மாதிரி எடுப்பும்
புள்ளிவிபர அனுமானமும்

வணிகப்புள்ளிவிபரவியல்

க. பொ. த உயர்தரம்

ஆக்கம்:
பொன்னுத்துரை ஐங்கரன்

Sampling and Statistical Inference

BUSINESS STATISTICS

G. C. E. (A/L)

Ponnuthurai Ainkaran
Lecturer
Department of Mathematics and Statistics
University of Jaffna

சமர்ப்பணம்

"என்னை இந்நிலைக்கு உருவாக்கிய தாய், தந்தைக்கும், சிரத்தையுடன் எனக்கு கல்விபுகட்டிய ஆசிரியர்களுக்கும்"

முன்னுரை

வணிகப்புள்ளவிபரவியலை ஒரு பாடமாக கற்கும் க. பொ. த. உயர்தர வர்த்தகப்பிரிவு மாணவர்களுக்குரிய பாட விதானத்திற்கு அமைய மாதிரி எடுத்தலும் புள்ளிவிபர அனுமானமும் என்ற பகுதியை உள்ளடக்கி இந்நூல் அமைகிறது. ஆயினும் இந்நூல் மாதிரிஎடுத்தல், புள்ளிவிரமதிப்பீடு, கருதுகோள்ச்சோதனை கைவர்க்கசோதனை, மாறற்திறன் பகுப்பாய்வு சம்பந்தமான ஆரம்ப அறிவை பெறவிரும்புவர்களுக்கு உகந்ததாக அமையும் என்பதில் சந்தேகமில்லை.

இந்நூலுக்கான அணிந்துரையை வழங்கிய எனது விரிவுரையாளரும், யாழ். பல்கலைக்கழக கணித புள்ளிவிபரவியல் துறை சிரேஸ்ட விரிவுரையாளருமான திரு. எஸ். யோகராஜா அவர்களுக்கு எனது மனமார்ந்த நன்றியை தெரிவித்துக்கொள்கிறேன்.

இந்நூல் ஆக்கத்திற்கு சகலவழிகளிலும் பூரண ஒத்துழைப்பை நல்கிய வெள்ளவத்தை இந்து மகளிர் கல்லூரி ஆசிரியை செல்வி கேமாவதி செல்வத்துரை அவர்களுக்கும் எனது நன்றியை தெரிவித்துக்கொள்கிறேன். மேலும் இந்நூல் ஆக்கத்திற்கு உதவிய பம்பலப்பிட்டி இந்துக்கல்லூரி ஆசிரியர் திரு. க. ரமனேஷ், இரத்மலானை இந்துக்கல்லூரி ஆசிரியர் திரு. சிவசோதி, புள்ளிவிபர ஆய்வாளர் திரு. ச. யக்கோப்பிள்ளை ஆகியோரிற்கும் இந்நூலை அச்சிட்டு வெளியிட்ட **"Admiral Graphics"** நிறுவனத்திற்கும் எனது நன்றியினை தெரிவித்துக்கொள்வதோடு, இந்நூலில் செய்யவேண்டிய திருத்தங்கள் பற்றி ஆசிரியர்கள், இத்துறை சார்ந்த விற்பனர்கள் எனக்கு ஆலோசனை வழங்க வேண்டும் என எதிர்பார்க்கின்றேன்.

நன்றி

பொன்னுத்துரை ஐங்கரன்
விரிவுரையாளர்
கணித புள்ளிவிபரவியல்துறை
யாழ். பல்கலைக்கழகம்
யாழ்ப்பாணம்.

