிலும் உள்ளது. எண்ணெயின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

24. தன்னீர்ப்பு 7.5 உள்ள ஒரு உலோகக்குற்றி காற்றில் 150 g நிறையுடையது நீரில் 120 g நிறையுடையது. அதன் உட்புறத்தில் ஒரு பொந்து உள்ளதெனக் கொண்டு அதன் கனவளவிற்கும் முழுக்கனவளவிற்கும் உள்ள விகிதம் காண்க.

25. ஒரு மெல்லிய பொள் உருளை நீரில் h ஆழத்தில் அமிழ்ந்திருக்குமாறு நிலைக்குத்தாய் மிதந்தது. இன்னொரு திரவத்தை h_1 ஆழத்திற்கு ஊற்றுமிடத்து இவ்வாழம் h_2 இனால் அதிகரித்தது. இவ்வெறும் உருளை திரவத்தில் மிதக்கும்போது அமிழ்ந்துள்ள ஆழம் $\frac{hh_1}{h_2}$ எனக் காட்டுக.

26. பொது நீர்மானி S தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திரவத்தில் மிதக்கும்போது அதன் தண்டின் a நீளமும், S_1, தன்னீர்ப்புள்ள திரவத்தில் மிதக்கும்போது b நீளமும் திரவத்திற்கு மேலேயுள்ளது. இரு திரவங்களின் சமநிறைகளை கலந்து பெறப்படும் திரவத்தில் மிதக்கும்போது தண்டின் எவ்வளவு நீளம் நீர் மேற்பரப்புக்கு மேலேயிருக்கும்.

27. ஒரு பொருள் ஒரு திரவத்தில் அரைகுறையாக அமிழ்ந்து மிதக்கிறது. வளியின் அடர்த்தி ρ_1, ρ_2, ρ_3 ஆயிருக்கும்போது திரவ மேற்பரப்பிற்கு மேலே V_1, V_2, V_3 கனவளவுகளைக் கொண்டுள்ளது.

$$\frac{\rho_2 - \rho_3}{V_1} + \frac{\rho_3 - \rho_1}{V_2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{V_3} = 0$$ எனக் காட்டுக.

28. 2a நீளமும் $\frac{3}{4}$ தன்னீர்ப்புள்ள மெல்லிய சீர்க்கோல் முனையொன்றில் நீர் மேற்பரப்பிற்கு மேல் $\frac{a}{2}$ உயரத்திலுள்ள புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. மற்றமுனை நீரில் அமிழ்ந்துள்ளது. சமநிலை ஸ்தானத்தைக் காண்க.

29. ஒரு மெல்லிய சீர்க்கோல் அதன் நீளத்தின் பாதியானது நீர் மேற்பரப்பில் அமிழ்ந்திருக்கும்படி சாய்வாக மிதக்கின்றது. இதன் மேல்முனை ஓர் இழையினால் தாங்கப்படுகிறது. இந்த இழை நிலைக்குத்தானதெனக் காட்டி கோலின் தன்னீர்ப்பைக் காண்க.

30. சீர் தடிப்பும் அடர்த்தியுமுள்ள ஒரு செவ்வக அடர் A B C D அரைகுறையாக நீரில் அமிழ்ந்து ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் தங்கியுள்ளது. இதன் உச்சி A ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டு A இற்கு ஊடாக செல்லும் ஒரு கிடை அச்சைப்பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்தில் சுழலவல்லது. அடர் அதன் A B, A D எனும் பக்கங்கள் நீர் மேற்பரப்பினால் ஒரே விகிதம் 3:2 இல் உட்புறமாக பிரிக்கப்பட்டு சமநிலையில் தங்கியுள்ளது. அடரின் S ஐக் காண்க.

31. ஆக்கிமீடிசுவின் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

திண்மமொன்றானது தளமுகங்கள் ஒன்றோடொன்று இணைக்கப்பட்டவையான அரைக்கோளம் ஒன்றையும் செவ்வட்டக் கூம்பொன்றையும் கொண்டது. கூம்பின் உயரமும் தளமுகங்கள்

ஒவ்வொன்றின் ஆரையும் a ஆகும். கூம்பின் உச்சிக்கு இணைக்கப்பட்ட w எனும் நிறையுள்ள துணிக்கையொன்றானது திண்மத்தை திரவமொன்றில், திண்மத்தின் வட்ட ஓரம் தரவப் பரப்பிலும், துணிக்கை திரவப் பரப்பிற்கு மேலும் இருக்குமாறு மிதக்கச் செய்கின்றது. துணிக்கைக்குப் பதிலாக $\frac{w}{2}$ எனும்நிறையுடைய இன்னொரு துணிக்கையை வைக்கும் பொழுது, திண்மத்தை அதன் வட்ட ஓரம் திரவப்பரப்பிலேயே இருக்குமாறும் ஆனால் துணிக்கை திரவப்பரப்பிற்குக் கீழே இருக்குமாறும் திரும்பவும் மிதக்கச் செய்யலாம். திண்மத்தின் நிறை பூச்சியமாகுமெனக் காட்டுக.

திண்மத்தின் அச்சின் முனைகளிலே இரண்டு துணிக்கைகளை இணைத்துத் திண்மமானது அதன் அச்சு முந்திய திரவத்தின் பரப்பிலேயே இருக்குமாறு மிதக்கச் செய்யப்படுகின்றது. துணிக்கைகளின் நிறைகளைக் காண்க.

32. படிகமும் பொன்னும் கொண்ட ஒரு தங்கக்கட்டியின் நிறை, வளியிலே 13 அவுன்சாகவும், நீரிலே 9 அவுன்சாகவும் காணப்படுகிறது. படிகத்தினதும் பொன்னினதும் தன்னீர்ப்புகள் முறையே 2.6 உம் 19.5 உம் எனக்கொண்டு, அத் தங்கக்கட்டியிலுள்ள பொன்னின் நிறையைக் காண்க. (1 கன அடி நீரின் நிறை = 1000 அவு)

33. ஏகவினமான திண்ம உடலொன்று நிலைத்த, கிடையான அச்சொன்றைப்பற்றிச் சுயாதீனமாகச் சுழலக்கூடியதாயிருக்கிறது. இந்த உடலானது ஒரு தாழியிலுள்ள திரவமொன்றில் பகுதியளவு அமிழ்ந்தவாறு ஓய்விலுள்ளது. மிதப்பு வெட்டானது உடலின் மேற்பரப்பிலே குறிக்கப்பட்டுள்ள C எனும் ஒரு வளையியாகும். தாழியில் திரவம் ஊற்றப்பட்ட உடலானது அச்சினைப்பற்றிச் சுழன்றவாறு எழுகின்றது. ஆழம் கூடியதும் அச்சு மூழ்கிவிடுகிறது. உடல் சுழலும்பொழுது C எனும் அதே வளையி மறுபடியும் மிதப்பு வளையியாக அவதானிக்கப்படுகிறது. உடலின் தன்னீர்ப்பானது திரவத்தின் தன்னீர்ப்பின் அரைப்பங்கு எனக் காட்டுக.

34. ஒரு சீரான கனமொன்று நீரில் வைக்கப்பட்டதும் அதன் கனவளவின் மூன்றில் இரண்டு பகுதி நீரிலே உள்தாழ்ந்தவாறு மிதக்கிறது. இக்கனம், அதன் ஓர் ஓரம் பற்றிச் சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியதாக அவ்வோரம் நீரின் பரப்பில் நிலையாக நிறுத்தப்படுமாயின், கனத்தின் மேல் முகம் கிடையுடன் ஆக்கும் θ எனும் கோணம் $\cos^3\theta = \sin\theta$ என்பதனால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

35. ஒரு செங்கோண அரியத்தின் குறுக்குவெட்டு ABC ஆகும். இவ்வரியம் நீளவிளிம்புகள் கிடையாயும் ABC நிலைக்குத்தாகவும், A யினூடான நீளவிளிம்பு நீரின் பரப்பிலும் C யினூடான விளிம்பு நீர் மட்டத்தின் மேலுமிருக்க மிதக்கிறது. இவ்வரியத்தினது BC ஐ உள்ளடக்கும் தளமுகம் நிலைக்குத்தாயிக்குமெனக் காட்டுக $BC = 5$ cm, $CA = 4$ cm, $AB = 3$ cm ஆயின் அரியத்தின் ஆக்கப்பொருளின் த. ஈ. யைக் காண்க.

36. ஒரு பாத்திரம் 60 cm^3 நீரைக் கொண்டுள்ளது. $S(<1)$ தன்னீர்ப்புள்ள ஒரு திண்மப்பொருள் அதனைப் பாத்திரத்தின் அடிக்கு இணைக்கும் ஓர் இழையினால் நீரினுள் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இழையின் இழுவை 2.4 கிராம் நிறையாகும். 40 cm^3 அளவுள்ள வேறோர் திரவம் (த. ஈ 1.5) நீருடன் சேர்த்து கனவளவு குறைவு நிகழாவண்ணம் கலக்கப்படுகிறது. இழையின் இழுவை தற்போது 3.6 கி. நிறையாக மாறியது. $S = 0.6$ எனக் காட்டி திண்மத்தின் நிறையையும் காண்க.

37. ஒரு சீரான அரியம் முக்கோண குறுக்குவெட்டுடையது. இது ஒரு விளிம்பு திரவ மேற்பரப்பிலிருக்க சுயாதீனமாக நீரில் மிதக்கிறது. மேற்பரப்பிலுள்ள விளிம்பினது எதிர்முகம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமெனக் காட்டுக.

இவ்வரியத்தின் நிலைக்குத்து குறுக்குவெட்டு இரு சமபக்க முக்கோணி ABC ஆகும். இது A மேற்பரப்பிற்கு மேலும், B மேற்பரப்பிலும் இருக்க மிதக்கிறது. B C அமிழ்ந்துள்ளது. அரியத்தின் தன்னீர்ப்பு $2\sin^2\frac{A}{2}$ எனக்காட்டுக.

38. திரவமொன்றினுள், பகுதி அமிழ்த்தப்பட்ட பொருள் ஒன்று அதன் ஏதாவதொரு புள்ளியில் இணைக்கப்பட்ட இழையொன்றினால் தாக்கப்படுகின்றது; இப்பொருளின் சமநிலைக்குரிய நிபந்தனைகளைக் காண்க.

சீரான கோலொன்று அதன் முனைகளிலே இணைக்கப்பட்ட நிலைக்குத்து இழைகள் இரண்டினால் தொங்கவிடப்பட்டிருக்க,

அதன் அரைவாசி நீளம் நீரினுள் அமிழ்ந்துள்ளது. கோலின் தன்னீர்ப்பு (சாரடர்த்தி) 2.5 எனில் இழைகளிலுள்ள இழுவைகள் 9:7 எனும் விகிதத்திலுள்ளன எனக் காட்டுக.

39. ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

ρ_1, ρ_2 $(\rho_1 < \rho_2)$ எனும் சாரடர்த்தியுடைய கலக்கமுடியாத இரு திரவங்கள் ஒரு பாண்டத்திலுள்ளன. S என்னும் சாரடர்த்தியுடைய திண்ம செவ்வட்டவுருளையொன்று அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக அமையுமாறு அப்பாண்டத்தில் மிதக்கின்றது. உருளையின் உயரமானது திரவங்களின் உயரங்களிலும் சிறிதாயிருப்பின் உருளையானது,

i) இலேசான திரவத்தில் பகுதியான மூழ்கி மிதப்பதற்கும்

ii) இலேசான திரவத்தில் முற்றாக மூழ்கி மிதப்பதற்கும்

iii) அதன் ஒருபகுதி இலேசான திரவத்திலும் மற்றப்பகுதி பாரமான திரவத்திலும் முற்றாக மூழ்கி மிதப்பதற்கும்

iv) பாரமான திரவத்தில் முற்றாக மூழ்கி மிதப்பதற்கும்

v) பாண்டத்தின் அடியில் ஆழ்ந்திருப்பதற்கும்

S ஆனது திருப்தி செய்யவேண்டி நிபந்தனைகளைக் காண்க. மேற் குறிப்பிட்ட iii) இல் இருதிரவங்களின் பொதுப்பரப்பானது உருளையின் உயரத்தை எந்த விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது என்பதைக் காண்க.

40. தம் அச்சுக்கள் சமாந்தரமானதும், ஒரு வரியிலே ஒழுங்கு படுத்தப்பட்டதுமான, நீரிலே மிதக்கும், மூடிய பீப்பாய்த் தொடரின்மேல் குறுக்காக ஒரு பலகை வைக்கப்பட்டு, ஒரு படகுப் பாலம் அமைக்கப்பட்டுள்ளது. பலகை ஒவ்வொன்றினது நீளம் 10 அடி விட்டம் 3 அடி ஆகும். அப்பலகையின் மட்டம் நிலப் பரப்பிலிருந்து 1 அடி உயரத்திலுள்ளதெனக் காணப்படுகின்றது. அப்பலகையின் மட்டத்தின் உயரத்தை 6 அங்குலத்தினாற் குறைப்பதற்கு ஒவ்வொரு பீப்பாவினுள்ளும் அண்ணளவாக எத்தனை கலன் நீரைப் புகுத்துவீர்?

[1 கன அடி நீர் = 10 கலன்]

41. வெட்டுமுகம் சதுரமாகவுள்ள சீரான மரக்கட்டை ஒன்று ஒரு விளிம்பு நீர்மட்டத்திலுள்ளும் இன்னொரு விளிம்பு நீர்மட்டத்தின் மேலுமாகக் கிடையாக மிதக்கின்றது. மரக்கட்டையின் தன்னீர்ப்பு 0.75 எனக்காட்டுக.

42. ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டைக் கூறு.

ஒரு பெரிய தொட்டியிலுள்ள நீர்ப்பரப்பின் மேல், தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{2}$ உள்ள ஓர் எண்ணெய்ப்படை h தடிப்புக்குள்ளது. 2h உயரமும், தன்னீர்ப்பு S உம் உடைய, ஒரு சீரான செவ்வட்ட உருளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகத் தொட்டிக்குள் மிதக்கிறது.

(i) $\frac{1}{4} \leqslant S \leqslant \frac{3}{4}$ ஆயின், உருளையின் $\frac{h(4S-1)}{2}$ உயரம் நீருள் உள்ளாழ்ந்திருக்குமெனவும்,

(ii) $\frac{3}{4} \leqslant S < 1$ ஆயின், உருளையின் 2h (2S−1) உயரம் நீருள் உள்ளாழ்ந்திருக்குமெனவும் நிறுவு.

43. W நிறையும், 2a நீளமும் உடைய ஒரு மெல்லிய சீர்க்கோல் AB இன் முனை A இல், W நிறையையும் புறக்கணிக்கத் தக்க கனவளவும் உடைய ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இக் கோல் சுயாதீனமாக நிலைக்குத்துடன் எச்சாய்விலும் நீரில் மிதப்பது சாத்தியமாவதற்கு, கோலின் தன்னீர்ப்புக்கு ஒரு குறித்த பெறுமானம் உண்டு எனக்காட்டுக.

கோலின் தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{6}$ ஆகும்பொழுது, அதன் முனை B நீர் மட்டத்திலிருந்து a உயரத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்குச் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டு, சாய்ந்த நிலையில் நீரினுள் மிதப்பின், அது நிலைக்குத்துடன் 45° சாய்ந்திருக்குமென நிறுவு.

44. W நிறையுடைய ஒரு துணிக்கை, W நிறையும் தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{5}$ உம் உடைய சீரான திண்மக் கோளத்துடன், அதன் பரப்பிலுள்ள புள்ளி A இல் இணைக்கப்பட்டு, ஒரு வெற்றுப்பாண்டத்தினுள் வைக்கப்பட்டது. ஓர் இழை, ஒருமுனை பாண்டத்தின் அடியிலும் மறுமுனை கோளத்தின் பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளி B இற்கும் கட்டப்பட்டுள்ளது. A, B புள்ளிகளுடாகச் செல்லும் ஆரைகள் செங்குத்தானவை. கோளத்தின் அரைப்பகுதி அமிழ்ந்திருக்கத்தக்கதாக, பாண்டத்தினுள் மெதுவாக நீர் ஊற்றப்பட்டது. இச் சமநிலைத் தானத்தில், B இன் ஊடாகச் செல்லும் கோளத்தின் ஆரை நிலைக்குத்துக்கு $\tan^{-1}(2)$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென நிறுவு.

முழுக் கோளமும் அமிழ்ந்திருக்க, மேலும் நீர் ஊற்றப்பட்டால் B இன் ஊடாகச் செல்லும் ஆரையின், நிலைக்குத்துடன் சாய்வைக்காண்.

45. ஒவ்வொன்றும் 13 அடி நீளமும், W இரு. நிறையும் தன்னீர்ப்பு $S (> 1)$ உடைய பொருளினுலானதுமான, இரு சம சீர்க் கோல்கள் AB, AC, A இல் அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் நடுப்புள்ளிகள், 5 அடி நீளமுள்ள ஓர் இலேசான நீளா இழையினுல் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. கோல்கள் ஒரு நிலைக் குத்துத் தளத்தில், இழை இறுக்கமாகவும், முனைகள் B உம், C உம் ஒரு வெறுமையான நீர்த்தொட்டியின் அழுத்தமான அடியில் இருக்கத்தக்கதாக வைக்கப்பட்டுள்ளன. தொட்டியுள் நீர் மெதுவாக x அடி உயரத்திற்கு ஊற்றப்பட்டால், இழையின்

இழுவை, $x \leqslant 12$ ஆக, $T = \frac{5W}{12}\left(1 - \frac{x^2}{144S}\right)$ இரு நிறை

ஆல் தரப்படும் எனக் காட்டு.

46. முறையே 22½ அங், 40 அங், நீளங்களையும் ஒரே சடப்பொருளினுலாய இரு சீரான கோல்கள் AB, BC $\angle ABC = 90$, ஆக B இல் விறைப்பாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளன. இக் கோல்களின் பகுதிகள் ஒரு நீர்த்தேக்கத்தினுள் உள்ளாழ்ந்து நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருக்கச் சமநிலையில் உள்ளன. B நீரின் சுயாதீனப்பரப்பிற்கு மேல் 12 அங் உயரத்தில் இருக்கத்தக்கதாக, B இல் கட்டப்பட்ட ஒரு நிலைக்குத்து இழையினுல் தொகுதி தொங்குகிறது. AB கிடையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ சாய்வில் இருப்பின், கோல்கள் ஆக்கப்பட்ட சடப்பொருளின் தன்னீர்ப்பு $\frac{4}{3}$ என நிறுவு.

இத் தொகுதி, கோல்கள் முற்றாக நீரில் உழ்ளாள்த்தப்பட்டால், கிடையுடன் A B இன் சாய்வைக் காண்.

47. ஒரு மிதக்கும் உடலின் சமநிலைக்கு வேண்டிய நிபந்தனைகளைக் கூறு.

முக்கோணி A B C ஐ நடுக்குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பாகவுடைய ஓர் அரியம் நீரில் சுயாதீனமாக மிதக்கின்றது. A இயினூடே செல்லும் அதன் விளிம்பு நீரின் மேற்பரப்பிலும், B யினூடே செல்லும் விளிம்பு நீரிற்குள்ளும் இருக்கின்றன. B C உடைய அரியயத்தின் முகம் நிலைக்குத்தாக இருக்க வேண்டுமெனவும்,

அரியத்தின் தன்னீர்ப்பு $\frac{1}{1 + \text{தான் } B \text{ கோதன் } C}$ எனவும்நிறுவு.

48. ஓய்விலுள்ள ஒரு பாய்மரத்திலே ஒரு திண்மம் முழுமையாக அல்லது பகுதியாக அமிழ்த்தப்படும் போது திண்மத்தின் மீது பாய்மத்தின் விளையுள் உதைப்பானது திண்மம் இடம்பெயர்கின்ற பாய்மத்தின் நிறைக்குச் சமமாயும் எதிராயும் இருப்பதோடு இடம்பெயர்க்கப்பட்ட பாயத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தினூடாக உள்ள நிலைக்குத்துக் கோட்டிலே தாக்குமெனவும் காட்டுக.

ஒப்பான கப்பியொன்றின் மீது செல்லும் இழையொன்று ஒரு வாளியைத் தாங்குகிறது. வாளியின் ஒருபகுதி நீரினுல் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. கப்பி சிறிதாய் இருப்பதினுல் இழையின் மற்றைய நுனியானது வாளியின் உள்ளே கிடக்கிறது. இந்நுனியில் $S(> 2)$ எனும் தன்னீர்ப்பைக்கொண்ட ஒரு குண்டு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. குண்டானது வாளியின் அடித்தளத்தைத் தொடாமலும் நீர் வெளியேறாமலும் இருக்மெனக்கொண்டு குண்டின் நிறை

யானது w, $\frac{Sw}{S-2}$ என்பவற்றுக்கிடையிலிருப்பின் சமநிலை ஏற்

படுதல் சாத்தியமெனக் காட்டுக.