இணுவில் தெற்கு
இணுவில்
28.02.98

அணிந்துரை

கல்விச் சீர்திருத்தத்தில் ஓர் அம்சமாக புதிய பாடத்திட்டத்தில் வணிகப்புள்ளிவிபரவியல் க. பொ. த உயர்தர வர்த்தகப் பிரிவு மாணவர்களுக்கு ஒரு பாடமாக அறிமுகப்படுத்தப்பட்டுள்ளது. இப்புதிய வணிகப்புள்ளிவிபரவியல் பாடத்தின் *மாதிரி எடுப்பும் புள்ளி விபரவியல் அனுமானங்களும்* என்னும் பகுதியில், மாதிரி எடுத்தல் முறை, அதன் நன்மை தீமைகள், புள்ளிவிபர மதிப்பீடு, கருதுகோள் சோதனை, கைவர்க்கச் சோதனை, மற்றும் மாறற்றிறன் பகுப்பாய்வு, ஆகிய பகுதிகளை உயர்தர மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ளக்கூடிய இலகு தமிழில் தந்திருக்கிறார் இந்நூலாசிரியர். இந்நூலின் சிறப்பம்சமாக பல உதாரணங்கள் சேர்க்கப்பட்டுள்ளமை, குறிப்பிடத்தக்கது.

மாணவர் சமூகத்தின் தேவையறிந்து ஆசிரியர் தனது ஈடுபாட்டினை வெளிப்படுத்தும் இம்முயற்சி தொடர வாழ்த்துகிறேன்.

ச. யோகராசா,
சிரேஷ்ட விரிவுரையாளர்,
கணித புள்ளிவிபரவியல்துறை,
யாழ் பல்கலைக்கழகம்,
யாழ்ப்பாணம்.

04. 05. 1998.

மாதிரி எடுப்பு (Sampling)

வளர்ந்து வரும் உலகில் மானிட செயற்பாட்டின் வேறுபட்ட துறைகளில் தீர்மானங்கள் எடுக்கவேண்டி ஏற்படுகிறது. இதற்காக பொருத்தமான தரவுகளை ஆய்வுக்குட்படுத்தியே தீர்மானம் எடுக்க வேண்டும். அதற்காக புள்ளிவிபர முறையில் ஆய்வுகள் செய்யப்பட்டு தீர்மானங்கள் எடுக்கப்படும்.

புள்ளிவிபர ஆய்வில், ஆய்வு செய்யப்படும் தொகுதியின் எல்லா அலகுகளையும் கொண்ட தொகுதி *குடித்தொகை (Population)* எனப்படும். அல்லது ஆய்வு செய்யப்படும் வகையில் சாத்தியமான எல்லா அவதானிப்புகளின் முழுத்தொடை குடித்தொகை எனக் கூறலாம். இக் குடித்தொகையிலிருந்து குடியைப் பற்றிய ஆய்வுக்காக தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு பகுதியே *மாதிரி (Sample)* எனப்படும். மாதிரிகள் தெரிவு செய்யப்படும் செயல் ஒழுங்கே *மாதிரிஎடுப்பு (Sampling)* ஆகும். எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் மூலம் பெறப்பட்ட புள்ளிவிபர முடிவுகளுக்கு வருதல் *புள்ளிவிபர அனுமானம் (Statistical Inference)* எனப்படும்.

உற்பத்தி விற்பனை தொடர்பான முடிவுகள் எடுக்கப்படும் போது தொழிற்சாலை, நிறுவனங்களிலுள்ள முழு அலகுகளையும் ஆய்வுக் குட்படுத்தாது ஒரு தொகுதியினை ஆய்வுக்குட்படுத்தி அதன்மூலம் அனுமானங்கள் பெறப்படும். இதன் மூலம் உற்பத்தி, விற்பனை தொடர்பாக மாற்று நடவடிக்கைகள் எடுப்பதன் மூலம் வர்த்தக அபிவிருத்தியினை ஏற்படுத்த முடியும்.

உ-ம் 1: பிரதியீட்டுப் பொருட்களின் நுகர்வு சம்பந்தமான ஆய்வு செய்தல்.
ie, "Vicks" இற்கு பதிலாக "சித்தாலெப" அறிமுகம் செய்யப் பட்டதும் அதன் நுகர்வு சம்பந்தமாக ஆய்வுக்காக எல்லா நுகர்வோரையும் ஆய்வு செய்தல் கடினம் என்பதால் ஒவ்வொரு பிரதேசத்திலும் ஒவ்வொரு பகுதி நுகர்வோரை எடுத்து ஆய்வுக்குட்படுத்தி "சித்தாலெப" விற்கான சந்தைக் கேள்வியை அறிவதன் மூலம், உற்பத்தி, விநியோகம் (Supply) என்பவற்றை அதிகரிக்கச் செய்யலாம்.

2. தரக்கட்டுப்பாடு செய்யப்படும் போது மாதிரி எடுத்தே செய்யப்படும்.
ie, மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலம் அளத்தல் சம்பந்தமான ஆய்வில் ஒவ்வொரு மின்குமிழாக ஆயுட்காலம் அளத்தல் சாத்தியப்படாத

விடயமாகும். அதனால் ஒரு தொகுதி மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தை எடுத்து அதன் மூலம் குறிப்பிட்ட நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் மின்குமிழின் ஆயுட்காலம் சம்பந்தமான முடிவுக்கு வரமுடியும்.

3. வியாபாரம் ஒன்றை ஆரம்பிக்கும் போது அப்பிரதேசத்தில் சாத்தியமானதா என்பதனை ஆராய்தல்.

ie, குளிர்பான வியாபாரம் ஆரம்பிக்கும் போது காலநிலை, மக்கள் பொருளாதாரநிலை என்பவற்றை அறிதல் வேண்டும். மக்கள் பொருளாதாரநிலையை அறிவதற்காக மாதிரி எடுத்தல் மூலம் அப்பிரதேசத்தின் நிலையை அறிய முடியும்.

மாதிரி எடுத்தலின் நன்மைகள்

(i) நேரம் சிக்கனப்படுத்தப்படும்.
(ii) செலவு குறைக்கப்படும்.
(iii) கூடிய நம்பிக்கையான முடிவுகள் பெறமுடியும்.
(iv) கூடிய தகவல் சேகரிக்க முடியும்.
(v) சில சந்தர்ப்பங்களில் குடியின் முழு அலகிற்குரிய தகவலும் பெறமுடியாமல் இருப்பதால், மாதிரி எடுத்தல்தான் ஒரே வழியாக இருக்கும்.
(vi) நிர்வாக சௌகரியம்.

ஒரு தெளிவான தீர்மானங்களை எடுப்பதற்கு, மாதிரியானது பின்வரும் முக்கியத்துவங்களைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

(i) குடியை பிரதிநிதித்துவப்படுத்தக் கூடியதாக குடித்தொகைக்குரிய அதே பண்புகளைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

ie, மாதிரியானது குடியின் ஒரு பிரதிநிதியாக இருத்தல் வேண்டும்.

(ii) ஏகவினமானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

ie, குடியுடன் ஒப்பிடும் போது வேறுபாடு இல்லாமல் அதே நிலைமையில் இருத்தல் வேண்டும்.

(iii) போதுமானதாக இருத்தல் வேண்டும்

ie, கூடிய நம்பிக்கையான முடிவுகளை எடுப்பதற்கு போதுமான அளவு அலகுகள் மாதிரியில் சேர்க்கப்பட்டிருத்தல் வேண்டும்.

(iv) உத்தமமானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

ie, குறைந்த செலவில் கூடிய பலன் பெறக்கூடியதாக தேவையான அளவு மாதிரியைக் கொண்டு உயர் முடிவை பெறக்கூடிய முயற்சியாக இருத்தல் வேண்டும்.

முடிவுள்ள / முடிவில்லா குடித்தொகை (Finite / Infinite Population)

ஆய்வுக்குட்படுத்த வேண்டிய குடியின் அளவு அதாவது குடியிலுள்ள அலகுகளின் எண்ணிக்கை திட்டவட்டமானதும், எண்ணத்தக்கதுமாக இருப்பின் அது முடிவுள்ள குடி (Finite Population) எனப்படும்.