இங்கு w ஆனது [வாளியினதும் நீரினதும் நிறையாகும்.

49. பெரிய தாங்கியின் நீர்ப்பரப்பின்மீது சாரடர்த்தி $\frac{1}{3}$ ஆகவுள்ள

திரவமொன்று h தடிப்புடைய ஒரு படையை ஆக்கிறது. 2h உயரமும் s சாரடர்த்தியும் உடைய சீரான, செவ்வட்ட உருளைத் திண்மமொன்று அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறு தாங்கியினுள் மிதக்கிறது.

(i) $\frac{1}{6} < s \leqslant \frac{1}{3}$ எனின், உருளை $(6s - 1)\frac{h}{3}$ என்னும் உயரத்

திற்கு நீரில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது எனவும்.

(ii) $\frac{2}{3} < s \leqslant 1$ எனின், உருளை $(3s - 1)h$ எனும் உயரத்திற்கு

நீரில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது எனவும் காட்டுக.

50. ஒரே சிறிய குறுக்கு வெட்டுள்ள இரு சீரான மெல்லிய கோல்கள் AB, BC யின் நீளங்கள் முறையே 2a, 2b யும் த. ஈ. $s\ (>1,\ s^1 < 1)$ உம் ஆகும். இவை B யிலே ஒருமிக்க ஒப்பமாய் மூட்டப்பட்டுள்ளன. AB, முற்றாயும் BC பகுதியாயும் அமிழ்த்தப்படும் நீரின் பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியுடன் நுனி A ஒப்பமாயும் மூட்டப்பட்டுள்ளது. கோல் BC யின் நீளம் 2c அமிழ்த்தப்படுமாயின் $S = (ab + 2bc - 2c^2) / ab$ என நிறுவுக.

51. ஒரு சீரான சதுர அடர் ABCD, அதன் உச்சி A பற்றி சுயாதீனமாகத் திருப்பக்கூடியதாக திரவத்தின் மேற்பரப்பில் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலைத்தானத்தில் உச்சிகள் B, C திரவப்பரப்பிற்கு மேலேயும், D கீழேயும் இருக்கின்றது. AC கிடையுடன் அமைக்கும் கோணம் $\theta\ (<45^\circ)$ ஆயின்,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{(3 + 2t + 3t^2)\,(1 - t)}{b\,(1 + t)^2}$$ எனக் காட்டுக.

இங்கு S_1, S_2 முறையே அடரினதும், திரவத்தினதும் அடர்த்திகள் ஆகும். $t =$ தான் θ

52. σ தன்னிர்ப்பும், மையக் குறுக்கு வெட்டுப் பரப்பாக, செங்கோண முக்கோணி ($\angle B = 90^\circ$, $AB = BC$) ABC ஐ உடையதுமான ஓர் அரியம் $\rho\ (\angle \sigma)$ தன்னிர்ப்புடைய ஏகவினத் திரவத்தின் மேற்பரப்பிலுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளியில் C யினூடாகச் செல்லும் இதன் விளிம்பு, மேற்பரப்பில் கிடக்கும் வண்ணம் C யில் சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. உச்சி A திரவத்தின் மேல் இருக்கும் வண்ணம் இவ்வரியம் பகுதியாய்த் திரவத்தில் அமிழ்ந்து ஒரு நிலைக்குத்துத்தளத்தில் சமநிலையில் உள்ளது. BC திரவப்பரப்புடன் ஆக்கும் கோணம் Θ ஆனது

$$\rho\,(2 + \text{தான்}^2\theta) = \sigma\,(1 + 2\ \text{கோதா}\theta)$$

என்ற சூத்திரத்தாற் தரப்படும் என காட்டுக.

53. நீளம் l உம், திணிவு m, அடர்த்தி ρ உம் கொண்ட ஒரு மெல்லிய சீரான கோல் A B இன் முனை A அடர்த்தி $\sigma\ (> \rho)$ ஐயுடைய திரவங்கொண்ட ஒரு பாத்திரத்தின் அடியில் ஒரு புள்ளிக்கு ஒப்பமாக பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. திரவத்தின் பரப்பு Aக்கு மேலே உயரம் h இலுள்ளது. B திரவ மேற்பரப்பிற்கு மேலே உள்ளது. கோல் நிலைக்குத்து நிலையில் மாத்திரம் சமநிலையில் இருப்பதற்கு h எவ்வீச்சில் இருத்தல் வேண்டும்.

$0 < h^2 < l^2\rho/\sigma$ ஆயிருக்கையில் பிணையலின் மறுதாக்கம்

$$mg\left[\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} - 1\right]$$ எனக் காட்டுக.

54. உயரம் h ஆயும் நிறை w ஆயுமுள்ள செவ்வட்டத்திண்ம உருளையொன்று, தன்னடர்த்தியினிருமடங்கான அடர்த்தியையுடையதும் ஒரு செவ்வட்டவுருளைக்கலனில் உள்ளதுமான ஒரு திரவத்திலே தன்னச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்க மிதக்கின்றது. அக்கலனில் ஆரை அத்திண்மவுருளையின் ஆரையின் இருமடங்காயிருக்க அத்திண்மவுருளையானது தூரம் x இற் கூடாக நிலைக்குத்தாக அமுக்கப்பட்டால், 8 W/x 3h என்னும் பருமனுள்ள கீழ் நோக்கிய ஒரு நிலைக்குத்து விசையின் ஆதிக்கத்தில் அத்தானத்திலே அது சமநிலையிலே நிலைத்திருக்குமெனக் காட்டுக.

55. ஒரே தன்னிர்ப்பும், சம குறுக்குவெட்டுமுள்ள இரு சீரான மெல்லிய கோல்கள் AB, BC யின் நீளங்கள் முறையே a, b ஆகும். இவை B யில் விறைப்பாக $\angle ABC = 90^\circ$ ஆகும் வண்ணம் மூட்டப்பட்டுள்ளன. கோல்கள் நிலைக்குத்துத்தளத்தில் பகுதியாய் அமிழும் வண்ணம் நிலைக்குத்து இழையினால் B யில் கட்டப்பட்டுத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது சமநிலையில் நீரின் மேற்பரப்பிற்கு மேல் AB, BC யின் நீளங்கள் முறையே p, q ஆகும். கோலின் த. ஈ. (s) ஐக் காண்க.

$$\frac{p + q}{a + b} > \frac{p^3 - q^3}{a^2 p - b^2 q}$$ எனவும் காட்டுக.

56. (i) த. ஈ. (S_1) ஐக் கொண்ட ஒரு பொருள் த. ஈ. (S_2) ஐக் கொண்ட ஒரு திரவத்தில் மிதக்கின்றது. இதன் வளையி C ஆகும். பொருளைத் தலைகீழாக வேறு ஒரு திரவத்தில் மிதக்கவிடும்போது மிதப்பு வளையி மீண்டும் C ஆகக் காணப்படுகின்றது.

இத்திரவத்தின் த. ஈ. $\dfrac{S_1 S_2}{S_2 - S_1}$ எனக் காட்டுக.

(ii) V – வடிவுள்ள ஒருங்கிய குழாய் ஒன்றின் இரு முனைகளும் திறந்துள்ளன. இவற்றின் சிறைகள் OA, OB, $\angle AOB = 60^\circ$ ஆகுமாறு உள்ளன. இவற்றுள் ஒன்றோடொன்று சேராத சமகனவளவுள்ள இரு திரவங்கள் உள்ளன. OA நிலைக்குத்தாகப்பிடிக்கும்போது திரவங்களின் பரப்பு O ஆகும். OA நிலைக்குத்துடன் 30° பிடித்திருக்கும்போது OB யிலுள்ள திரவத்தின் கால்பங்கு OA யினுள் செல்லும் எனக் காட்டுக.

57. நிறைய நீருள்ளதும் ஒப்பமானதுமான அரைக்கோள கிண்ணமொன்று அதன் விளிம்புத்தளம் கிடையாயிருக்குமாறு நிலையாக்கப்பட்டுள்ளது. 2a நீளமுள்ள ஒரு சீரிய கோலொன்று அதன் ஒரு புள்ளி அக்கிண்ணத்தனது விளிம்பின் கண் இருக்குமாறும் ஒரு முனை அக்கிண்ணத்தின் உட்பரப்பைத் தொட்டுக்கொண்டிருக்குமாறும் சமநிலையிலிருக்கின்றது. α என்பது கிடைக்கு அக்கோலின் சாய்வாயிருக்க, r என்பது அக்கிண்ணத்தின் ஆரை எனின், அக்கோலினது தன்னீர்ப்பு

$$\frac{r^2 \cos\alpha\,(3\cos^2\alpha - 2)}{a(4r\cos^2\alpha - a\cos\alpha - 2r)}$$ ஆகுமெனக் காட்டுக.

58. மிதவையொன்று 30 அரை உச்சிக்கோணம் உடைய ஒரு நேர்வட்டக்கூம்பும், ஒரு அரைக்கோளமும் தமது (தமது சம அளவுடைய) தளமுகங்கள் ஒன்று சேர (அச்சுக்கள் ஒரே நேர்கோட்டிலமைய) பொருந்தியுளளதுமாகும். நீரில் அது மிதக்கும்போது அரைக்கோளத்தின் ஒரு பகுதி அமிழ்ந்து அது மிதக்குமேயானல் அதன் அச்சு நிலைக்குத்துடன் எசசாய்வும் உடையதாக மிதக்குமென நிறுவுக.

59. 41 தொன் நிறையுள்ள நீர்மூழ்கிக்கு 1.025 தன்னீர்ப்புடைய கடல் நீரில் முற்றிலும் கீழாந்ததாக மட்டுமட்டாய் மிதக்க முடியும்.

(அ) நீர் சேமிப்பு தொட்டிகளிலிந்து கடல் நீரை அகற்றுவதனுல் அல்லது

(ஆ) ஒவ்வொன்றும் 401 இரு. நிறையும், 10 கன அடி கனவளவுமுடைய போதிய எண்ணிக்கையையுடைய நீரிறுக்கமான வெறும் உருளை வடிவப் பாத்திரங்களை நீர்மூழ்கியுடன் இணைப்பதால் நீர்மூழ்கி தூயநீரில் ஆழ்வுறுவதைத் தவிர்ப்பதற்கு (அ) முறையிலும், (ஆ) முறையிலும் செய்யவேண்டியவற்றைக் காண்க.

60. ஓர் அழுத்தமான கப்பியின்மேல் செல்லும் ஓர் இழையில் ஒரு நுனியிலுள்ள, நீர் கொண்ட ஒரு வாளியை, மற்ற முனையில் தொங்கும் M திணிவு சமநிலைப்படுத்துகின்றது. m திணிவும், தன்னீர்ப்பு S (<1) உள்ள ஒரு தக்கைத்துண்டு முழுவதும் வாளி நீருக்குள்ளாழ்ந்திருக்குமாறு, அவ்வாளியின் அடிமையத்திற்குப் பின்னர் ஓர் இழையினுல் இணைக்கப்படுகின்றது. தக்கைக்கு இணைக்கப்பட்ட இழையின் இழுவை

$$\frac{2M\,mg}{2M+m}\left(\frac{1}{S} - 1\right)$$ என நிறுவுக.

61. ஆக்கிமிடீசின் தத்துவத்தைக் கூறி நிறுவுக.

வைரக்கல் பதித்த, பொன்னுலான மோதிரம் ஒன்று 4.00 கிராம் திணிவுடையது. நீரில் இம்மோதிரத்தின் தோற்ற நிறை $3.7_4 \times 10^{-2}$N ஆயின், வைரக்கல்லின் திணிவைக் காண்க.

0.8 சாரடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தில் இம்மோதிரத்தின் தோற்ற நிறை என்ன? வைரம், பொன் என்பவற்றின் சாரடர்த்திகள் முறையே 3.5, 19.3.

62. ஆக்கிமிடீசின் தத்துவத்தை தருக. ஒரு திரவத்தினுள்ளேயே இருக்கும் அதன் திரவப்பகுதி ஒன்றின் சமநிலையை கருத்தில் கொண்டோ அல்லது வேறு முறையிலோ மேற்கூறிய தத்துவத்தைப் பெறுக.

3 m உயரமும் 2 m விட்டமும் கொண்டதும் 5×10^3 kg திணிவுடையதுமான உருளை வடிவ ஆள்மணியொன்று அதன் கீழ் முனை 22 m ஆழத்தை அடையுமாறு நன்னீர் ஏரியொன்றினுள் இறக்கப்படுகிறது. நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் 10 m ஆயின் பின் வருவனவற்றைக் கணிக்க.

(அ) மானியின் உள்ளே நீர்மட்டத்தின் உயரம்

(ஆ) மணியைத் தாங்கியிருக்கும் சங்கிலியின் திணிவானது மணியின் திணிவோடு ஒப்பு நோக்கின் புறக்கணிக்கத்தக்கதென எடுத்து, சங்கிலியில் உள்ள இழுவை.

63. ஒரு சீரான கனமொன்று நீரில் வைக்கப்பட்டதும் அதன் கனவளவின் $\frac{39}{64}$ நீரிலே உள்தாழ்ந்தவாறு மிதக்கின்றது. இக்கனம் அதன் ஓர் ஓரத்தின் நடுப்புள்ளி பற்றி சுயாதீனமாகத் திரும்பக்கூடியதாக அப்புள்ளி நீரின் பரப்பில் நிலையாக நிறுத்தப்படுமாயின் கனத்தின் மேல்முகம் கிடையுடன் ஆக்கும் கோணம் தா$^{-1}$ $(\frac{1}{4})$ எனக் காட்டுக.

64. நீளம் a யாயும், நிறை w வாயும், தன்னீர்ப்பு S (<1) ஆயுமுள்ள ஒரு கோலுக்கு ஒரு முனையில், நிறை W வாயும் தன்னீர்ப்பு S^1 (<1) ஆயுமுள்ள ஒரு துணிக்கை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோல், நீருக்குள் ஒரு நீளம் $a\sqrt{S}$ இருக்க, நிலைக்குத்

துடன் யாதும் ஒரு சாய்வில் ஓய்வில் இருக்கக்கூடியதாய் W இன் பெறுமானம் $\frac{W(1-\sqrt{S}S^1}{(S^1-1)\sqrt{S}}$ எனக் காட்டுக.

65. தன்னுடைய பக்கங்கள் $\sqrt{3}:1$ என்னும் விகிதத்திலுள்ள ஒரு செவ்வகத்தகடு தன்னுடைய சிறுபக்கமொன்றின் மையம்பற்றிச் சுயாதீனமாய்த் திரும்பக்கூடியது. இப்புள்ளி அத்திரவத்தின் பரப்பிற்குக்கீழே நிலையானது. இத்தகடு தனது தளம் நிலைகுத்தாயிருக்கவும் ஒரு மூலைவிட்டம் அத்திரவத்தின் பரப்பில் இருக்கவும் ஓய்விலுள்ளது. அத்தட்டின் த. ஈ. க்கும் அத்திரவத்தின் த. ஈ. உள்ள விகிதம் 7:18 எனக் காட்டுக. அந்நிலையான புள்ளியின் மீதுள்ள அமுக்கம் அத்தட்டினது நிறையின் $\frac{2}{7}$ பங்கென நிறுவுக.

65A. 1.85, 0.8 எனும் சாரடர்த்திகளுடையனவும், ஒன்றுடனொன்று கலவாதனவுமான இரு திரவங்களைக் கொண்டுள்ளது ஒரு கலம், 1.5 சாரடர்த்தியுடைய உருளையொன்று அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாயிருக்க இத்திரவங்களிலே முற்றாக அமிழ்ந்தவாறு மிதக்கிறது. இரு திரவங்களினதும் பொதுப்பரப்பானது உருளையின் உயரத்தை 2:1 எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றதெனக் காட்டுக.

65B) ர்புகா 50 வெற்று உருளைகளைப் பக்கத்தில் இணைத்து. மூழ்கிய கப்பல் ஒன்று எழுப்பப்படுறது. ஒவ்வொரு உருளையின் கொள்ளளவு 3 கனமீற்றரும் நிறை 190 kg உம் ஆகும். கப்பலை எழுப்புவதற்கு இவை அந்த மட்டில் போதுமானவை ஆகவும், கடல் நீரின் தொடர்படர்த்தி 1.03 ஆகவும் இருக்கும்போது கடல் நீரில் கப்பலின் நிறை 145 000 kg எனக் காட்டுக.

65C. ஒன்றுடனொன்று கலவாதனவும் S, 2S, 3S எனும் தன்னீர்ப்புகளை உடையனவுமான மூன்று திரவங்கள் அரைவட்டக் குழாய் ஒன்றை நிரப்புகின்றன. இக்குழாயின் வரைப்புறும் விட்டம் கிடையாயுள்ளது. பொதுப்பரப்புகளுள் ஒன்றின் ஆழம் மற்றையதின் ஆழத்தின் இருமடங்காகுமெனக் காட்டுக.

போயின் விதியும், மிதத்தல் விதியும் யன் படுத்தும் கணக்குகள்

66. h நீளமுள்ளதும், மூடிய முனைகளையுடையதுமான ஒரு பொள் செவ்வட்டவுருளை π என்னும் வளிமண்டல அமுக்கத்தில் வளியைக் கொண்டுள்ளது. அவ்வுருளையானது, தன் அச்சு நிலைக்குத்தாய் இருக்கும்படி p எனும் அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தினுள் வைக்கப்படுகின்றது அது தன் நீளத்தின் அரைப்பாகம் உள்ளாழ்ந்திருக்கும் வண்ணம் மிதக்கின்றது: அப்பொழுது அதன் அடியில் ஒரு சிறுவாயில் உண்டாக்கப்படுகின்றது. உள்ளடைக்கப்பட்ட வளியின் நிறையையும் உருளையினது சுவர்களின் தடிப்பையும் புறக்கணித்து $\rho gh<2\pi$ எனின் அவ்வுருளையானது தொடர்ந்து மிதக்கும் எனக்காட்டுக. அவ்வுருளை இறங்கும் தூரம் $\left(\frac{\rho gh^2}{2\pi+\rho gh}\right)$ எனவும் காட்டுக.

67. மெல்லிய உலோகத்திலாலாய l நீளமுள்ள ஒரு மூடிய உருளை வடிவக் குவளை, அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி நீரில் மிதக்கின்றது. இதன் பிறப்பாக்கிகளின் c நீளம் அமிழ்ந்துள்ளது. இக்குவளையின் அடியில் மிகச்சிறிய துவாரம் ஆக்கப்படுகின்றது. இதனூடாக நீர் உட்புகும். ஆனால் காற்றேதும் வெளியேறாது. குவளையில் தொடக்கத்திலே வளிமண்டல அமுக்கத்தில் நிறையக் காற்றிருப்பின் குவளையில் நீர் $\frac{Cl}{C+H}$ என்னும் ஆழம் உயர்ந்ததும் குவளை சமநிலையிலிருக்குமெனவும் $H>\frac{C^2}{l-C}$ ஆக இருந்தாலொழிய குவளை அமிழுமெனவும் காட்டுக. இங்கு, H நீர்ப்பாரமானி உயரம்.

68. நீர்ப்பாரமானியின் உயரம் H இற்குச் சமானமான வளிமண்டல அமுக்கத்தில் உள்ள வளியைக் கொண்டிருக்கின்றதும் பிறப்பாக்கிகளுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள மூடிய, முனைகளையுடையதுமான மிக மெல்லிய பொள் உருளையொன்று அதன் அடிமுனையில் சிறிய துவாரமொன்றைக் கொண்டுள்ளது. நீரிலே சுயாதீனமாக மிதக்க விடப்படும்போது அது ஒரு நிமிர்ந்த நிலையினை எடுக்கின்றது. கனிசமான அளவு நீர் உடசெல்லுமுன்னர்,

அமிழ்ந்த நீளமானது hs ஆகும். இங்கு h என்பது உருளையின் நீளமாகும். நீரானது மெதுவாக உட்செல்ல, உருளையானது நிலைக்குத்தாகத் தொடர்ந்தும் மிதக்கின்றதெனவும், உள்ளேயிருக்கும் வளியாலது போயிலின் விதிக்கு அமைய நடக்குமெனவும் கொண்டு $H > Hs + hs^2$ எனில் உருளையானது முற்றாக அமிழாதெனக் காட்டுக.

69. h எனும் உயரமும் a எனும் ஆரையுமுடைய இலேசான செவ்வட்ட உருளைவடிவப் பாத்திரமொன்று அதன் வட்ட அடி கிடையாகவும் மேலாகவும் இருக்கும் வண்ணம் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அடியின் மையத்தில் பிரயோகிக்கப்படும் P எனும் நிலைக்குத்தான கீழ்நோக்கிய விசையொன்றினால், இப்பாத்திரமானது ρ எனும் அடர்த்தியுடைய திரவமொன்றினுள் செலுத்தப்படுகிறது. பாத்திரத்தின் அடியானது திரவத்தின் மேற்பரப்பிலே இருக்கும்பொழுது விசை P ஆனது

$$P = \frac{\pi a^2}{2}\rho g\left\{\sqrt{l^2+4hl}-l\right\}$$

என்பதால் தரப்படுமெனக் காட்டுக.

அதிகாரம் III

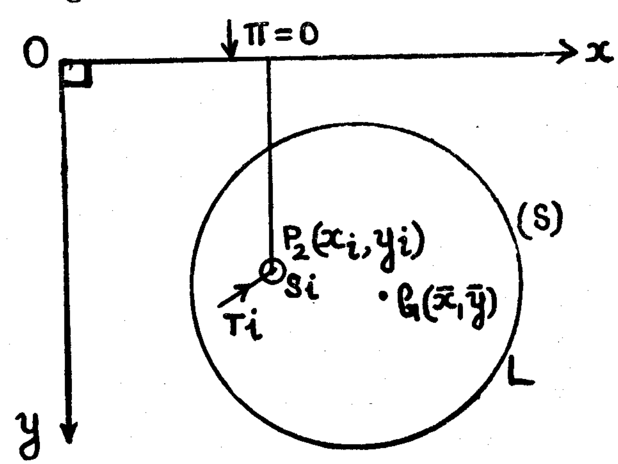
1. உதைப்பு: அமுக்கம் $p = \frac{F}{A}$ என நாம் கண்டுள்ளோம். ஆகவே $F = pA$. ஆகும். அதாவது விசை F ஆனது பரப்பளவையும் அப்புள்ளியிலுள்ள அமுக்கத்தையும் பெருக்கவருவதாகும். இனி ஒரு திரவத்தினுள் யாதுமொரு புள்ளியில் அமுக்கம் $p = h\rho g$ இங்கு h சுயாதீனப்பரப்பிலிருந்து அப்புள்ளியின் ஆழம். ஒரு திரவத்தினுள் ஒரு பொருள் ஒன்றை அமிழ்த்தி வைத்திருப்போமாயின், அதன் மேற்பரப்பில் திரவத்தின் அமுக்கம் காரணமாக உதைப்பு ஒன்று இருக்கும். இவ்வுதைப்பு அதன் மேற்பரப்பின் ஒவ்வொரு மூலகங்களிலும் தாக்கும் உதைப்பின் விளையுள் ஆகும். இதை நாம் விளையுள் உதைப்பு என அழைப்பதும் உண்டு.

ஒரு தளப்பரப்பைக்கொண்ட அடர் ஏகவினத்திரவமொன்றில் அமிழ்த்தி வைப்போமாயின், ஒவ்வொரு மூலகத்தின் மீதுள்ள உதைப்பு அம்மூலகங்களுக்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும். இதன்மீது (தாக்கம்) விளையுள் உதைப்பானது அவ்வடருக்கு செங்குத்தாகத் தாக்கும் ஒரு தனி விசையாகும். இதை நாம் T எனக் குறிப்போம்.

குறிப்பு: புவியீர்ப்பிலே, பொருளொன்றின் மீது புவியீர்ப்பு காரணமாகத்தாக்கும் விசையையும், உதைப்பு T ஐயும் ஒப்பிடு செய்துபார்க்கலாம்.

ஏகவினத்திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கும் யாதுமொரு தளப்பரப்பு மீதுள்ள விளையுளுதைப்பு (T) இதற்கான கோவை ஒன்றைப் பெறுதல்,

வகை I வளியமுக்கம் புறக்கணிக்கப்படுவதாக எடுத்துக் கொள்வோம்.



படத்தில் காட்டியவண்ணம் தள அடர் (L) ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்வோம். அடரின் தளத்தில் Ox, Oy இரு செங்குத்து அச்சுகளாகுக. மூலகம் P_i (n_i, y_i) என்போம். இதன் பரப்பளவு S_i ஆகும். ஆகவே புள்ளி P_i இல் தாக்கும் உதைப்பு T_i ஆனது $T_i = SP_{pi}$ ஆல் தரப்படும்.

இனி $P_{pi} = y_i \rho g$ ஆகும்.

ஆகவே $T_i = S_i\, y_i \rho g$ ஆகும்.

மொத்த உதைப்பு (T) $= \sum T_i$

$= \sum S_i y_i \rho g$

$= \rho g \sum S_i y_i$

$= \rho g\, S\bar{y}$ [ப. மையத்திலிருந்து]

$= (S)\,(\bar{y}\rho g)$

$= S.\, P_G$

= பரப்பு x பு.மை (G) இலுள்ள அமுக்கம்;

$= T_0$ என்போம்

(வளியமுக்கம் பூச்சியமாதலால்)

குறிப்பு: $P = mf, \quad P_{வெளி} = Mf_G$

$T_i = S_i p_i, \ T = Sp_G$

என்னும் தொடர்புகளை எடுத்து நோக்குக. இவற்றை அறிந்து கொண்டால் எளிதில் நினைவு கூறப்படலாம்

வகை II வளியமுக்கத்தைக் கவனத்துக்கு எடுத்துக்கொள்ளல்

வளிமண்டல அமுக்கம் $H\rho g$ என்போம்.

∴ $T_i = S_i (H + y_i)\rho g$ ஆகும். வகை I இலிருந்து

$T = \sum S_i (H + y_i)\rho g$

$= \rho g \sum S_i (H + y_i)$

$= \rho g\, [H \sum S_i + \sum S_i y_i]$

$= \rho g\, [HS + S\bar{y}]$

$= S(\bar{y} + H)\rho g$ என இடலாம்

= பரப்பு × P_G ஆகும்.

ஆகவே வகை I இலும் வகை II இலும் முடிவு ஒரே தன்மை கொண்டவையாகும். ஆனால் பெறுமானங்கள் ஒன்றல்ல என்பதைக் கவனித்தல் வேண்டும்.

குறிப்பு: T = பரப்பு × p_G என்பது விளையுளுதைப்பின் பருமனையே தருகின்றது. இதன் திசையை முன்னர் கூறியுள்ளோம். அடர் சாய்வாகப் பிடிக்கப்படினும் இம்முடிவு உண்மையாகும்.

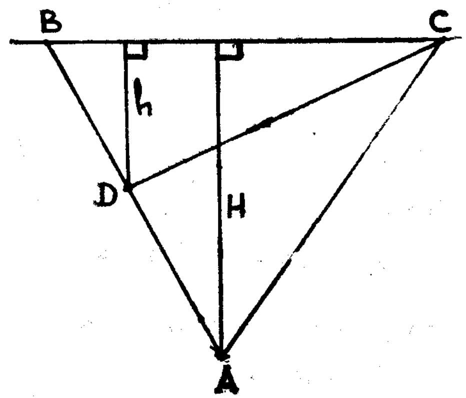
உ+ம் பாரமான ஒரு சீரான திரவமொன்றில் நிலைக்குத்தாக உள்ளாழ்த்தப்பட்ட தளப்பரப்பொன்றின் மீது தாக்கும் முழு உதைப்பானது, அப்பரப்பின் பரப்பளவினதும் அதன் மையப் போலியிலுள்ள அமுக்கத்தினதும் பெருககத்திற்குச் சமனெனக் காட்டுக.

ABC எனும் முக்கோணியொன்றின் பக்கம் BC ஆனது பாரமான ஒரு சீரான திரவமொன்றின் பரப்பிலுள்ளது. BCD, DCA எனும் பரப்புகள் மீது தாக்கும் உதைப்புகள் 1 :k எனும் விகிதத்தில் இருக்குமாறு D ஆனது AB யிலுள்ள புள்ளியொன்றாகும்.

BD : BA = $1 : \sqrt{k+1}$ எனக் காட்டுக.

(1986 Aug)

பகுதி I செய்யப்பட்டுள்ளது;



Δ BCD இல் உதைப்பு (T) எனக்கொண்டால் Δ ABC இல் உதைப்பு (1 + k) T ஆகும்.

$$T = \tfrac{1}{2} BC\, h. \frac{h}{3} \rho g$$

$$(1+K)\ T = \tfrac{1}{2} BC.\, H. \frac{H}{3} \rho g$$

$$\therefore\ 1+K = \frac{H^2}{h^2}$$

$$\therefore\ \frac{H}{h} = \sqrt{1+k}$$

அதாவது $\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{1}{1+K}}$

இனி $\frac{h}{H} = \frac{BD}{BA}$ ஆகும்

$\therefore$ BD : BA = 1 : $\sqrt{K+1}$ ஆகும்.

குறிப்பு: பு. மையத்தில் நிறைகள் கணிக்கப்படுவதுபோல் இங்கும் உதைப்புகள் கணிக்கப்படுகின்றன. $\frac{\triangle BDC\ (T)}{\triangle ADC\ (T^1)} = \frac{1}{K}$ எனத் தரப்பட்டதை $\frac{\triangle BDC\ (T)}{\triangle ABC\ (T'')} = \frac{1}{1+k}$ என எடுக்கத் தெரிதல் வேண்டும்.

இதனுல் கணித்தல் சுலபமாக அமைகிறது. இதற்குக் காரணம் $(S_1+S_2)\bar{y} = S_1\bar{y}_1 + S_2\bar{y}_2$ எனும் தொடர்பு (பு.மையத்தில்பார்க்க) இதை நாம் $(S_1+S_2)\ \bar{y}\rho g = S_1\ \bar{y}_1\rho g + S_2\bar{y}_2\rho g$ என இடலாம்.

இது $T = T_1 + T_2$ ஐ ஒத்தது ஆகும்.

விளையுள் உதைப்பு (T) இன் தாக்கக்கோடு துணிதல்:

ஒரு விசைத் தொகுதி ஒன்றின் விளையுளின் தாக்கக் கோட்டைத் துணிவதற்குப் பயன்படுத்துவது திருப்புத் திறனின் அடிப்படைத் தேற்றங்கள் ஆகும் இங்கும் நாம் திருப்புத்திறனைப் பயன்படுத்தி T இன் தாக்கக் கோட்டைக் கண்டறியலாம். T இன் தாக்கக்கோடு

அடரைச் சந்திக்கும் புள்ளி H ஆயின், H- ஐ நாம் அந்நிலையில் அடரின் அமுக்கமையம் என அழைப்போம். H இன் ஆள் கூறுகளை $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ எனக் குறிப்பது வழக்கம்.

இனி $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ இதற்கான கோவைகள் காண்போம்

வகை I ஐ நோக்குவோம்

Ox அச்சுபற்றி விளையுளின் திருப்பம். தொகுதியின் திருப்பத்திற்குச் சமமாதலால் நாம் பெறுவது

$T_0\ \bar{\bar{y}}_0 = \Sigma\ T_i y_i$ இங்கு $H \equiv H_0$ என்போம்

$= \Sigma S_i y_i^2 \rho g$ ஆகவே $H_0 \equiv (\bar{\bar{x}}_0, \bar{\bar{y}}_0)$ ஆகும்.

o என்பது வளியமுக்கம் பூச்சியம் என்பதைக் குறிக்கும்.

$$\bar{\bar{y}}_0 = \frac{\Sigma S_i y_i \rho g}{\Sigma S_i y_i \rho g}$$

$$= \frac{\Sigma S_i y_i^2}{\Sigma S_i y_i}$$ என இடலாம்.

$$= \frac{S(K^2 + \bar{y}^2)}{S\bar{y}}$$ சடத்துவத் திருப்புதிறனில் இதை அறிவீர்கள்.

$$= \bar{y} + \frac{k^2}{\bar{y}}$$ இங்கு K சுழிப்பாரை

இதிலிருந்து நாம் அறிவது $\bar{\bar{y}} > \bar{y}$ என்பதே.

வகை II ஐ நோக்குவோம். இங்கு $H \equiv (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ எனக் கொள்வோம்.

$$\bar{y} = \frac{\sum Ti\,yi}{\sum Ti}$$

$$= \frac{\sum Si\,(H + yi)\,\rho g\,yi}{\sum Si\,(H + yi)\,\rho g}$$

$$= \frac{\sum HSiyi\rho g + \sum Siyi^2\rho g}{\sum SiH\rho g + \sum Siyi\rho g}$$

$$= \frac{(SH\rho g)\,\bar{y} + T_0\,\bar{\bar{y}}_0}{SH\rho g + T_0}$$ (வகை I இலிருந்து)

இம்முடிவு

$$\bar{x} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$ ஐ ஒத்தாகும்.

ஆகவே மேலதிக உதைப்பு (SHρg) ஆனது பு. மை (G) இல் தாக்குவதாகும். இதை இவ்வாறும் கூறலாம், அதாவது ஒவ்வொரு மூலகமும் மேலதிக அமுக்கம் Hρg ஐப் பெறுவதால் இதன் விளையுள் உதைப்பு SHρg ஆனது பு. மை. G இல் தாக்கும். வகை I இல் அமுக்கமையம், பு. மையத்துடன் பொருந்தாததற்குக் காரணம் ஒவ்வொரு மூலகமும் பெறும் அமுக்கம் வேறுபடுவதேயாம்.

குறிப்பு தள அடர் திரவத்தினுள் கிடையாகப்பிடிக்கப்பட்டிருப்பின் அந்நிலையில் அமுக்கமையமும், பு. மையமும் ஒன்றாகும்.

இதை எப்போதும் உண்மை என எடுத்துக் சொள்ளல் ஆகாது. கிடை நிலையில் மட்டும் உண்மை என்பதை மனதில் வைத்துக் கொள்ளல் வேண்டும்.

நாம் உணவு உட்கொள்ளும் போது வாயினுள் உணவுப்பதார்த்தங்களை வைத்துக் கொண்டு என்ன செய்வதென்று யோசிப்பதில்லை. உணவுக்கேற்ற அசைவுகளை பல்லும் நாக்கும் யாரும் ஏவாமலே தமது இயல்புக் கடமைகளை செய்யத் தொடங்கி விடுகின்றன? இதற்குக் காரணம் உணவைப்பற்றி இவை இரண்டும் நன்கு அறிந்து கொண்டதே. இதே போல் மாணவர்கள் பரீட்சையில் ஒரு வினவுக்கு விடையளிக்கும் போது கையும், மனமும் பல்லும், நாக்கும் போல தொழிற்படுதல் அவசியம் அதாவது மனம் முக்கிய விடயங்களை ஞாபகத்திற்குக் கொண்டுவர வேண்டும். மாணவர்கள் ஒரு பகுதியைக் கற்கும் போது அதில் என்ன அடிப்படை விதி பயன்

படுத்தப்படுகிறது. மயக்கநிலை ஏதாவது உண்டா? என்பதை எல்லாம் அறிந்து அதை மறக்காது வைத்துக் கொள்ளப் பழக வேண்டும். வினவொன்றை வாசித்து விளங்கிக் கொண்டதும் அவற்றைப் பற்றி நீங்கள் கேள்விப்பட்டதையும் கடந்த காலங்களில் விட்ட பிழைகளையும் உடனே மீட்டல் செய்து கவனத்திற்குக் கொண்டு வருதல் வேண்டும். படங்களைத் தெளிவாக வைத்துக் கொண்டுதான் சமன்பாடுகளை விதிகளை ஒழுங்கமைவாகக் கொண்டு எழுதவேண்டும். சமன்பாடுகளை விடுவிப்பதற்கு அங்கு நிலவும் தொடர்புகளை உற்று நோக்கிக் கொண்டுதான் அதற்கேற்பத் தொடங்க வேண்டும். சமன்பாட்டின் அமைப்புகள் சிக்கலான வையயிகக் காணப்படின் தீர்வு கடினமாகவிருக்கும். வாழ்க்கையிலும் பிரச்சனைகள் வரும் போது அவற்றிலிருந்து விடுவிப்பதற்குப் பிரச்சினையை நன்கு விளங்கிக் கொண்டுதான தீர்க்க முற்படுகிறோம். அங்கு தீர்வு பிழையாக அமையின் அப்பிரச்சினை நன்கு படித்து விளங்கி உணரப்படவில்லை என்பதே உண்மைநிலையாகும். இதே போலத்தான் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கும் போது கவனம் செலுத்துதல் வேண்டும். அதிகமாணவர்கள் நீக்கல் முறையைக்கூடக் கையாண்டு நீக்கப்படுகிறார்கள். சமன்பாடுகளை விடுவிப்பதற்குக் கட்டாய வழிகள் இல்லை. ஆனால் அதற்கு எடுக்கும் நேரம் முக்கியமானதாகும். சுலபவழியொன்றை அறிந்து கொண்டால் அதை வேண்டிய இடங்களில் நிதானமாக உபயோகிக்கப் பழக வேண்டும். கணிதம ஒரு வித்தை என்பதை மறத்தல் ஆகாது.

மாணவர்கள் கவனத்திற்கு

வகை (2) இல் பெற்ற முடிவைக் கொண்டு இருவகையான பிரசினங்களைத் தீர்க்க முடியும்.

(1) மேலதிக அமுக்கம் Hρg ஆக இருக்கும் போது அடரின் அமுக்கமையத்தைக கணிக்கையில 2 வழிகளைக் கைக்கொள்ளலாம்.

(a) முதல் தத்துவத்திலிருந்து கணித்தல்

(b) சுயாதின மேற்பரப்பில் அமுக்கம் பூச்சிய மெனக் கொண்டு கணித்த விளையுள் உதைப்பு To ஐ அந்நிலையிலுள்ள அமுக்கமையம் Ho இல் தாக்குவதாகவும் மேலதிக உதைப்பு பு மை G இல் தாக்குவதாகவும் கொண்ட புதிய விளையுளின் தாக்கக் கோட்டைச் சமாந்தர விசைக் கொள்கையைக் கொண்டு அல்லது திருப்புத் திறனைக் கொணடு கணித்தறியலாம் இது புதிய அ. மையத்தைத் தரும்.

இவ்விரு வழிகளையும் மாணவர்கள் அறிந்து கொள்ள வேண்டும். அ. மையத்தின் ஒழுக்கு G H எனும் நேர்கோடு ஆகும்.

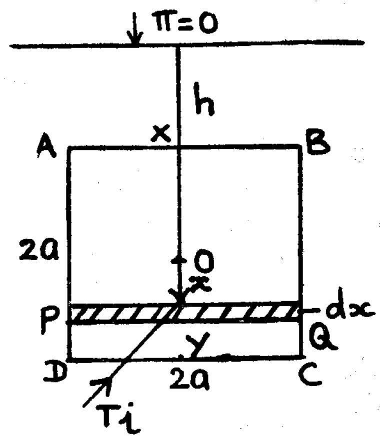
(2) சுயாதீன மேற்பரப்பில் அமுக்கம் இருந்தாலும் இருக்காவிட்டாலும் ஒரு அடரின் அமுக்கமையம் யாதுமொரு நிலைக்கு கணிக்கப்பட்டதென எடுத்துக் கொள்வோம். பின்பு அடரானது ஒரு குறித்த தூரம் h மேலும் உள்ளாழ்த்தப்பமாயின் புதிய அமுக்க மையத்தைக் கணிப்பதற்குச் சுயாதீனப் பரப்பிலிருந்து h ஆழத்தில் அடரின் தளத்தில் வரையப்படும் நேர்க்கிடைக் கோட்டைப் புதிய சுயாதீன மேற்பரப்பாகவும், அதில் மேலதிக அமுக்கம் $h\rho g$ ஆகவும் கொண்டு (1) இல் (b) இல் கூறப்பட்டவண்ணம் புதிய அமுக்க மையத்தைக் கணித்தறியலாம். இவ்வழிகளை கட்டாயம் பின்பற்ற வேண்டும் 2 ஆம் பகுதிக் கணக்குகளுக்கு.

பு. மையங்களில் சமவலுத்தொகுதியைப் பற்றி அறிந்திருப்பீர்கள். அதேபோல் இங்கும் சமவலுத்தொகுதி அமைக்கலாம் என்பதை மறந்துவிடல் ஆகாது. பு. மையமும், அ. மையமும் ஒரே தன்மை கொண்டவையா என்பதை ஆராய்க.

உ + ம் 1: பக்கம் 2a நீளமுள்ள ஒரு சதுரவடர், ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினது சுயாதீனப்பரப்பின் கீழ், சதுரத்தின் மையம் O ஆனது h (>a) என்னும் ஆழத்தில் இருக்கும்படியும், ஒரு சோடி எதிர் ஓரங்கள் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படியும் முற்றாக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. சுயாதீனப்பரப்பிலிருந்து அமுக்கமையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

O என்பதை மையமாகவும், 2b என்பதை ஒவ்வொரு பக்கத்தின் நீளமாகவுமுடைய சதுரத்துளையொன்று தன் ஓரங்கள் அவ்வடரின் ஓரங்களுக்குச் சமாந்தரமாய் இருக்கும்படி அவ்வடரிலிருந்து வெட்டப்படுகின்றது.