உ-ம்: வெள்ளவத்தை இந்து மகளிர் கல்லூரியில் உயர்தர வர்த்தக பிரிவில் கற்கும் மாணவிகளின் புள்ளிவிபரவியல் பாடம் பற்றிய ஆய்வில் அக் கல்லூரியில் உயர்தர வர்த்தக பிரிவில் புள்ளிவிபரவியல் பாடம் கற்கும் எல்லா மாணவிகளாலும் இக்குடி உருவாக்கப்படுகிறது. அவர்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளது. அதாவது எல்லா அங்கத்தவர்களையும் எண்ணக்கூடிய அத்தொடை முடிவுள்ளதாகும்.

குடியிலுள்ள அவதானிப்புகளின் எண்ணிக்கை எண்களில் அளவிட முடியாததாக இருப்பின் அது முடிவில்லாத குடி (Infinite Population). எனப்படும்.

உ-ம் : 1. T.V. பார்க்கும் மக்களின் எண்ணிக்கை
2. வானத்திலுள்ள நட்சத்திரங்களின் எண்ணிக்கை

பரமானம் (Parameter)

ஒரு குடி தொடர்பான புள்ளிவிபர மாறிலிகள் பரமானங்கள் எனப்படும். குடி ஒன்றின் இடை μ மாறற்திறன் σ^2, விகிதம் π போன்றவை பரமானங்களுக்கு உதாரணமாகும்.

புள்ளிவிபரம் (Statistic)

குடி ஒன்றின் பரமானங்களை தீர்மானிப்பதற்காக அல்லது மதிப்பீடு செய்வதற்காக எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பெறுமானங்களின் அல்லது அவதானிப்புகளின் எந்த ஒரு சார்பும் (தொடர்பும்) புள்ளிவிபரம் எனப்படும். மாதிரி ஒன்றின் இடை $\overline{x}$, மாறற்திறன் S^2, விகிதம் p போன்றவை புள்ளிவிபரத்திற்கு உதாரணங்களாகும்.

Note: பரமானம் மாறிலியாகும். ஆனால் புள்ளிவிபரம் எழுமாற்று மாறியாகும். அது எடுக்கும் பெறுமானம் மாறிக்கொண்டிருக்கும்.

உதாரணமாக குடியிடை μ (பரமானம்) ஒரு நிலையான பெறுமானமாகும். ஆனால் மாதிரி இடை $\bar{x}$ (புள்ளிவிபரம்) ஒரு எழுமாற்றுமாறி ஆகும். இங்கு $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$, $\bar{x}$ எடுக்கும் பெறுமானம் மாறிக்கொண்டிருக்கும்.

தொகை மதிப்பு (Census)

ஒரு குடியிலுள்ள ஒவ்வொரு அலகுகளினதும் தகவல்களையும் பகுப்பாய்வுக்கு ஏற்ற வகையில் பெறுதல் தொகை மதிப்பு எனப்படும். குடியிலுள்ள ஒரு மாதிரி தெரிவு செய்யப்பட்டு மாதிரியிலுள்ள ஒவ்வொரு அலகினதும் தகவல்களையும் பகுப்பாய்வுக்கு ஏற்றவகையில் பெறுதல் மாதிரி தொகைமதிப்பு (Sample Census) எனப்படும்.

மாதிரி எடுப்பு முறைகள் (Methods of Sampling)

மாதிரி எடுத்தல் பல முறைகளில் செய்யலாம். முறையின் தெரிவானது மாதிரி எடுப்பின் நோக்கத்தால் தீர்மானிக்கப்படும். இம்முறைகள் இரண்டு பிரிவாக கீழே தரப்படுகிறது.