$h = a$ ஆயின் $\frac{b}{a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ஆகும்போது அமுக்கமையம் துளையின் கீழான ஓரத்திலிருக்குமென்று காட்டுக.



அமுக்கமையம், H விசையின் சமச்சீர் கோடு XY இல் கிடக்கும் கீலம் PQ விலுள்ள உதைப்பு T_i என்போம்.

ஆகவே $T_i = 2adx\,(h + x)\,\rho g$

$x_i = x$ (O விலிருந்து)

$$\therefore \quad OH = \bar{x} = \frac{\int_{-a}^{a} 2a\,(h+x)\,x\rho g\,dx}{\int_{-a}^{a} 2a\,(h+x)\,\rho g\,dx} \quad \text{— (1)}$$

$$\bar{x} = \frac{2a\rho g\left[h\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}}{2a\rho g\left[hx + \frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{a}}$$

$$= \frac{2a\rho g\left\{\left(\frac{ha^2}{2} + \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{ha^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right)\right\}}{2a\rho g\left\{\left(ha + \frac{a^2}{2}\right) - \left(-ha + \frac{a^2}{2}\right)\right\}}$$

$$= \frac{2a\rho g\,\frac{2}{3}a^3}{2a\rho g\,2ha}$$

$$= \frac{a^2}{3h}$$

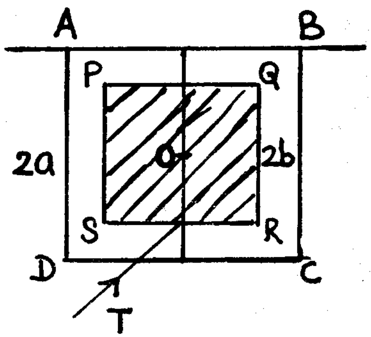
ஆகவே சுயாதீனப் பரப்பிலிருந்து அ. மை. ஆழம் $\left(h + \frac{a^2}{3h}\right)$ ஆகும். $2a\rho g$ ஐ நீக்காது வைத்திருப்போமாயின் இரண்டு விடயங்களை உய்த்தறிய முடியும்.

(1) மொத்த உதைப்பு (T) = $4a^2h\rho g$ ஆகும். இதைச் சூத்திரத்தை உபயோகித்தும் இலகுவாகப் பெறமுடியும்.

(2) O பற்றி T இன் திருப்புதிறன். இங்கு இப்பெறுமானம் $\frac{4a^4}{3}\rho g$ ஆகும். இது h ஐச் சாராதது.

வினாவொன்றின் பகுதி II இல் வரும் கேள்விகளுக்கு அமைய $\overline{\overline{x}}$ ஐச் சுருக்கி எடுத்தல் நன்று.

இவ்வுதாரணத்தில் நாம் $2a\rho g$ ஐ (1) இல் வைத்து நீக்கலாம். இதனால் கணித்தல் இலகுவாக அமைவதாக மாணவர்கள் மனதில் தோன்றும்.



அடர்	உதைப்பு (T)	அ. மை. ஆழம்	
ABCD	$4a^3\rho g$	$\frac{a}{3}$ (h = a)	— பகுதி I
PQRS	$4b^2a\rho g$	$\frac{b^2}{3a}\begin{pmatrix}h = a\\ h = b\end{pmatrix}$	— I இல்
எஞ்சிய பகுதி	$4(a^2-b^2)a\rho g$	b	— (தரவு)

$$4a^3\rho g.\frac{a}{3} = 4b^2a\rho g.\frac{b^2}{3a} + 4(a^2-b^2)\rho gab$$

$$a^4 = b^4 + 3(a^2-b^2)ab$$

$$a^4 - b^4 - 3ab(a^2-b^2) = 0$$

$$a^2 + b^2 - 3ab = 0 \quad a \neq b$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) + 1 = 0$$

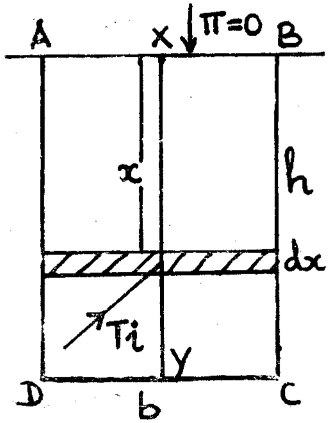
$\frac{b}{a} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$ $\frac{b}{a} <$ ஆதலால்

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ஆகும்.

மறுதலையாக $\frac{b}{a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ஆகும்போது அ. மை. துளியின் கீழான ஓரத்திலிருக்கும்.

உ+ம் 2: ஒரு செவ்வகத்தள அடர், ஓர் ஓரம் ஒரு திரவத்தின் பரப்பிலிருக்குமாறு நிலைக்குத்தாகப் பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்வடரைத், தாக்கும் விளையுளுதைப்புக்கும், அதன் அமுக்கமையத்தின் தானத்திற்கும் கோவைகள் பெறுக.

ஒரு செவ்வக வெட்டுடைய, மூடிய பொள் குழாயொன்று தவிர்க்கத்தக்க தடிப்புள்ள சுவர்களைக்கொண்டுள்ளது. அது, தன் நீளம் கிடையாகவும், தன் மேல்முகம் நீரின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமாகவும் இருக்குமாறு அப்பரப்பிலிருந்து அம்மேல் முகம் நீரின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமாகவும் இருக்குமாறு அப்பரப்பிலிருந்து அம்மேல்முகம் ஆழம் d ஆலே கீழாத்தப்பட்டுள்ளது. அதன் முனை வெட்டினது சிடையானதும் நிலைக்குத்துமான ஓரங்களின் நீளங்கள் முறையே b, h ஆகும். முனை மூடிகளின் மீது விளையுளுதைப்பு யாதுமில்லை என்று உறுதியாக்குவதற்கு, அக்குழாயினுள் இருக்கும் காற்றின் அமுக்கத்தை எப்பெறுமானத்துக்கு ஏற்ற வேண்டும்? இவ்வகையில் ஒவ்வொரு முனை மூடியிலுமுள்ள விளையுள் முறுக்குத்திறனை கணிக்குக.



அ. மை. H XY இல் கிடக்கும்.

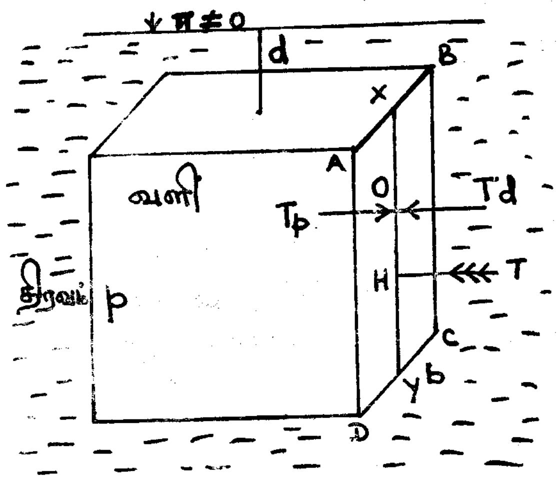
$Ti = bdx \; x\rho g$

$x_i = x$ { AB யிலிருந்து }

$$XH = \bar{x} = \frac{\int_0^h bx^2 \rho g dx}{\int_0^h bx\rho g dx}$$

$$= \frac{b\rho g \frac{h^3}{3}}{b\rho g \frac{h^3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3} h$$



அடைக்கப்பட்ட வளியின் அமுக்கம் p என்போம். இவ்வமுக்கம் ABCD இன் எல்லா மூலகங்களுக்கும் சமமாதலால் விளையுள் உதைப்பு Tp பு. மை. O வில் தாக்கும்.

திரவத்துடன் தொடுகையில் இருக்கும் முகம் ABCD ஐ எடுத்துக்கொண்டால், AB சுயாதீனப் பரப்பில் இருக்குமாயின் உதைப்பு T, H இல் தாக்கும். ஆனால் இங்கு AB, d ஆழத்தில் இருப்பதால் மேலதிக அமுக்கம் $d\rho g$ ஆல் ஏற்படும் உதைப்பு Td, பு. மை. O வில் தாக்கும். புதிய அ. மையம் T, Td இனது விளையுளின் தாக்கப் புள்ளி ஆகும். இங்கு இப்புள்ளியின் நிலையைக் கணிக்கவேண்டியதில்லை.

மூடியில் விளையுள் உதைப்பு பூச்சியமாயின்

$Tp = Td + T$ —— (1) ஆகும்.

$$bhp = bhd\rho g + bh. \frac{h}{2} \rho g$$

$$\therefore p = \left(d + \frac{h}{2}\right)\rho g \quad \text{——(2)}$$

அதாவது காற்றின் அமுக்கம் $\left(d + \frac{h}{2}\right)\rho g$ இற்கு ஏற்றவேண்டும்;

O பற்றிய திருப்பம் $T.OH = bh\frac{h}{2}\rho g.\frac{h}{6}$

$$= \frac{bh^3}{12}\rho g$$

$$\neq 0$$

∴ இவ்விசைகள் 3 உம் இணை இற்கு ஒடுங்கும் இவ்விணையின் திருப்பம் மூடியிலுள்ள விளையுள் முறுக்குத்திறன் எனக் கூறுவோம்.

∴ முறுக்குத்திறன் $= \frac{1}{12} bh^3\rho g$ அலகு ஆகும். குழாய் செவ்வக வெட்டுடையதாக இருப்பதால் ஒவ்வொரு மூடியிலும் முறுக்குத்திறன் ஒரே அளவுடையதாகும்.

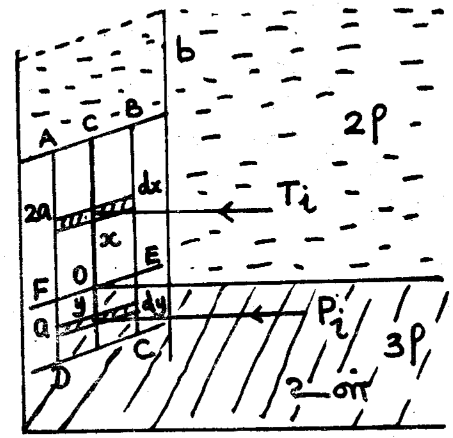
குறிப்பு: பகுதி I இல் அடரின் நீள, அகலம் தரப்படாது இருப்பதால் நாம் பகுதி II இற்கு இசைவாக எடுத்துக்கொள்வது மிகச் சிறந்தது ஆகும். இதை இவ்வகையான வினாக்களில் உபயோகிக்கத் தவறக்கூடாது.

குழாய்க்குள் வளியிற்குப்பதிலாக திரவம் இருக்குமாயின் இத்திரவத்தினால் ஏற்படும் உதைப்பு H இல் வெளிநோக்கித்தாக்கும். இதற்குக் காரணம் இத்திரவத்திற்கு சுயாதீன மேற்பரப்பு AB ஆகவிருப்பதாகும் இவற்றை உதாரணம் (4) இல் அவதானிக்கலாம்.

உ+ம் 3: தடாகமொன்றிற்கு 3a எனும் உயரமுள்ள ஒரு நிலைக்குத்தான செவ்வக வாசலுண்டு. இவ்வாசலுடன் மட்டுமட்டாகப் பொருந்தக்கூடிய கதவொன்றிற்கு ஒரு நிலைத்த கிடையச்சுப்பற்றி சுழலச் சுயாதீனமுண்டு இந்த அச்சானது வாசலின் கீழ்க்கிடையோரத்திலிருந்து a என்னும் உயரத்திலிருக்கிறது. கதவை நிலைக்குத்து நிலையில் பிடித்தவண்ணம், நிலைத்த அச்சின் மட்டம்வரை 3ρ எனும் அடர்த்தியுள்ள திரவமொன்றை தடாகத்துள் ஊற்றிவிட்டு, பின் அச்சிலிருந்து $(2a+b)$ எனும் உயரம் வரை 2ρ எனும் அடர்த்தியுள்ள வேறொரு திரவம் ஊற்றி வைக்கப்படுகின்றது. கதவை இப்பொழுது பிடியாது விட்டுவிட்டால்

$$9b \gtrless a$$

என்பதற்கேற்ப கதவின் கீழ்ப்பகுதி முறையே உள்ளே அல்லது வெளியே நகர்ந்து கதவு திறபடும் எனக் காட்டுக.
$9b = a$ ஆயின் நிகழ்வது என்ன?



படத்தில் காட்டியவண்ணம் O வினூடாக கிடை அச்சுபற்றிக் கதவு சுழலும் என்போம். கதவு ABCD இன் அ. மையம் H அச்சுக்கு மேலிருப்பின் கதவின் கீழ்ப்பகுதி உள்ளே நகரும். கீழேயிருப்பின் வெளியே நகரும். இனி நாம் கதவை இரு செவ்வகமாகக் கருதுவோம். ABEF இல் உதைப்பு T எனவும் தாக்கப்புள்ளி O விற்கு மேல் $\bar{x}$ எனும் தூரத்தில் இருக்கும் எனவும் கொள்வோம். CDFE

இல் உதைப்பு P எனவும், தாக்கப்புள்ளி O விற்குக் கீழ் $\overline{\overline{y}}$ எனும் தூரத்தில் இருக்கும் எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம். அ. மையம் H O விற்குமேல் $\overline{\overline{z}}$ இலுள்ளது ஆயின் நாம் பெறுவது

$$O \nwarrow \quad (P+T)\,\overline{\overline{z}} = T\overline{\overline{x}} - P\overline{\overline{y}}$$

$$\therefore \overline{\overline{z}} = \frac{T\overline{\overline{x}} - P\overline{\overline{y}}}{P+T} \text{ ஆகும்.}$$

$\overline{\overline{z}} \gtrless 0$ என்பதற்கேற்ப கதவு மேலே கூறப்பட்டவண்ணம் திறபடும்.

அதாவது $T\overline{\overline{x}} \gtrless P\overline{\overline{y}}$ ஏற்ப நிகழும்.

$$\text{இனி } T\overline{\overline{x}} = \int_0^{2a} C\,(2a+b-x)\,x 2\rho g\,dx \quad C\text{ அகலம்}$$

$$= 2C\rho g\left[(2a+b)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{2a}$$

$$= 2C\rho g\left[(2a+b)\,2a^2 - \frac{8a^3}{3}\right] \quad \text{— (1) ஆகும்.}$$

$$P\overline{\overline{y}} = \int_0^{a} C\,[(2a+b)\,2\rho g + y 3\rho g]\,y\,dy$$

$$= C\rho g\left[(2a+b)y^2 + y^3\right]_0^a$$

$$= C\rho g\left[(2a+b)\,a^2 + a^3\right] \quad \text{— (2) ஆகும்.}$$

$T\overline{\overline{x}} \gtrless p\overline{\overline{y}}$ ஆயிருத்தற்கு

$$2C\rho g\left[\frac{4}{3}a^3 + 2a^2b\right] \gtrless C\rho g\left[3a^3 + a^2b\right] \text{ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.}$$

$$2\left(\frac{4}{3}a + 2b\right) \gtrless (3a+b)$$

$$3b \gtrless \frac{a}{3}$$

அதாவது $9b \gtrless a$ என்பதற்கேற்பக் கதவு உள்ளே அல்லது வெளியே திறபடும். $9b = a$ கதவு திறபடமாட்டாது.

$\overline{\overline{z}} = 0$ ஆகும்.

குறிப்பு: இவ்வகையான வினக்களை மாணவர்கள் பரீட்சையில் குளப்பி யடித்துவிடுவார்கள்; $\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}$ கணிக்க வேண்டியதில்லை; இங்கு நிலையியல் முக்கிய பங்கு வகிக்கிறது. இதை மாண வர்கள் இப்பாடத்தின் தலையங்கத்தைக்கொண்டு அவதா னிக்கலாம். மாணவர்கள். சிந்திக்கும் ஒழுங்கு முறையைக் கொண்டுதான் கணக்கு செய்யக்கூடியதாக அமையும்; இதைத்தான் மாணவர்கள் ஆசிரியனிடம் கற்றுக்கொள்ள வேண்டியது. படங்கள் வரைவதற்கு திண்மக்கேத்திரகணி தம் படித்தல் அவசியம். அப்போதுதான் பக்கப்பார்வை, நேர்ப்பார்வையில் படங்கள் வரையமுடியும். இங்கு கதவு பக்கப்பார்வையில் வரையப்பட்டுள்ளது. அப்போததான் விசையைக் காட்டமுடியும். படம் வரைவது கணக்குச் செய்வதற்கு ஊண்டுகோல் தவிர வடிவுக்கு அல்ல. நிறங்கள் கொண்டுவரைதல் ஆகச்சிறந்தது ஆகும்.

உ+ம் 4: a எனும் பக்கமுடைய சதுரமொன்று அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் ஒரு பக்கம் சுயாதீன மேற்பரப்பிலும் அமையுமாறு திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இச்சதுரத்தின் அமுக்க மையத்தினைக் காண்க?

a எனும் ஓரமுடைய கனவடிவமான நீர்த்தொட்டியொன்றிற்கு, a எனும் பக்கமுடைய ஒரு சதுரமூடி ABCD உண்டு. அம்மூடியானது, பக்கம் AB வழியே சுயாதீனமாய்ப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. தொட்டியானது ρ_0 எனும் அடர்த்திகொண்ட திரவத்தினால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. அம்மூடியானது மூடப்பட்டு, CD யின் நடுப்புள்ளியான E யிலே தாக்கும் விசையொன்றினால் இறுக்கப்பட்டுள்ளது. ABCD நிலைக்குத்தாகவும், AB கிடையாகவும் மேலாகவும் இருக்கத் தொட்டியானது $\rho\,(<\rho_0)$ எனும் அடர்த்தியுடைய திரவமொன்றினுள் தாழ்த்தப்படுகிறது. இப்பொழுது E இலுள்ள விசையானது விலக்கப்படுகிறது. சுயாதீன மேற்பரப்பிலிருந்து AB யின் ஆழம் h ஆயிருக்க $h > \frac{2}{3}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)a$ எனின் மூடியானது அடைக்கப்பட்ட நிலையிலே தொடர்ந்திருக்குமெனக் காட்டுக,

1) உ + ம் 2 ஐ பார்க்க விடை $\overline{\overline{x}} = \frac{2}{3}a$

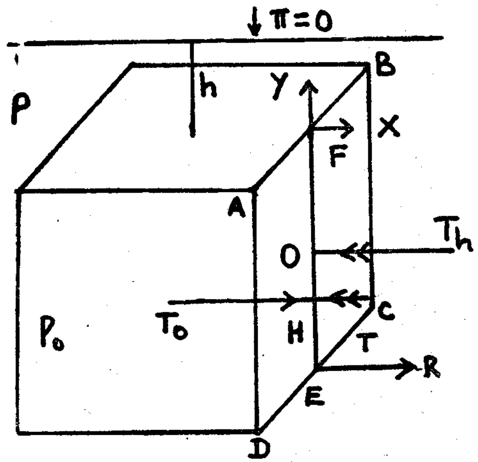
$$T_0 = a^2 \frac{a}{2} \rho_0 g$$

$$T = a^2 \frac{a}{2} \rho g$$

$$T_h = a^2 h \rho g$$

$$FH = \frac{2}{3} a$$

$$FO = \frac{a}{2}$$



தொட்டியின் உட்பக்கத்தை எடுத்துக்கொண்டால் AB சுயாதீன மேற்பரப்பு ஆகும். ஆகவே ρ_0 அடர்த்தியுடைய திரவத்தால் ஏற்படும் உதைப்பு T_0, H இல் தாக்கும். இது தளத்திற்குச் செங்குத்தாகும். மூடியின் வெளிப்புறத்தை எடுத்துக்கொண்டால் உதைப்பை T, Th என இரண்டு விசைகாகக் கொடுக்கலாம். [இதன் விளக்கத்தை உ + ம 2 இல் பார்க்க)

மூடியில் தாக்கும் விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால் F இல் திருப்பம் எடுத்து மறுதாக்கம் R ஐக் கணித்தறியலாம். R>O ஆயின் மூடியானது அடைக்கப்பட்ட நிலையில் இருக்கும்

$$F \nearrow \quad Ra + T_0 \frac{2}{3} a - T \frac{2}{3} a - T_h \frac{a}{2} = 0$$

$$\therefore R = \frac{2}{3}\left(T - T_0\right) + \frac{1}{2} T_h \quad —(1)$$

R>O ஆயிருத்தற்கு

$$T_h > \frac{4}{3}\left(T_0 - T\right) \text{ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.}$$

$$a^2 h \rho g > \frac{4}{3}\left(\frac{a^3}{2}\rho_0 g - \frac{a^3 \rho g}{2}\right)$$

$$\rho h > \frac{2}{3}\left(\rho_0 - \rho\right) a$$

$$\therefore h > \frac{2}{3}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right) a \text{ எனின் } R > 0 \text{ ஆயிருக்கும்.}$$

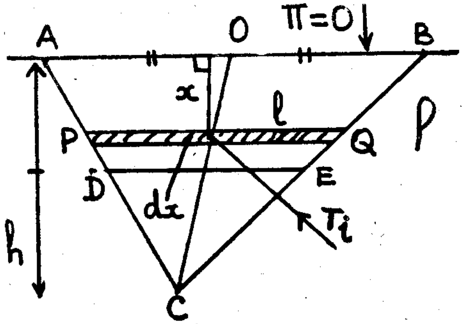
அதாவது மூடி மூடிய நிலையில் இருக்கும்.

குறிப்பு: உ + ம் (2) இல் கேட்கப்பட்டதை (4) இலும், (4) இல் கேட்கப்பட்டதை (2) இலும் கேட்கலாம்

உ + ம்: 1 தொடக்கம் 4 வரை முதல் பகுதி செவ்வகமாக இருந்தாலும் இரண்டாம் பகுதியின் வேறுபாட்டை அவதானிக்க வேண்டும். அடர் முக்கோணமாகவிருந்தாலும் கொள்கையில் வேறுபாடு இருக்கமாட்டா. வருங்காலங்களில் செவ்வக மூடியை முக்கோண மூடியாகவோ அல்லது வட்ட மூடியாக மாற்றிக் கேள்விகளை அமைக்கலாம். ஆகவே மாணவர்கள் அடிப்படையை விளங்கிவைத்துக் கொண்டால் கேள்வி எப்படி அமைத்தாலும் விடையைச் சுலபமாக எடுக்கலாம்.

உ+ம்: 5 முக்கோண அடரொன்று, அதன் ஒரு பக்கம் மேற்பரப்பில் அமையுமாறு பாரமானதும் ஏகவினமானதுமான ஒரு திரவத்தினுள் நிலைக்குத்தாக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. மேற்பரப்பிலுள்ள அமுக்கம் பூச்சியமெனக்கொண்டு அந்த அடரின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.

அமுக்க மையத்தினூடாக அடரின் தளத்தின் மீது கிடையாகச் செல்லும் நேர்கோடானது அடரை இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கிறது. இப்பகுதிகளிலே தாக்கும் உதைப்புக்கள் சமனானவை எனக் காட்டுக.



AB = C என்க. △ CAB, △ CPQ வடிவொத்த முக்கோணங்கள்

ஆகவே $\frac{l}{C} = \frac{h-x}{h}$ — (1)

$T_i = (l dx)(x\rho g)$

$x_i = x$ {AB யிலிருந்து}

அ. மையம் H விசையின் சமச்சீர் கோடு OC இல் இருக்கும். இங்கு OC இடையம் ஆகும்.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\int_0^h \frac{C}{h}(h-x)\, x^2 \rho g dx}{\int_0^h \frac{C}{h}(h-x)\, x \rho g dx}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\frac{C}{h}\rho g\left[h\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^h}{\frac{C}{h}\rho g\left[h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h}$$

$$= \frac{\frac{C}{h}\rho g\,\frac{h^4}{12}}{\frac{C}{h}\rho g\,\frac{h^3}{6}} \quad \text{— (1)}$$

$$\therefore \bar{\bar{x}} = \frac{h}{2}$$

அடரில் தாக்கும் மொத்த உதைப்பு T ஆயின் $T = \frac{Ch^2}{6}\rho g$ ஆகும்.

[(1) இன் பகுதியாகும்]

சரிவகம் ABED ஐ எடுத்துக்கொண்டால் அதில் தாக்கும் உதைப்பு

$$T_1 = \int_0^{h/2} \frac{C}{h}(h-x)\, x\rho g dx$$

$$= \frac{C}{h}\rho g\left[h\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{h/2}$$

$$= \frac{C}{h}\rho g\left[\frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24}\right]$$

$$= \frac{Ch^2}{12}\rho g = T/2 \text{ ஆகும்.}$$

∴ முக்கோணம் CDE இல் தாக்கும் உதைப்பு

$$T_2 = T - T_1 = \frac{T}{2} \text{ ஆகும்.}$$

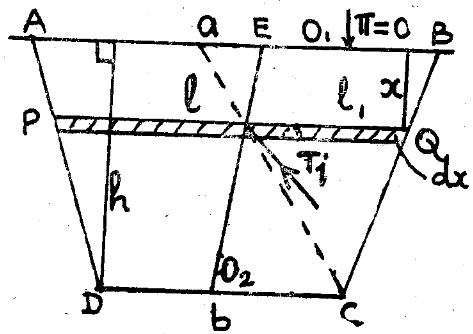
$\therefore T_1 = T_2$ ஆகும்.

குறிப்பு: இவ்வினு இருமுறை கேட்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டாம் பகுதி முதலாம் பகுதியிலிருந்து சுலபமாகப் பெறமுடியும். இதை மாணவர்கள் அவதானிப்பதில்லை. கேள்வியை நன்ருக விளங்கிவைத்துக்கொண்டுதான் முதலாம் பகுதியை இரண்டாம் பகுதிக்கு அமைவாக எடுத்துக்கொள்ளல் வேண்டும். சரிவகம் ABED இன் அமுக்கமையத்தை கணித்துப் பார்க்கலாம்.

உ+ம் 6: திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்ட ஒரு தளப்பரப்பின் அமுக்கமையத்தை வரையறுக்க.

சரிவகமொன்றின் இரு சமாந்தரப் பக்கங்களினதும் நீளங்கள் a யும் b யும் ஆகும். அவற்றினிடைத்தூரம் h ஆகும். சரிவகம் அதன் தளம் நிலைக்குத்தாகவிருக்குமாறு, நீளம் a யுடைய பக்கம் மேற்பரப்பின் மீதிருக்குமாறும் நீரில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. சரிவகத்தின் அமுக்கமையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

தளப்பரப்பானது திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கையில் திரவத்தின் அமுக்கம் காரணமாக தளப்பரப்பில் உதைப்பு ஒன்று இருக்கும். இவ்வுதைப்பு T ஆயின், T இன் தாக்கக்கோடு தளப்பரப்பைச் சந்திக்கும் புள்ளி H என்பது அந்நிலையில் தளப்பரப்பின் அமுக்கமையம் என வரையறுப்போம்.



C யினூடாக DA யிற்கு வரையும் சமாந்தரம் AB ஐ E இல் சந்திப்பதாகுக. உ+ம் 5 ஐப் பின்பற்றி l ஐக் கணித்தறியலாம்.

$l = b + l_1$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{l_1}{a-b} = \frac{h-x}{h} \text{ ஆகும்.} \quad (a > b)$$

$$\therefore\ l = b + \frac{(a-b)(h-x)}{h} = \frac{ah - x(a-b)}{h}$$

AB இன் நடுப்புள்ளி O_1 எனவும் CD இன் நடுப்புள்ளி O_2 எனவும் எடுத்துக்கொண்டால் அ. மையம் H, O_1O_2 இல் கிடக்கும்.

$$T_i = \left[\frac{ah - x(a-b)}{h}\right] dx\, x\rho g$$

$x_i = x$ {AB யிலிருந்து}

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \frac{\rho g}{h}\left[ahx^2 - (a-b)x^3\right]dx}{\int_0^h \frac{\rho g}{h}\left[ahx - (a-b)x^2\right]dx}$$

$$= \frac{ah\frac{h^3}{3} - (a-b)\frac{h^4}{4}}{ah\frac{h^2}{2} - (a-b)\frac{h^3}{3}}$$

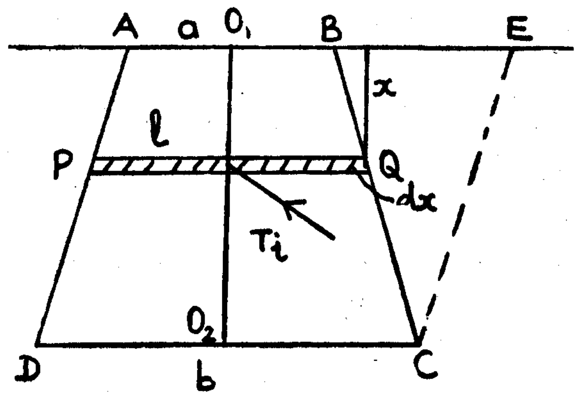
$\left|\ \int_0^h x^n dx = \frac{h^{n+1}}{n+1}\right.$ என இடப்பழகுதல் வேண்டும் $\left.\right|$

$$= \frac{\frac{ah}{3} - \frac{h}{4}(a-b)}{\frac{a}{2} - \frac{(a-b)}{3}}$$

$$= \frac{\frac{a}{3} - \frac{1}{4}(a-b)}{\frac{a}{2} - \frac{1}{3}(a-b)}\, h$$

$$\bar{x} = \left(\frac{a+3b}{a+2b}\right)\frac{h}{2}$$

வகை II $a<b$



இங்கு $l = b - l_1$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{l_1}{b-a} = \frac{h-x}{h} \quad \text{ஆகும்.}$$

$$\therefore\ l = b - \frac{(b-a)(h-x)}{h}$$

$$= b + \frac{(a-b)(h-x)}{h}$$

$$= \frac{ah - x(a-b)}{h} \quad \text{—(ii)}$$

இவ்வடிவம் வகை I ஐ ஒத்தது

$$\therefore\ \bar{\bar{x}} = \left(\frac{a+3b}{a+2b}\right)\frac{h}{2} \quad \text{ஆகும்}$$

குறிப்பு: மாணவர்கள் $a \lessgtr b$ஐ ஆராய்தல் வேண்டும். விடை இரண்டிற்கும் ஒன்று என்பதைக்காட்டுதல் வேண்டும். விடையில் $a \lessgtr b$ முக்

கிய பங்கு வகிக்கவில்லை. இதிலிருந்து உள்ளுணர்வாக அறிந்துகொள்ளுதல் வேண்டும். விடை இரண்டிற்கும் ஒன்று என்பதே. மேலும் படங்களை வைத்துக்கொண்டு விடையை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

$a = 0$ என இடப்பெறுவது

$$\bar{\bar{x}} = \frac{3h}{4} = \frac{2+1}{3+1}h$$ இது உச்சி மேற்பரப்பில் இருக்கும்வண்ணம் பிடிக்கப்பட்ட முக்கோண அடரின் அ. மையமாகும்; $b = 0$ ஆக

$$\bar{\bar{x}} = \frac{h}{2}$$ ஆகும். இது ஒருபக்கம் மேற்பரப்பில் இருக்கும் வண்ணம் பிடிக்கப்பட்ட முக்கோண அடரின் அ. மையமாகும்;

$$\bar{\bar{x}} = \left(\frac{1+1}{3+1}\right)h$$ கவனித்தல் வேண்டும். செவ்வகம், முக்கோணம் ஆகியவற்றின் அமையம் H இன் ஆழம் பின்வருமாறு மனதில் படிய வைக்கலாம் இதை ஒவ்வொரு மாணவர்களும் அறிந்து கொள்ளுதல் வேண்டும்

செவ்வகம் $\quad \bar{x} = \frac{h}{2}, \quad \bar{\bar{x}} = \left(\frac{1+1}{2+1}\right)h$

$$= \frac{2}{3}h$$

முக்கோணம் (1) உச்சி மேற்பரப்பில் இருக்கையில்

$$\bar{x} = \frac{2}{3}h, \quad \bar{\bar{x}} = \left(\frac{2+1}{3+1}\right)h$$

$$= \frac{3}{4}h$$

(2) பக்கம் மேற்பரப்பில் இருக்கையில்

$$\bar{x} = \frac{1}{3}h, \quad \bar{\bar{x}} = \left(\frac{1+1}{3+1}\right)h$$

$$= \frac{h}{2}$$

இங்கு $\overline{x}$, பு. மைய ஆழம் ஆகும்

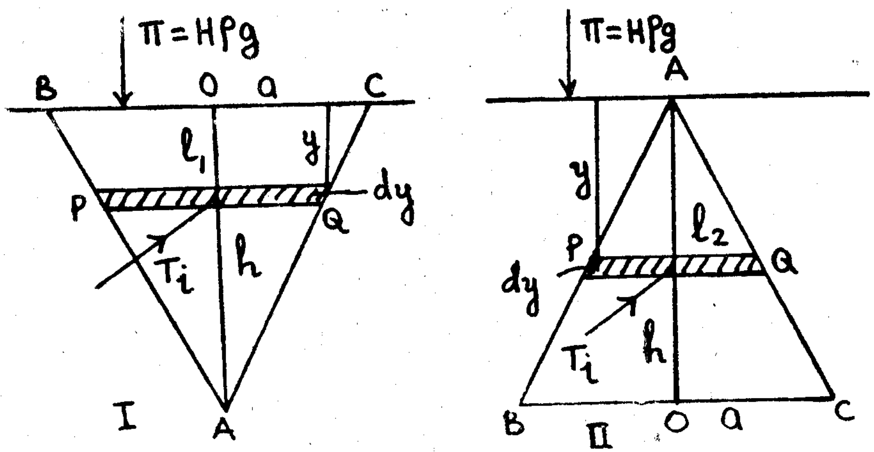
சரிவகத்திற்கு முக்கோணி ஒன்றிலிருந்து முக்கோணி ஒன்றை அகற்றுவதன் மூலம் அ. மையத்தைக் கணித்தறியலாம் இதை மாணவர்கள் செய்து விடை எடுத்துக் கொள்வது வேறு வினாக்களுக்கு உதவியாகவிருக்கும்

உ+ம்: 7, AB = AC ஆகுமாறு தளஅடர் ABC யில் BC யிலிருந்து A யினது தூரம் h ஆகும் BC கிடையாக இருக்க நிலைக்குத்தாக இவ்வடர் முழுமையாக அமிழ்த்தப்படுகின்றது வளி அமுக்கம் H உயரமுடைய திரவநிரலுக்குச் சமமாகும்

1) BC திரவமட்டத்திலிருக்கும் போதும்

2) A திரவ மட்டத்திலிருக்கும் போதும் அடரின் அ. மையத்தினது ஆழத்தைக் காண்க.

2 H = h ஆயின் இவ்விரு நிலைகளிலும் அ. மைய ஆழங்களின் விகிதம் 14 : 25 எனக்காட்டுக



படம் I இல் $\frac{l_1}{a} = \frac{h-y}{h}$ BC = a என்போம்;

$$\therefore\ l_1 = \frac{a}{h}\,(h-y)$$

$$T_i = l_1\,dy\,(H+y)\,\rho g$$

$$Y_i = y$$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{\int_0^h \frac{a}{h}\rho g\,(h-y)\,(H+y)\,y\,dy}{\int_0^h \frac{a}{h}\rho g\,(h-y)\,(H+y)\,dy}$$

$$= \frac{\int_0^h \left[hHy - Hy^2 + hy^2 - y^3\right] dy}{\int_0^h \left[hH - Hy + hy - y^2\right] dy}$$

$$= \frac{hH\frac{h^2}{2} - H\frac{h^3}{3} + h\frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4}}{hHh - H\frac{h^2}{2} + h\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{hH}{2} - \frac{Hh}{3} + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{4}}{H - \frac{H}{2} + \frac{h}{2} - \frac{h}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}Hh + \frac{1}{12}h^2}{\frac{H}{2} + \frac{h}{6}}$$

$$\therefore \bar{\bar{y}} = \frac{(2H+h)\,h}{2\,(3H+h)}$$

படம் II இல் $\frac{l_2}{a} = \frac{y}{h}$

$$\therefore l_2 = \frac{a}{h}\,y$$

$$T_i = l_2\,dy\,(H+y)\,\rho g$$

$$Y_i = y$$

$$\therefore \bar{\bar{y}} = \frac{\int_0^h \frac{a}{h}\,\rho g\,(Hy^2 + y^3)\,dy}{\int_0^h \frac{a}{h}\,\rho g\,(Hy + y^2)\,dy}$$

$$= \frac{H\frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4}}{H\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3}}$$

$$= \frac{\frac{Hh}{3} + \frac{h^2}{4}}{\frac{H}{2} + \frac{h}{3}}$$

$$= \frac{(4H+3h)\,h}{2\,(3H+2h)}$$

$2H = h$ ஆயின் நிலை (I) இல் $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{y}}_1 = \frac{4H.2H}{2(5H)}$

$$= \frac{4}{5}H$$

நிலை (II) இல் $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{y}}_2 = \frac{10H.2H}{2.7H}$

$$= \frac{10}{7}H$$

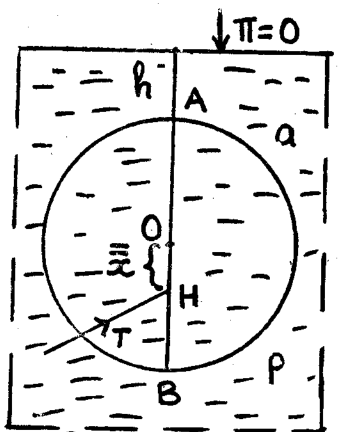
$$\therefore \frac{\bar{\bar{y}}_1}{\bar{\bar{y}}_2} = \frac{4/5\,H}{10/7\,H}$$

$$= \frac{14}{25}$$

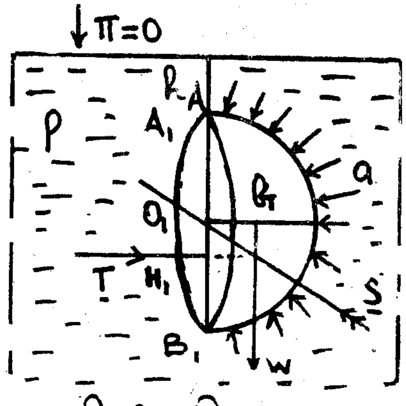
$\therefore \bar{\bar{y}}_1 : \bar{\bar{y}}_2 = 14:25$ ஆகும்.

உ+ம் 8: ஆரை a உடைய வட்டத்தள அடரொன்று, ஏகவினத் திரவமொன்றில், தளம் நிலைக்குத்தாகவும், மையம் திரவத்தின் சுயாதீன மேற்பரப்பின் கீழ் ஆழம் $h\,(> a)$ இலும் இருக்க உள்ளாழ்த்தப்படுகின்றது. அடரின் அமுக்க மையமானது, அதன் மையத்தின் கீழ் ஆழம் $a^2|4h$ இல் உள்ளதெனக்காட்டுக.

ஆரை a உம் அடர்த்தி p உம் உடைய சமனான ஒரு சீர் அரைக் கோளங்களிரண்டு, கோளமொன்றை உருவாக்குமாறு தளமுகங்கள் தொடுகையிலிருக்க வைக்கப்பட்டுள்ளன. கோளமானது அடர்த்தி $\sigma(<p)$ உடைய ஏகவினத்திரவமொன்றை, ஆழம் 4a இற்குக் கொண்டுள்ள பாண்டமொன்றின் அடியில், வெட்டுத்தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்க ஓய்விலுள்ளது. $p < 12\sigma$ எனின் அரைக் கோளங்களிரண்டும் ஒன்றை விட்டொன்று பிரியமாட்டாவெனக் காட்டுக.



(பௌதிக வெளி) படம் I



(கணிதவெளி) படம் II

படம் II இல் காட்டியவண்ணம் p அடர்த்தியுள்ள திரவத்தினுள் திரவ அரைக் கோளத்தின் சமநிலையை எடுத்து நோக்குவோம். (நிலையியல் கொள்கைகளைப் பின்பற்றுவோம்)

(i) இதன் நிறை $\underline{W} = {}^2/_3 \pi a^3 pg = {}^2/_3 \pi a^3 pg \downarrow$ இது பு. மை G யினூடாகக் கீழ் நோக்கித்தாக்கும்.

(ii) வட்டமுகத்திலான உதைப்பு $\underline{T} = \pi a^2 hpg$, இது அம்முகத்தின் அ.மை H, யினூடாகக் கிடையாக (தளத்திற்குச் செங்குத்தாக)த்தாக்கும்.

(iii) வளைபரப்பிலான விளையுள் உதைப்பு ($\underline{S}$) இது O_1 இனூடு செல்லும் ஒரு தனிவிசை ஆகும்.

குறிப்பு: வளைபரப்பிலான உதைப்பு ஒவ்வொரு சிறு மேற்பரப்பு மூலகங்களிலும் அதற்குச் செங்குத்தாகத் தாக்கும்உதைப்புகளின் விளையுள் ஆகும். கோள மேற்பரப்பிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் நேர்கோடுகள் எல்லாம், கோளத்தின் மையத்தினூடு செல்லும். ஆகவே இவற்றின் விளையுளானதும் மையத்தினூடு செல்லுதல் வேண்டும். மேலும் இவ்வுதைப்பு கோளமேற்பரப்பின் பதார்த்தத்தில் தங்கியிருப்பதில்லை. $\underline{W}$, $\underline{T}$, $\underline{S}$ எனக் குறிப்பது விளையுள் $\underline{S}$ கணிப்ப

தற்குச் சுலபம். $\underline{W} + \underline{T} + \underline{S} = \underline{O}$ ஆகும்.

O_1 பற்றித் தொகுதியின் திருப்பம் பூச்சியமாகும்.

$$O_1 \downarrow \; W\, O_1G - T\, O_1H_1 = O$$

$$^2/_3 \pi a^3 pg . {}^3/_8 a = \pi a^2 hpg \bar{\bar{x}}$$

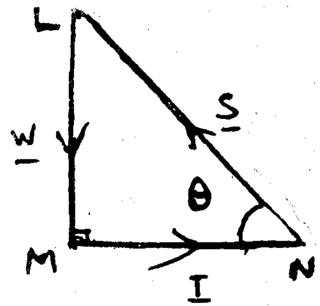
$$\therefore \bar{\bar{x}} = \frac{a^2}{4h} \text{ ஆகும்.}$$

படம் I ஐ எடுத்துக் கொண்டகல் அ. மையம் H ஆனது $OH = a^2/4h$ எனும் ஆழத்தில் இருக்கும்.

இதற்குக் காரணம் படம் I இலும் படம் II இலும் வட்டப்பரப்பு அதில் தாக்கும் உதைப்பு, தாக்கும் நிலை, யாவும் ஒத்தவையாகும்.

மாணவர் கவனத்திற்கு: $\underline{W} + \underline{T} + \underline{S} = \underline{O}$ ஆதலால்

$\underline{S} = -\underline{W} - \underline{T}$ ஆகும். இதிலிருந்து S ஆனது ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்குமெனக் கூறலாம்.



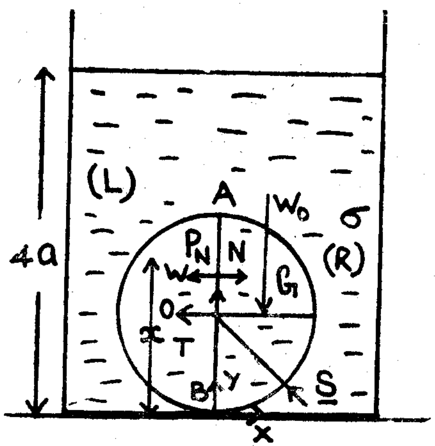
$S = \sqrt{W^2 + T^2}$ ஆகும்

$$\tan Q = \frac{W}{T}$$

$\underline{T}$ ஐப்படம் I இல் காட்டியது போல், $\underline{S}$ ஐப்படம் I இல் காட்ட முடியாது. a ஆரையுள்ள திண்ம அரைக் கோளத்தை அதன் தளமுகம் நிலைக்குத்தாகவும் மையம் h ஆழத்திலும் இருக்கத்

திரவத்தில் வைத்திருப்போமாயின், அதன் வளைபரப்புப் பெறும் உதைப்பு S ஆகும். தளப்பரப்புப் பெறும் உதைப்பு T ஆகும். (பருமன்றிசை நிலையில்) ஆகவே இருவகையான கேள்விகளுக்கும் வரையப்படும் கணித வெளிப்படம் ஒன்றுதான் என்பதைக் கவனித்தல் வேண்டும். இவ்வுதாரணத்தில் அவதானித்துப் பார்க்கலாம்.

பகுதி 2



படம் III

வளைபரப்பு (R) இலான உதைப்பு $\underline{S}$ ஆனது $\underline{S} + \underline{W} + \underline{T} = \underline{O}$ ஆல் பெறப்படும். இங்கு $\underline{W} = \frac{2}{3}\pi a^3 \sigma g$ $\underline{T} = \pi a^2 . 3 a g \sigma$

σ திரவ அரைக் கோளத்தின் அடர்த்தி. படம் II இல் h=3a P=σ இடம் பெறுவதாகும்.

$\underline{S} = -\underline{W} - \underline{T}$ ஆதலால் கோளத்தின் மையம் O இல் S இன்

கூறுகள் $W \uparrow$, $\overleftarrow{T}$ என இடலாம்.

திண்மக் கோளத்தின் நிறை $W_o = {}^4/_3 \pi a^3 p g \downarrow$ ஆகும். இங்கு P அடர்த்தி. Bயிலான மறுதாக்கம் (x,y) என்போம். தளமுகத்திலான மறுதாக்கம் N என்போம்.

(R) இன் சமநிலைக்கு B இல் திருப்பம் எடுக்க நாம் பெறுவது

$$B \downarrow \; W_o \tfrac{3}{8}a + Nx - Ta = O$$

∴ $Nx = Ta - \frac{3}{8}a W_0 > O$ ஆயின் கோளங்களிரண்டும் பிரியமாட்டா.

$$T > \tfrac{3}{8} W_0$$

$$3 \pi a^3 \sigma g > \tfrac{3}{8} \tfrac{4}{3} \pi a^3 p g$$

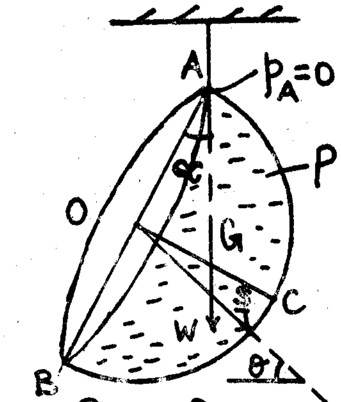
$$12 \sigma > \rho$$

$12 \sigma > \rho$ ஆயின் $N > 0$ ஆகும், ஆகவே $12 \sigma > p$ எனின் கோளங்களிரண்டும் ஒன்றை விட்டொன்று பிரியமாட்டா.

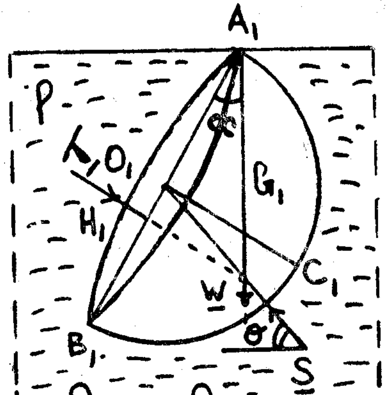
குறிப்பு: படம் II ஐக் கொண்டு பகுதி II க்கும் பெறுமானங்கள் எடுக்கத் தெரிதல் வேண்டும். படம் போட்டு நேரத்தைச் செலவு செய்யக் கூடாது. புத்தி நுட்பங்களைக் கணக்குகளில் உபயோகிக்கத் தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். அடிப்படைக் கொள்கையை விளங்கிவைத்திருக்கும் மாணவன் தான் இவ்வகையான நுட்பங்களைக் கையாளுவார்கள். இதனால் விடை சுலபமாகப் பெறப்படும். இதை விளங்காது, குறுகிய வழியில் செய்யப்பட்டுள்ளது, இது விளங்கமாட்டாது என்று கூறுவது அர்த்தமற்றதாகும்.

உ+ம் 9: தள அடியையுடைய இலேசான பொள் அரைக்கோளமொன்று நீரினால் நிரப்பப்பட்டு, அவ்வரைக் கோளத்தின் அடியின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் இணைக்கப்பட்டவொரு இழையினால் தொங்கவிடப்பட்டுள்ளது. வளைபரப்பின் மீதான விளையுளுதைப்பு, நிலைக்குத்துடனுக்கும் சாய்வு

தான் $^{-1}\left(\frac{109}{96}\right)$ எனக் காட்டுக.



(பௌதிகவெளி) படம் I



கணிதவெளி படம் II

படம் I ஐ எடுத்து நோக்கும்போது G ஆனது பாத்திரத்தினுள் அடைக்கப்பட்ட நீரின் பு. மையம்.

ஆகவே OG = $\frac{3}{8}$a ஆகும். சமநிலையில் AG நிலைக்குத்து $\tan \alpha = \frac{3}{8}$ ஆகவிருக்கும்.

குறிப்பு: பாத்திரம் பாரமானதாக விருப்பின் நாம் பாத்திரத்தினதும், உள் அடைக்கப்பட்ட திரவத்தினதும் புதிய பு. மையத்தைக் கணித்தல் வேண்டும். கட்டித் தொங்கவிடப்படும் போது AG எப்போதும் நிலைக்குத்தாகவிருக்கும்.

பாத்திரத்தினுள் அதியுயர் புள்ளியான A இல் அமுக்கம் பூச்சியம். பாத்திரம் மூடியதாகவிருப்பதால் வளியமுக்கம் பாதிக்கப்படமாட்டாது.

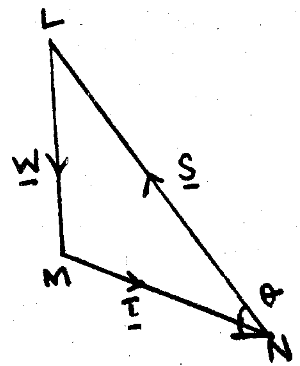
படம் IIஐ எடுத்துக் கொண்டால் A யினூடான கிடைக் கோட்டைச் சுயாதீன மேற்பரப்பாக எடுத்துக் கொண்டு திரவ அரைக் கோளத்தின் சமநிலையை எடுத்து நோக்கும் போது தொழிற்படும் விசைகள் பின்வருவனவாகும்:

1. திரவ அரைக் கோளத்தின் நிறை $\underline{W} = 2/3\ \pi a^3 \rho g$ இது பு மை G இனூடாகக் கீழ் நோக்கித் தாக்கும்.

2. வட்டமுகத்திலான உதைப்பு $T = \pi a^2 a \cos \alpha\ \rho g$ இது அதன் இது அதன் அ. மையம் H_1 யினூடாகத் தளத்திற்குச் செங்குத் தாக்கும்.

3. வளை பரப்பிலான விளையுள் உதைப்பு $(\underline{S})$ இது O_1 இனூடு செல்லும்.

$$\underline{S} + \underline{W} + \underline{T} = \underline{O}$$ ஆகும்



$$\tan \theta = \frac{W + T \sin \alpha}{T \cos \alpha}$$

$$= \frac{W}{T} \sec \alpha + \tan \alpha$$

$$= \frac{2}{3} \sec^2 \alpha + \tan \alpha$$

$$\tan \theta = \frac{2}{3}(1 + \tan^2 \alpha) + \tan \alpha$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{64}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{73}{96} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{109}{96}$$

ஆகவே நியூற்றனின் 3-ம் விதிப்படி பாத்திரத்தின் வளைபரப்பிலான உதைப்பு (- S) ஆகும்.

இதன் சாய்வு கிடையுடன் $\tan^{-1}\left(\frac{109}{96}\right)$ ஆகும்.

உய்த்தறிதல்: (1) O_1 பற்றித்திருப்பம் பூச்சியமாதலால்

$$O_1 \downarrow \quad W \frac{3}{8} a \cos \alpha - T\, O_1H_1 = O$$

$$\therefore O_1 H_1 = \frac{W}{T} \; \frac{3}{8} a\cos \alpha$$

$$= \frac{2}{3 \cos \alpha} \; \frac{3 \cos \alpha}{8}$$

$$= \frac{a}{4}$$

அதாவது அ. மைய ஆழம் a/4 ஆகும்.

(2) அ. மைய ஆழம் ∝ இல் தங்கியிருக்கவில்லை.

(3) $\underline{W} = -\underline{T} - \underline{S}$ இதிலிருந்து நாம் அறிவது $(-\underline{T})$ இனதும் $(-\underline{S})$ இனதும் விளையுள் $\underline{W}$ ஆகும். இவ்வழியைப் பின்பற்றி

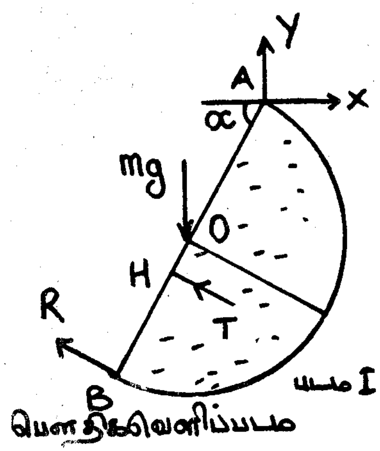
* வளைபரப்பிலான உதைப்பின் பருமனையும் திசையையும் கணித்தறியலாம்.

குறிப்பு: இருபடங்கள் வரைந்து அடிப்படைத் தத்துவங்களைப் பிரயோகித்தல் நன்று. இதை விளங்கிக் கொள்வதும் சுலபம் இவ்வழியைப் பின்பற்றுகையில் திரவத்துள் திண்மம் வைத்திருக்கையில் வளைபரப்பிலான உதைப்புக் கணிப்பதற்கும், பாத்திரத்தினுள் திரவம் வைத்திருக்கும் போது வளைபரப்பிலான உதைப்புக் கணிப்பதற்கும் வரையப்படும் கணித வெளிப்படம் ஒன்றேயாகும். ஆனால் சுயாதீன மேற்பரப்பு எடுத்துக்கொள்ளும் விதத்தை நன்கு தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். திண்மம் ஆயின் கணிக்கப்பட்ட $\underline{S}$ ஐ $\underline{S}$ எனக் குறித்தல் வேண்டும். உ+ம் (8) ஐப் பார்க்கவும். பாத்திரமாயின் $(-\underline{S})$ எனக் குறித்தல் வேண்டும். உ+ம் (9) ஐப் பார்க்கவும். மேலும் இரு படங்களையும் பக்கம் பக்கமாக வரைதல் வேண்டும். விசைகளைத் தெளிவாகக் காட்டுதல் அவசியமாகும். இப்பகுதி நிலையியலின் ஒரு

பிரிவு என்பதை மனதில் வைத்துக்கொண்டுதான் கணக்குகளைச் செய்தல் வேண்டும். பாத்திரத்தின் வடிவத்தை மாற்றுகையில் படங்கள் வேறுபாடாக அமைந்தாலும், நாம் வரையும் பௌதிக வெளிப்படமும், கணித வெளிப்படமும் ஒரே வடிவுடையன. விடையில் அட்சர கணிதவடிவம் மாறுபடும். இதைக்கொண்டு கணக்குக் கடினம் என்று முடிவுகட்டி விடாதீர்கள். பௌதிகவெளிப்படம் (தரப்பட்ட நிலையில்) வரைகையில் எடுகோளான பொருள் பிடிக்கப்பட்டுள்ளதா? அல்லது கட்டித்தொங்கவிடப்பட்டுள்ளதா? என்பதைப் பார்த்தல் வேண்டும். பிடிக்கப்பட்டுள்ளதாயின் ∝ தரப்பட்டிருக்கும், தொங்கவிடப்படுமாயின் பு மையத்தைக் கவனத்திற்கொண்டு ∝ வைக் கணித்தறியலாம். இங்கு சொல்லப்பட்டவற்றை மனதில் வைத்துப் பயிற்சியில் உள்ள கணக்குகளைச் செய்து பார்க்கவும்.

உ+ம் 10: ஒரு மெல்லிய அரைக் கோளப்பாத்திரம் a ஆரையுடையது. சீரான m திணிவுடையதும் a ஆரையுடையதுமான மெல்லிய ஒரு வட்டத்தட்டு பாத்திரத்தின் விளிம்பில் ஒரு புள்ளி A யில் விளிம்புக்குத் தான்சனூடாக சுழலுமாறு சுயாதீனமாகப் பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. திணிவு M உடைய திரவத்தால் இப்பாத்திரம் நிரப்பப்பட்டு A இற்கு எதிர்விட்டப்புள்ளி B யில் வட்டத்தட்டு பிணைக்கப்படுகிறது. பாத்திரம் BA மேன்முகமாயும் கிடைக்கு ∝ சாய்விலுமிருக்கப் பேணப்படுகிறது. திரவத்துள் மிகக்குறைந்த அமுக்கம் பூச்சியமெனக்கொண்டு வட்டத்தட்டில் திரவ உதைப்பையும் அமுக்கமையத்தையும் காண்க.

தட்டு இப்போது B யில் விலக்கப்படுகிறது. $\tan \alpha < \frac{8m}{15M}$ ஆயின் தட்டின் ஈவினூடாகத் திரவம் பொசியாதெனக் காட்டுக.



(உ+ம் 9) படம் II

கணித வெளிப்படம்

வட்டத்தட்டில் திரவ உதைப்பு ($-\underline{T}$) ஆகும். இங்கு T எனப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

$$T = \pi a^3 \text{ Sin} \propto \rho g \text{ ஆகும்.}$$

$$O_1H_1 = \frac{a}{4} \text{ என உ+ம் 9 இல் கண்டுள்ளோம்.}$$

$$\text{இனி } Mg = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho g$$

$$\therefore T = \frac{3}{2} Mg \text{ Sin} \propto \text{ ஆகும்.}$$

மூடியின் சமநிலையை எடுத்துக்கொண்டு A பற்றித் திருப்பம் எடுக்க நாம் பெறுவது

$$A \downarrow \quad T\frac{5a}{4} + R.\, 2a - mga \text{ Cos} \propto = 0$$

$$\therefore R.\, 2a = mga \text{ Cos} \propto - \frac{5}{4} Ta > 0$$

ஆயிருப்பின் திரவம் வெளியேறுது

$$mga \text{ Cos} \propto > \frac{5}{4} a.\ \frac{3}{2} Mg \text{ Sin} \propto \text{ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.}$$

$$\tan \propto < \frac{8m}{15\,M}$$

அதாவது $\tan \propto < \frac{8m}{15M}$ ஆயின் தட்டின் ஈனூடாகத் திரவம் பொசியாது.

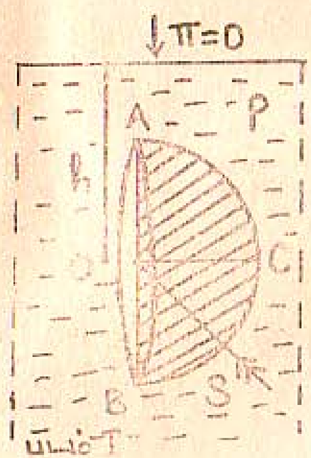
உ+ம் 9, உ+ம் 10 இரண்டிற்குமிடையிலான ஒற்றுமை வேறுபாடு ஆகியவற்றை நன்கு அவதானிக்கவும்.

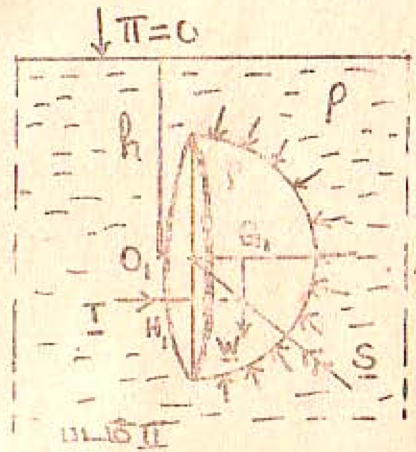
அமுக்கமையம்

உ-ம் ஆக்கிமிடீசின் கோட்பாட்டைக் கூறுக.

அ) a என்னும் ஆரையுடைய திண்ம அரைக்கோளமொன்று அதன் தளமுகம் நிலைக்குத்தாயும், அதன்மையம் சுயாதீன மேற்பரப்பிலிருந்து h (> a) என்னும் ஆழத்திலும் இருக்க ρ எனும் அடர்த்தியுடைய திரவமொன்றினுள் மூழ்கியவாறு உள்ளது. வளை மேற்பரப்பின் மீது தாக்கும் திரவ உதைப்பானது ஒரு தனிவிசையாக ஒடுங்கவேண்டுமெனக் காட்டி அதன் பருமனையும், திசையையும், தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.

ஆ) a எனும் ஆரையும் ρ_0 எனும் அடர்த்தியுமுடைய திண்ம அரைக்கோளமொன்று அதன் தளமுகம் ஒரு வெற்றுநீர்த் தொட்டியின் கிடை அடியைத் தொட்டவண்ணம் ஓய்விலுள்ளது. ρ (> ρ_0) எனும் அடர்த்தியுடைய திரவம் மெல்லெனத் தொட்டியினுள் ஊற்றப்படுகிறது. அரைக்கோளமானது மேலெழுமா? உமது விடைக்கு காரணங்காட்டி விளக்குக





படம் II இல் காட்டியவண்ணம் திரவ அரைக்கோளத்தின் சமநிலையை எடுத்து நோக்கும்போது தொழிற்படும் விசைகள் பின்வருவனவாகும்.

1) அதன் நிறை $\underline{W} = \frac{2}{3}\pi a^3 \rho g \downarrow$ அதன் பு. மையம் G_1 இனூடு கீழ்நோக்கித் தாக்கும்.

பி· 1

2) வட்டமுகத்தினாலான உதைப்பு $I = \pi a^2 h \rho g \rightarrow$
இது அதன் அ. மையம் H_1 இனூடாகத் தளத்துக்குச் செங்குத் தாகத்தாக்கும்.

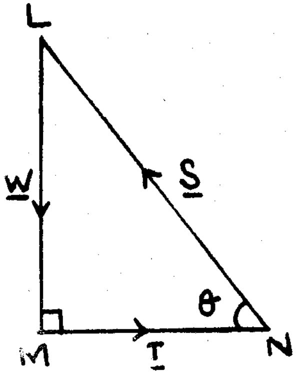
3) வளைபரப்பினாலான உதைப்பு $\underset{\sim}{S}$

சமநிலையில் $\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{W} = 0$

$$\therefore \underset{\sim}{S} = -\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{W}$$

அதாவது $(-\underset{\sim}{T})$, $(-\underset{\sim}{W})$ இனது விளையுள் $\underset{\sim}{S}$ ஆகும்.

ஆகவே $\underset{\sim}{S}$ ஒரு தனிவிசைக்கு ஒடுங்கவேண்டும்.

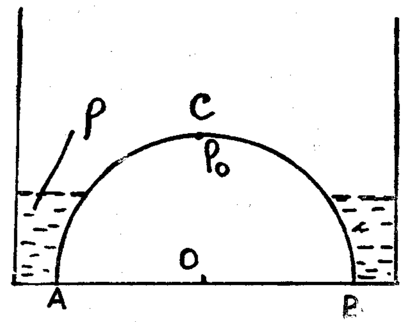


$$S = \sqrt{W^2 + T^2}$$
$$= \pi a^2 \rho g \sqrt{4/_9\, a^2 + h^2}$$
$$= \frac{\pi}{3} a^2 \rho g \sqrt{4a^2 + 9h^2}$$

$$\tan\theta = \frac{W}{T} = \frac{2a}{3h}$$

$\underset{\sim}{S}$ வளைபரப்பின் மூலகங்களுக்குச் செங்குத்தாகவிருப்பதால் எல்லா விசைகளும் மையம் O_1 இனூடு செல்லும். ஆகவே விளையுள் $\underset{\sim}{S}$ உம் O_1 இனூடு செல்லுதல் வேண்டும்.

இனிப்படம் I ஐ எடுத்துக்கொள்வோமாயின் வளைபரப்பிலான உதைப்பு $\underset{\sim}{S}$ ஆகும். பருமன், திசை, நிலையில் இதற்குக் காரணம் I இலும், II இலும் வளைபரப்புகள் ஒரே தன்மையாகவிருப்பதால்

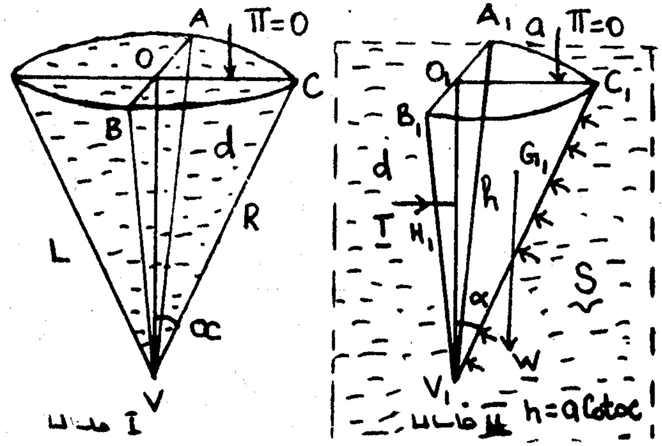


அரைக்கோளமானது மேல் எழும்பமாட்டாது.

அரைக்கோளத்தின் தளமுகம் வெற்றுநீர்த்தொட்டியின் கிடை அடியுடன் தொடுகையில் இருப்பதால். திரவம் அடியில் உட் செல்லமாட்டாது. ஆகவே அமுக்கம் பூச்சியமாகும். அதாவது தள முகத்தில் திரவத்தின் உதைப்பு இருக்கமாட்டாது.

உ+ம் ஒரு பொள் செவ்வட்டக்கூம்பின் ஆரை a யும். அரையுச்சிக்கோணம் α உம் ஆகும். இது d அடர்த்தியுடைய ஏகவினத் திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டு அடி மேன்முகமாயும் அச்சு நிலைக்குத்தாயுமிருக்குமாறு பேணப்படுகிறது. கூம்பு அச்சினூடாக தளமொன்றால் இருகூறாக்கப்படுகிறது. திரவத்துள் மிகக்குறைந்த அமுக்கம் பூச்சியமென எடுத்துக் கொண்டு, ஓர் அரைப்பகுதி கூம்பின் வளைபரப்பின்மீது திரவ விளையுளுதைப்பின் கிடை, நிலைக்குத்துக்கூறுகள் $\frac{1}{3} a^3 dg \operatorname{Cot}^2\alpha$ உம், $\frac{1}{6} \pi a^3 dg \operatorname{Cot}\alpha$ உம் எனக்காட்டுக.

இதன் தாக்கக்கோடு α π 4 எனின் கூம்பின் வட்ட அடியின் மையத்தினூடாகச் செல்லுமெனவும் காட்டுக.



கூம்பின் அரைப்பகுதி (R) இல் கொண்டுள்ள திரவத்தின் சமநிலையை அத்திரவத்துள் எடுத்து நோக்குவோம் படம் II இல் காட்டியவண்ணம் தொழிற்படும் விசைகள் பின்வருவன.

1. இதன் நிறை $\underset{\sim}{W} = \frac{1}{6}\pi a^3 \cot\alpha \, dg \downarrow$ இது அதன் பு. மையம் G_1 இனூடாகக் கீழ்நோக்கித் தாக்கும். அச்சிலிருந்து G_1 இன் தூரம் (a/π) ஆகும். [பு மையத்தில் பார்க்க]

2. நிலைக்குத்தாகவிருக்கும் தளமுகத்திலான உதைப்பு $\underset{\sim}{T} = \frac{1}{3} a^3 dg \cot^2\alpha$. இது தளத்திக்குச் செங்குத்தாக அமையம் H_1 இனூடு தாக்கும். $O_1H_1 = \frac{1}{2} a \cot\alpha$

3. வளைபரப்பிலான உதைப்பு $\underset{\sim}{S}$

சமநிலையில் $\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}$

$-\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{T}$ ஆகும்

அதாவது $(-S)$ இன் கிடை, நிலைக்குத்துக்கூறுகள் முறையே T, W ஆகும்.

ஆகவே படம் I இல் (R) இலான வளைபரப்பின் மீது திரவவிளையுள் உதைப்பின் கிடை, நிலைக்குத்துக் கூறுகள் $\frac{1}{3} a^3 dg \cot^2\alpha \rightarrow$; $\frac{1}{6}\pi a^3 dg \cot\alpha \downarrow$ ஆகும்.

$$\tan\theta = \frac{W}{T}$$

$$\tan\theta = \frac{\pi}{2}\tan\alpha$$

தாக்கக்கோடு மையத்தினூடு செல்லுமாயின்

$\tan\theta = \frac{a/2 \cot\alpha}{a/\pi}$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$= \frac{\pi}{2}\cot\alpha$ ஆயிருத்தல் வேண்டும்.

$\therefore \alpha = \pi/4$ எனின் தாக்கக்கோடு மையத்தினூடு செல்லும்

பயிற்சி III

1. அதன் ஒரு பக்கம் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தின் பரப்பில் அமையுமாறு முக்கோண அடரொன்று திரவத்தில் அமிழ்த்தப்படுகிறது திரவப்பரப்பில் உள்ள அமுக்கம் பூச்சியம் எனக்கொள்க. அடரின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.

ஒரு மூலைவிட்டம் கிடையாகவும், கோணப்புள்ளியொன்று திரவப்பரப்பிலும் அமையுமாறு இணைகரமொன்று திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இணைகரத்தின் அமுக்க மையமானது மற்றைய மூலைவிட்டத்திலே மிகவும் கீழேயுள்ள புள்ளியினது ஆழத்தின் 7/12 க்குச் சமமானவோர் ஆழத்தில் இருக்கும் எனக்காட்டுக. (April 1975)

2. ஏகவினத் திரவமொன்று புவியீர்ப்பில் ஓய்விலுள்ளது. திரவத்தில் முற்றாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ள ஒரு தளப்பரப்பின் மீதான விளையுள் உதைப்பானது, அத்தளப்பரப்பின் பரப்பளவினதும் அதன் மையப்போலியிலுள்ள அமுக்கத்தினதும் பெருக்கத்திற்கு சமனாகுமெனக் காட்டுக.

அமுக்கம் பூச்சியம் எனக்கருதப்படும் சுயாதீனப்பறப்பில் அதன் வரைப்புறும் விட்டம் இருக்குமாறு அரைவட்டப்பரப்பளவு ஒன்று திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இரு ஆரைகளினால் இப்பரப்பளவானது சமமான மூன்று ஆரைச்சிறைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டால், நடு ஆரைச்சிறை மீதான விளையுள் உதைப்பானது முழுப்பரப்பளவின் மீதான விளையுள் உதைப்பின் அரைவாசி ஆகுமெனக் காட்டுக.

(April 1979)

3. பக்கம் a யையுடைய சதுரவடிவ மடைப்படலையொன்று ஒரு குளத்தின் நிலைக்குத்துச் சுவரில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. மடையின் அடிவிளிம்பில் இருந்து $(1-\alpha)a$ தூரத்திலும் மேல் விளிம்பில் இருந்து αa $(0<\alpha<1)$ தூரத்திலும் உள்ள கிடை அச்சொன்று பற்றிப் (படலையின்) மேல் விளிம்பு வெளிப்புறமாக அசையும் வண்ணம் படலை சுயாதீனமாக ஊசலாடக்கூடியது.

1) $\propto > \frac{1}{2}$ என இருந்தாலன்றி, குளத்திலே நீரின் ஆழம் எவ் வளவுதான் கூடுதலாக இருந்தாலும், மடை திறக்காது எனவும்

2) $\propto > \frac{1}{2}$ எனில், மடையானது முற்றாக அமிழுமுன்னர் அது திறந்துகொள்ளும் எனவும் காட்டுக.

(August 1979)

4. A ஆனது பரப்பிலும் BC கிடையாகவும் இருக்கக் கோணம் ∠ABC ஆனது 90° எனத் தரப்படுமிடத்து, திரவமொன்றில் ஒரு நிலைக்குத்து தளத்திலே அமிழ்த்தப்பட்டுள்ள ABC எனும் முக்கோண அடரின் அமுக்க மையத்தைக் காண்க.

PQRS என்பது, பக்கம் 2a யையுடைய சதுரமொன்றின் வடிவிலுள்ள ஒரு அடராகும். P ஆனது பரப்பிலும், PR நிலைக்குத்தாகவும் இருக்க அது திரவமொன்றிலே அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது P ற்குக் கீழே அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

(August 1981)

5 ஒரு கப்பலின் ஒரு பக்கத்திலுள்ள துவாரம் ஒரு இலேசான வட்டவடிவான 1.5 m விட்டமுள்ள ஒப்பமாக அதியுயரத்தில் உள்ள புள்ளியில் பிணைக்கப்பட்ட கதவால் அடைக்கப்பட்டு, உள்ளே நீர் அமுக்கத்திற்கு எதிராக அதி தாழ்வான ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ளது. கதவின் மேற்புள்ளியும் கீழ்ப்புள்ளியும் முறையே 1.2 m, 2.4 m ஆகிய ஆழங்களில் இருப்பின், கட்டினால் உஞற்றப்பட்ட விசை சுமார் 1724 kg ஆகும் எனக்காட்டுக (ஒரு கனசென்ரி மீற்றர் நீரின் நிறை 1 gm எனக்கொள்வோம்)

(August 1985)

6. ஒரு பாரமான ஏகவினமான திரவத்தில் நிலைக்குத்தாய் உள்ளமிழ்த்தப்பட்ட தளப்பரப்பொன்றின் மீது தாக்கும் முழு உதைப்பானது தளப்பரப்பின் பரப்பளவினதும் அதன் மையப்போலியிலுள்ள அமுக்கத்தினதும் பெருக்கத்திற்கு சமம் எனக்காட்டுக.

ABCD என்னும் நிலைக்குத்தான செவ்வகப்பரப்பானது, DC AB கிடையாகவும் DC ஆனது AB ற்குக் கீழாகவும் அமையும் வண்ணம், புவியீர்ப்பின் கீழ் ஓய்விலுள்ள d எனும் அடர்த்தியுடைய ஏகவினமான திரவமொன்றின் அமுக்கத்திற்கு இலக்காயுள்ளது. AB = a, BC = b, E என்பது AB யின் நடுப்புள்ளியாகும். சுயாதீனப்பரப்பிலிருந்து AB இன் ஆழம் h ஆகும். CED, DEA எனும் முக்கோணிகளின் மீது தாக்கும் உதைப்புகள் முறையே T_1, T_2 என்பவற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன. T_1, T_2 என்பவற்றினைக் காண்க.

இதிலிருந்து

1) h = 0 ஆயின் $T_1 : T_2 = 4 : 1$ எனக்காட்டுக.

2) h ஆனது மிகப்பெரிதாயிருப்பின் $T_1 : T_2 = 2 : 1$ எனக் காட்டுக.

$T_1 : T_2 = 5 : 2$ ஆகவும், b = 2 ஆகவும் இருப்பின் h ஐக் காண்க.

(August 1987)

7. 2a, 2b ஆகிய பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகப்பரப்பின் 2a நீளப்பக்கங்கள் நிலைக்குத்தானவை அதன் மையம் அது அமிழ்த்தப்பட்ட நீரின் பரப்புக்குக் கீழே a ஆழத்திலுள்ளது. இப்பரப்பின் மீதுள்ள உதைப்பையும், அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தையும் காண்க.

பக்கம் a நீளமுள்ள ஒரு சதுர அடர் ஒரு ஏகவினத்திரவத்தினுள் ஒரு சோடி எதிர் ஓரங்கள் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி V என்னும் ஒரு சீர் வேகத்துடன் மெதுவாக உள்ளாழ்த்தப்படுகிறது. அமுக்க மையமானது a/V நேரம் வரை 2V/3 என்ற கதியில் கீழ்நோக்கி இயங்குமென்றும், அதன்பின் அடரின்மையம் O ஐ அணுகும்கதி O வின் ஆழத்தின் வர்க்கத்திற்கு நேர்மாறு விகித சமமாய் இருக்கும் என்றும் காட்டுக.
(வளி அமுக்கத்தை புறக்கணிக்க)

8. ஒரு நீர்த்தொட்டியின் பக்கமொன்றிலே r ஆரையுள்ள வட்டத் துவாரமொன்றை மூடுவதற்கு இலேசான மூடியொன்று பயன்படுத்தப்படுகின்றது. மூடியானது துவாரத்தின் அதியுயர்வான புள்ளியிலும் மிகத்தாழ்வான புள்ளியிலும் உள்ள பூட்டுகளினால் அந்நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. நீர்த்தொட்டியானது துவாரத்தின் அதியுயர்வான புள்ளியிலிருந்து h எனும் உயரத்திற்கு d அடர்த்தியுள்ள நீரினால் நிரப்பப்படும்பொழுது, கீழும் மேலும் உள்ள பூட்டுகளின் மீது தாக்கும் விசைகள் முறையே

$\frac{\pi r^2}{8}\left(4h + 5r\right)dg$ ஆயும் $\frac{\pi r^2}{8}\left(4h + 3r\right)dg$ ஆயும்

இருக்குமெனக் காட்டுக.

9. 2a, 2b பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு செவ்வகம், 2a பக்கம் சுயாதீன மேற்பரப்பில் இருக்குமாறும் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு ஒரு ஏகவினத்திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒரு மூலைவிட்டத்தால் அது இரு முக்கோணங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இரு முக்கோணங்களின் அமுக்க மையங்களின் நிலையைக்கண்டு அவற்றிற்கிடைப்பட்ட தூரத்தைக் காண்க.

10. a பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் ABCD, AB சுயாதீன மேற்பரப்பிலும் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. பக்கம் AB யில் x பக்கத்தைக் கொண்ட சதுரம் ஒன்று வெட்டி எடுக்கப்படுகிறது மீதியின் அமுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க. x இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் இது 8a/9 இலும் குறைவாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

11. ஒரு சாய்சதுரம் ABCD, A சுயாதீன மேற்பரப்பிலும் தளம் நிலைக்குத்தாகவும், AC நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு பக்கமும் a, $\angle BAD = 2\alpha$. அடரின் மீதான உதைப்பைக் காண்க. α இன் எப்பெறுமானத்திற்கு உதைப்பு உயர்வாக இருக்குமெனக் காண்க அமுக்கத்தின் நிலையைக் காண்க.

12. ABC இருசமபக்க முக்கோணம் AB = AC A யிலிருந்து BC இற்குரிய செங்குத்து உயரம் h. A சுயாதீன மேற்பரப்பிலும் BC கிடையாகவும் தளம் நிலைக்குத்தாகவும் இருக்குமாறு ஒரு திரவத்தில் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. ஒரு கிடைக்கோட்டினால் ஒரு முக்கோணப்பகுதி S_1 ஆகவும், ஒரு சரிவகப்பகுதி S_2 ஆகவும் பிரிக்கப்படுகிறது. இவ்விரு பகுதிகளிலும் உதைப்புக்கள் சமனாயின் கிடைக்கோட்டின் நிலையைக் காண்க. S_1, S_2 இன் அமுக்க மையங்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

13. ஒரு தள அடரானது (ஆரை a/2 ஐயும் மையம் C யையுங் கொண்ட) ஒரு வட்டப்பகுதி வெட்டப்பட்ட (ஆரை a யையும் மையம் O வையுங் கொண்ட) ஒரு வட்டத்தட்டால் ஆயது. அவ்வடர் தன் தளம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறும் C ஆனது O இற்கு நிலைக்குத்தாய்க் கீழே இருக்குமாறும் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தில் முற்றாய் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றது. OC = a/2 ஆக அமுக்க மையம் O வில் இருந்தால், O வானது சுயாதீனப்பரப்புக்குக் கீழே ஆழம் 11a/8 இல் இருக்குமென நிறுவுக.

14. நாற்பக்கல் ஒன்று நிலைக்குத்தாக ஏகவினத் திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்பட நீளங்கள் 2a, a என்பவற்றையுடைய இரண்டு பக்கங்கள் முறையே ஆழங்கள் h, 2h என்பவற்றில் பரப்பிற்குச் சமாந்தரமாய் இருக்கின்றன. அமுக்க மையத்தின் ஆழம் 3h/2 எனக்காட்டுக.

15 ஆரை a யுள்ள ஒரு வட்டத்தட்டு ஓர் ஏகவினப்பாயியில் தன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்கும்படி முழுவதும் அமிழ்த்தப்பட்டிருக்கின்றது. h ஆனது அப்பாயியின் சுயாதீனப் பரப்பிற்குக் கீழே மையத்தின் ஆழமெனின், அத்தட்டு தன் கிடை விட்டத்தாற் பிரிக்கப்பட்ட இரண்டு அரைவட்டங்களின் அமுக்கமையங்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம்

$$\frac{6\pi a\,(4h^2-a^2)}{9\pi^2h^2-16a^2}$$ என நிறுவுக

16. பக்கம் a யையுடைய ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி தன் பக்கங்களுள் ஒன்று சுயாதீனப்பரப்பில் இருக்குமாறு உள்ளதெனின், அவ்வறுகோணியின் அ. மையம் $\frac{23\sqrt{3}}{36}a$ எனும் ஆழத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

17. ஒரு பாத்திரத்திற்குள் d, 2d, 3d என்னும் அடர்த்திகளையுடைய மூன்று திரவங்கள் உண்டு. பரப்பு A யையுடைய ஒரு முக்கோணியானது அடர்த்தி d யையுடைய திரவத்தின் பரப்பில் ஒரு பக்கமும் அடர்த்தி 3d யையுடைய திரவத்தில் எதிருச்சியும் இருக்குமாறும் தாங்கப்பட்டிருக்கின்றது. 3h, 2h, h என்பன அம்மூன்று திரவங்களின் மேற்பரப்பிற்குக் கீழே இவ்வுச்சியின் ஆழங்களெனின், அம்முக்கோணியின் ஒவ்வொரு முகத்திலுமுள்ள உதைப்பு $\frac{4}{3}$ Ahdg எனவும் அ. மையத்தின் ஆழம் $\frac{59}{36}h$ எனவும் காட்டுக.

18 ஆரை a யுள்ள ஒரு வட்டத்தட்டு கிடையுடன் 30° இற் சாய்ந்த ஒரு தளத்திற் கிடக்கின்றது. அது ஒரு முகத்தில் நீரமுக்கத்திற்கு உட்பட்டிருக்கின்றது. அமுக்கமையம் கேத்திர கணித மையத்திலிருந்து $\frac{a}{16}$ யிலுள்ளது. கேத்திர கணித

மையம் நீரின் சுயாதீனப்பரப்புக்குக் கீழே ஆழம் 2a யில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

19. ஏகவினத் திரவமொன்றினுள் ABCD என்னும் இணைகர அடரொன்று பக்கம் AD திரவமட்டத்தில் இருக்குமாறு அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது BC யில ஒரு புள்ளி X ஆகும். ABX பகுதியில் விளையுள் உதைப்பு AXCD எனும் சரிவகத்தின் மீதுள்ள விளையுள் உதைப்பிற்குச் சமமாயின் BX=3CX எனக்காட்டுக $(\pi=0)$

20 ABC எனும் முக்கோண அடர் உச்சி A மேற்பரப்பிலும் BC திரவத்துள் கிடையாக திரவமட்டத்திலிருந்து h ஆழத்திலிருக்கவும் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இதன் அமுக்கமையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

AB, AC களின் நடுப்புள்ளிகள் முறையே E, F ஆயின் EFCB எனும் பரப்பின் அமுக்கமையத்தின் ஆழம்
$\frac{45}{56}h$ எனக்காட்டுக.

21. ஒரு செவ்வக அடர் ABCD இல் AB=2a, BC=2b. இவ்வடர் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள் AB மேற்பரப்பில் இருக்க நிலைக்குத்தாய் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வடரின் அ. மையத்தைக் காண்க.

AD யின் நடுப்புள்ளி E ஆகும். சரிவகம் BCDE இன் அமுக்சமைய ஆழம் $\frac{31}{22}b$ எனக்காட்டுக.

22. a ஆரையுடைய சீரான வட்டத்தட்டொன்று ஓரினத் திரவமொன்றினுள் முற்றுகத் தனது தளம் நிலைக்குத்தாயிருக்குமாறு அமிழ்த்தப்படுகிறது. திரவப்பரப்பின் கீழ் தட்டின் மையமானது d ஆழத்திலிருக்கிறது. தட்டின் ஒரு பக்கமீதுள்ள திரவஉதைப்பின் அமுக்கமையம் தட்டின் மையத்தின்கீழ் $\frac{a^2}{4d}$ ஆழத்தில் இருக்குமெனக் காட்டுக. திரவப்பரப்பில் அமுக்கம் பூச்சியம் எனக்கொள்க.

a அடி ஆரையுடையதும் பொள்ளுருளை வடிவமானதுமான ஒரு எண்ணைத்தாங்கியினது வாயின் ஒரு புள்ளி A யில் அவ்வட்ட வாயின் தொடலி பற்றி சுழலக்கூடிய ஒரு வட்டத்தட்டு பிணைக்கப்பட்டுள்ளது. தாங்கி d_1 அடர்த்தியுடைய திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டு A யிற்கு நேர் எதிரே A யினூடான விட்டத்திலுள்ள புள்ளி B யில் பூட்டப்பட்டுள்ளது. AB நிலைக்குத்தாயும் A, B இன் மேலும் இருக்கும்படி இத்தாங்கி d_2 அடர்த்தியுள்ள திரவமொன்றினுள் முற்றுக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. உருளையின் அச்சு திரவப்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திலுள்ளது. வாயின் மூடி இப்போது B யில் திறக்கப்பட்டால் உருளையினுளுள்ள திரவம்

$$h > \frac{a}{4}\left(\frac{5d_1}{d_2} - 1\right)$$ ஆயின்

அந்நிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

23. பக்கம் a நீளமுடைய ஒரு சதுர அடரின் BC, AD பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள் E, F ஆகும். இவ்வடர் ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினுள் அதன் பக்கம் AB மேற்பரப்பில் இருக்கத்தக்கதாக அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. CDFE செவ்வகப்பரப்பில் திரவ உதைப்பு ABEF செவ்வகப்பரப்பிலுள்ள திரவ உதைப்பின் மூன்று மடங்கு என நிறுவுக.

இவ்விரு பரப்புகளின் அமுக்க மையங்களுக்கிடைத் தூரம் $\frac{4}{9}a$ எனக்காட்டு.

24. ஒரு செவ்வக அடர், ஒரு திரவத்தினுள் நிலைக்குத்தாக, அதன் இரு பக்கங்கள் கிடையாகவும், திரவ மேற்பரப்பிலிருந்து d_1, d_2 ஆழங்களிலிருக்கவும் அமிழ்த்தப்பட்டுள்ளது. இவ்வடரின் அமுக்க ஆழம்

$$\frac{2}{3}\,\frac{d_1^2 + d_1d_2 + d_2^2}{d_1 + d_2}$$ என நிறுவு

நீரைக்கொண்டுள்ள ஒரு தொட்டியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்தில் ABCD என்னும் செவ்வக வடிவக்கதவுள்ளது. AB = a, BC b. AB கிடையாகவும் நீரின் மேற்பரப்பிலிருந்து h ஆழத்திலுமுள்ளது. CD, AB க்குக் கீழேயுள்ளது. கதவு AB வழியே அழுத்தமாகப் பிணைக்கப்பட்டிருப்பின், நீர் வெளியே ஓடாமல் தடைசெய்யக் கதவிற் பிரயோகிக்கவேண்டிய மிகக்குறைந்த விசையைக் காண்க.

25. ஒரு பாத்திரம் ஒரு தலைகீழான கூம்பகத்தின் வடிவமுடையது. அப்பாத்திரத்தினுடைய நான்கு முகங்களில் ஒவ்வொன்றும் a பக்கத்தையுடைய ஓர் இலேசான சமபக்க முக்கோண வடிவுள்ள தகடு ஆகும். அப்பாத்திரத்தினுடைய விளிம்பு ABCD என்ற சதுரமாகும் O என்பது அதன் உச்சியாகும். ABO என்ற பக்கம் AO என்ற விளிம்பில் பிணைக்கப்பட்டு B யிலுள்ள ஒரு கொழுக்கியினால் அது இறுக்கமாகக் கொழுவப்பட்டிருக்கிறது. d அடர்த்தியுள்ள ஒரு ஏகவினத்திரவம் அப்பாத்திரத்தை முற்றாக நிரப்புகிறது. அத்திரவம் காரணமாக ஒரு முகத்திலுள்ள அமுக்கமையத்தின் நிலையையும், B இலுள்ள கொழுக்கி மீதுள்ள விசையையும் காண்க.

26. ஒரு தாங்கியின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திலுள்ள கதவொன்று 2a பக்கமுள்ள ABC என்னும் ஒரு சமபக்க முக்கோணியாகும். BC கிடையானது. A ஆனது BC க்கு மேலுள்ளது. தாங்கியில் உள்ள திரவத்தின் மேற்பரப்பிற்குக் கீழே h ஆழத்தில் A உள்ளது. கதவானது BC வழியே சுயாதீனமாய் பிணையவிடப்பட்டிருப்பின், நீர் வெளிப்பாயதிருப்பதற்குக் கதவிலே பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய ஆகக்குறைந்த விசை

$$\frac{(3a+2\sqrt{3}\,h)\,a^2dg}{6}$$

என்று காட்டுக.

இங்கு d என்பது தாங்கியிலுள்ள திரவத்தின் அடர்த்தியாகும்.

BC க்குப் பதிலாக AB யிலே கதவு பிணையவிடப்பட்டிருப்பின் தேவைப்படும் மிகக்குறைந்த விசையையும் காண்க.

27. பக்கம் 2a நீளமுள்ள சமபக்க முக்கோண அடரொன்று, அதன் தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்குமாறும் ஒரு பக்கம் கிடையாக இருக்குமாறும் எதிர்மூலை கீழ்முகமாக இருக்குமாறும் நீரிலே உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. அக்கிடைப்பக்கம் நீர்ப்பரப்பிற்குக் கீழ் h ஆழத்தில் இருந்தால், வளிமண்டல அமுக்கத்தைப் புறக்கணித்து அமுக்க மையமானது கிடைப்பக்கத்தின் கீழ்

$$\frac{3a+2\sqrt{3}\,h}{2\sqrt{3}\,a+6h}\,a$$

ஆழத்தில் உள்ளதெனக் காட்டுக.

ஒரு நிலைக்குத்துப் பூட்டுக்கதவின் அடியிலுள்ள ABC எனும் முக்கோண வாயிலொன்று ஒரு முக்கோணப் பொறிக்கதவு ABC இனாலே மூடப்பட்டுள்ளது. AB = BC = CA = 2a. AB ஆனது கிடையாயிருக்க, C ஆனது AB இன் கீழே இருக்கின்றது. அப்பொறிக்கதவு AB பற்றி பிணைக்கப்பட்டு நீரின் அமுக்கத்திற்கு எதிராக C இலுள்ள ஒரு தாழ்ப்பாளினாலே தாங்கப்பட்டுள்ளது. C இற்கு மேலே அப்பூட்டுக்கதவின் ஒரு பக்கத்திலே நீர்ப்பரப்பு $4\sqrt{3}\,a$ என்னும் உயரத்திலிருக்க மறுபக்கத்திலே நீர்ப்பரப்பு $2\sqrt{3}\,a$ என்னும் உயரத்தில் இருக்கின்றது. d என்பது நீரின் அடர்த்தியாயின், அத்தாழ்ப்பாளில் உஞற்றப்படும் விசை $2a^3dg$ எனக்காட்டுக.

28. 2h உயரமும், அடியின் ஆரை a உம் உள்ள, ஒரு சீரான மெல்லிய பொருளினாலாய ஒரு செவ்வட்ட பொள்ளுருளை இருமுனைகளும் மூடப்பட்டுள்ளது அது W நிறையுடைய ஓர் ஏகவினத் திரவத்தினால் முற்றாக நிரப்பப்பட்டு, அதன் மேல் விளிம்பின ஒரு புள்ளியில் கட்டப்பட்டுள்ள ஓர் இழையினால் சுயாதீனமாகத் தொங்குகிறது $\tan\theta = \frac{h}{a}$ ஆயின், உருளையின் வளைபரப்பிலுள்ள மொத்த திரவஉதைப்பு $W\cos\theta$ என நிறுவி, இவ்வுதைப்பு நிலைக்குத்துடன் ஆக்குங்கோணத்தைக் காண்க.

29. அடியையுடைய ஒரு செவ்வட்டப் பொட்கூம்பு மெல்லிய சடப்பொருளினாலாயது. அதன் உயரம் 3a, அடியின் ஆரை a. ஓர் அலகு கனவளவின் நிறை w ஆகவுடைய ஓர் ஏகவினத்திரவத்தினால் அது முற்றாக நிரப்பப்பட்டு அதன் அச்சு கிடையாக அமைய உறுதியான நிலையில் வைக்கப்பட்டுள்ளது கூம்பின் வளைபரப்பிலுள்ள திரவ உதைப்பு S இன் பருமன் $\sqrt{2}\,\pi a^3w$ என நிறுவுக

S இன் தாக்கக்கோடு, கூம்பின் அச்சை வெட்டும்புள்ளி கூம்பின் அடியின் மையத்திலிருந்து $\frac{a}{2}$ தூரத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

30 h எனும் உயரமும், 2α என்னும் உச்சிக்கோணமுமுள்ள செவ்வட்டக்கூம்பொன்று, தனது மிகத்தாழ்ந்த பிறப்பாக்கி கிடையாகவும் d எனும் அடர்த்தியுடைய திரவமொன்றினால் நிரப்பப்

பட்டுள்ளது. கூம்பின் வளைபரப்பின் மீதான விளையுள் அமுக்கத்தைக் காண்க (August 1979)

31. h உயரமுள்ள, வட்ட முனைகள் மூடப்பட்ட, r ஆரையுடைய ஒரு செவ்வட்ட உருளை d அடர்த்தியுள்ள ஒரு திரவத்தால் முற்றுக நிரப்பப்பெற்று அதன் அச்சு கிடையோடு கோணம் α அமைக்கக்கூடியதாக வைக்கப்பட்டுள்ளது வளைபரப்பிலுள்ள விளையுள் உதைப்பின் பருமன், திசை தாக்கக்கோடு ஆகியவற்றைக் காண்க. (August 1980)

32. ஒரு தாங்கி (தொட்டி) யானது r எனும் அடி ஆரையும் h எனும் உயரமுமுள்ள செவ்வட்டக் கூம்பின் அடியிருந்து αh ($0 < \alpha < 1$) உயரத்தில் வெட்டியெடுக்கப்பட்ட கூம்பின் அடித்துண்டு வடிவத்தையுடையது இந்தத் தாங்கியானது அதன் சிறிய அந்தம் அடியாக இருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இவ்வந்தம் கிடையாய் உள்ளது. அதன் மேல் அந்தம் திறந்துள்ளது. தாங்கியானது நீரினுல் நிரப்பப்பட்டிருப்பின், தாங்கியின் அடியின் மீதும் வளைபரப்பின் மீதும் தாக்கும் நீரின் உதைப்புகளைக் காண்க. (April 1980)

33. a எனும் அடி ஆரையும் $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ என்னும் அரையுச்சிக் கோணமுமுள்ள ஒரு திண்ம செவ்வட்டக்கூம்பானது பிறப்பிக்கும் கோடொன்று பரப்பில் இருக்குமாறு மட்டுமட்டாய் நீரில் உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது. வளைபரப்பின் மீதான விளையுள் உதைப்பின் பருமன், திசை, தாக்கக்கோடு என்பவற்றைக் காண்க (November 1980)

34. அரைக்கோளவடிவ முனைகளையுடைய உருளை வடிவப்பாத்திரமொன்று நீரினுல் நிரப்பப்பட்டு, அதன் அச்சு கிடையாயிருக்குமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் ஒவ்வொரு முனையின் மீதுமான விளையுளுதைப்பபைக் காண்க விளையுளுதைப்பின் தாக்கக்கோட்டைத் துணிக. (April 1981)

35 செவ்வட்டக்கூம்பு வடிவிலுள்ள ஓர் அடைத்த பாத்திரம் நீரினுல் நிரப்பப்பட்டு, அதன் அச்சு கிடையாக இருக்கும்வண்ணம் வைக்கப்படுகிறது. வளைமேற்பரப்பிலுள்ள விளையுள் உதைப்பைக் கண்டு அதன் தாக்கக்கோட்டைத் துணிக. August 1982)

36. அரைக்கோள முனைகளுடன் கூடிய அடைத்த உருளைப் பாத்திரமொன்று நீரால் நிரப்பப்பட்டு அதன் அச்சு கிடையாகவிருக்கும் வண்ணம் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு முனை மீதுள்ள விளையுள் உதைப்பைக் காண்க. அதன் தாக்கக்கோட்டைக் காண்க. (August 1982)

37 திண்ம அரைக்கோளமொன்று அதன் தளஅடி நிலைக்குத்தாக ஓரின திரவத்தில் முற்றுக உள்ளாழ்த்தப்பட்டுள்ளது வளைந்த மேற்பரப்பின் மேலுள்ள விளையுள் உதைப்பின் பருமனையும் அதன் தாக்கக்கோட்டின் நிலையையும் காண்க. (August 1984)

38. இரு சமமான அரைக்கோளக்கிண்ணங்கள் புறக்கணிக்கத்தக்க நிறையுடையன. அவற்றின் விளிம்புகள் ஒன்றுடன் மற்றது பொருந்த ஒரு விட்டம் AB யின் முனைகள் A, B யில் இணைக்கப்பட்டு நீர் வெளியேருதவாறு இறுக்கமாகவுள்ளன கோளம் கொள்ளும் நீரின் மொத்தநிறை W ஆகும். A அதிகீழ்ப்புள்ளியாகுமாறு கோளம் கிடைத்தளத்துல் வைக்கப்பட்டு நீரினுல் நிரப்பப்படுகின்றது. B யில் பிணையில் தாக்கம் என்ன? B யில் பிணையல் விடுவிக்கப்பட்டால் கோளங்கள் பிரியாதிருக்க ஒவ்வொன்றின் வெளிமேற்பரப்பின் நடுப்புள்ளியில் பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய கிடை விசை என்ன?

39 m திணிவும், a அடியாரையும், h உயரமுமுடைய ஒரு (அடியற்ற) பொட்கூம்புவடிவப் புனல் தனது வட்ட விளிம்பு ஓர் ஒப்பமான கிடைத்தரையில் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டுள்ளது. இதன் உச்சியிலுள்ள சிறுதுவாரத்தின் வழியாக d அடர்த்தியுள்ள திரவம் மெதுவாக உட்செலுத்தப்படுகிறது. புனலின் உள்ளேயுள்ள திரவத்தின் சுயாதீனப்பரப்பினது ஆரை b ஆகும். புனலினுள் உள்ள திரவத்தின் சமநிலையைக் கருதுவதால் மட்டும் புனலின் வளைபரப்பின் மீதுள்ள உதைப்பு

$$\frac{\pi dhg\,(a-b)\,(2a^2-ab-b^2)}{3a}$$

பருமன் உள்ள தனிவிசை எனக்காட்டுக.

m > 2m′ ஆயின் ($m' = \pi dha^2/3a$) பூச்சியத்திற்கும் a இற்குமிடையில் எந்தப் பெறுமானத்தை எடுத்தாலும் திரவம் புனலின் அடியினூடாக வெளிப்படாதெனக் காட்டுக.

(அடியின் மேற்பரப்பிழுவையை புறக்கணிக்கவும்)

40. ஒரு பொட்தாழி ஒரு செவ்வட்ட ஆரை உருளை வடிவினது. இதன் குறுக்குவெட்டு a ஆரையுடைய வட்டமானது. இது தனது நேரிய விளிம்புகள் கிடையாகவும், மேல்முகமாகவும் இருக்குமாறு பேணப்படுகிறது. இத்தாழியின் இரு அந்தங்களும் இலேசான அரைவட்ட தட்டுக்களால் தடுக்கப்பட்டுள்ளது. இத்தட்டுக்களின் அதிதாழ்ந்த புள்ளிகளும் தாழிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. இப்பாத்திரம் d அடர்த்தியுடைய திரவத்தால் முற்றாக நிரப்பப்படுகிறது அரைவட்டத் தகடுகளில் திரவ உதைப்பையும் அமுக்க மையத்தையும் காண்க.

இதிலிருந்து தட்டுகளின் அதிதாழ் புள்ளிகளில் மறுதாக்கம் $\frac{\pi a^3 dg}{8}$ எனவும் காட்டுக

41 மூடப்பட்ட ஓர் அரைக்கோள குவளையினது அடி a ஆரையுடையது. இது d அடர்த்தியுடைய திரவமொன்றால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இப்பாத்திரம் தனது அடி கீழ்முகமாகவும் கிடைக்கு α சாய்விலும் இருக்குமாறும் பேணப்படுகின்றது. தளப்பகுதியில் மொத்த உதைப்பையும் அமுக்கத்தையும் காண்க. (திரவத்தின் அதியுயர் புள்ளியில் அமுக்கம் பூச்சியம் என்க.)

வளைந்த பரப்புகளில் மொத்த உதைப்பின் கிடை, நிலைக் கூறுகள் $\pi a^2 dg \sin\alpha$ உம், $\pi a^3 dg (\cos\alpha - \frac{2}{3})$ உம் ஆகுமெனக் காட்டுக இதன் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.

42. ஒரு வட்டத்தட்டு தனது அதியுயர் புள்ளி திரவப்பரப்பிலிருக்கும்படி ஏகவினத்திரவமொன்றில் அமிழ்த்தப்படுகிறது. இதன் மீது ஒரு பக்கத்திலுள்ள திரவ உதைப்பின் அமுக்கமையமானது தட்டின் மையத்திலிருந்து $a^2/4$ தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக. a வட்டத்தட்டின் ஆரை. $\pi = 0$

விட்டத்திற்குச் சமமான உயரமுடைய செவ்வட்ட இலேசான மூடப்பட்ட கூம்பொன்று ஏகவினத்திரவத்தால் நிரப்பப்பட்டுள்ளது. இது தனது அடியின் விளிம்பின் ஓர் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது வளைபரப்பின் மீதான திரவ உதைப்பு திரவநிறையின் இருமடங்காக இருக்கும் எனவும், இவ்வுதைப்பின் தாக்கக்கோடு கூம்பின் அதியுயர் பிறப்பாக்கிக்குச் சமாந்தரமாயுள்ளது எனவும், இது அதிகீழுள்ள பிறப்பாக்கியை 15 : 17 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமெனவும் காட்டுக.

PUBLISHED BY

Mr S. KANAPATHIPPILLAI

17/3 IYANAR KOVIL ROAD

VANNAR PONNAI