1. நிகழ்தகவு மாதிரிஎடுத்தல் (Probability Sampling)
   - (i) எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு (Simple random Sampling)
   - (ii) படைமுறை மாதிரி எடுப்பு (Stratified Sampling)
   - (iii) கொத்து மாதிரி எடுப்பு (Cluster Sampling)
   - (iv) முறைமையான மாதிரி எடுப்பு (Systematic Sampling)

2. நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுப்பு (Non-Probability Sampling)
   - (i) பங்குவீத மாதிரி எடுப்பு (Quota Sampling)
   - (ii) தீர்ப்பு மாதிரி எடுப்பு (Judgement Sampling/Purposive Sampling)
   - (iii) இலகு மாதிரி எடுப்பு (Convenience Sampling)

1. நிகழ்தகவு மாதிரிஎடுத்தல் (Probability Sampling)

நிகழ்தகவு மாதிரி எடுத்தல் என்பதை எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு (Random Sampling) என்றும் கூறலாம். இங்கு குடியிலுள்ள ஒவ்வொரு அலகையும் மாதிரிக்கு சேர்த்துக் கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு சமனாகும். அதாவது நிகழ்தகவு விதிகளுக்கேற்ப மாதிரி ஒன்றைத் தெரிவுசெய்தல் ஆகும்.

(i) எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு (Simple random sampling)

எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தல் என்பதை வரையறைக்குட்படாத (Unrestricted) எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு எனவும் கூறமுடியும். குடியிலுள்ள ஒவ்வொரு அலகையும் மாதிரிக்கு சேர்த்துக் கொள்வதற்கான சந்தர்ப்பம் சமனாகவும், சாராததவையாகவும் இருப்பின் அது எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு எனப்படும். இந்த மாதிரிகளை தெரிவு செய்வதற்கு சில முறைகள் பயன்படுத்தப்படும். அவையாவன:

- (i) லொத்தர் முறை (Lottery Method)
- (ii) எழுமாற்று இலக்க அட்டவணை முறை (Table of Random Numbers Method)
- (iii) கணணி முறை (Computer Method)

இம் முறைகளை இரண்டு வகையாக கருதமுடியும்.

(i) மீள வைத்தல் (With replacement)

குடியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட அலகு ஆய்வுக்குட்படுத்தப் பட்ட பின்னர் மீண்டும் குடியில் சேர்க்கப்பட்டு அடுத்த அலகைத் தெரிவு செய்தல் மீளவைத்தல் முறையாகும்.

(ii) மீள வைக்காது விடல் (Without Replacement)

குடியிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்ட அலகு மீண்டும்குடியில் சேர்க்கப்படாது அடுத்த அலகைத் தெரிவு செய்தல் மீளவைப்பு அற்ற முறையாகும்.

(i) லொத்தர் முறை (Lottery Method)

இது மிகவும் இலகுவான முறையாகும். இம் முறையில் குடியின் ஒவ்வொரு அலகுகளும் இலக்கமிடப்பட்டு பின்னர் அளவு, வடிவம், நிறம் என்பன ஒரேமாதிரியான சிறு கடதாசி துண்டுகளில் குடி அலகுகளுக்கு இடப்பட்ட இலக்கத்தை எழுதி அவற்றை

ஒரே மாதிரி மடித்து நன்றாக குலுக்கிய பின்னர் மாதிரி எடுப்பதற்கு தீர்மானித்திருந்த அளவு துண்டுகளை எடுத்து அவற்றுக்குரிய இலக்கம் கொண்ட குடியிலுள்ள அலகுகள் தெரிவுசெய்யப்படும். இது லொத்தர் முறையில் எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு முறையாகும்.

(ii) எழுமாற்று இலக்க அட்டவணை முறை
Table of Random Number Method

குடித்தொகை மிகப்பெரிதாகும் போது (முடிவில் குடித்தொகை) லொத்தர் முறை பாவிக்க முடியாது இருக்கும். அதற்குப் பதிலாக இம் முறை பயன்படுத்தப்படலாம். இம்முறையிலும் லொத்தர் முறைபோல குடியின் ஒவ்வொரு அலகும் இலக்கமிடப்படும். பின்னர் எழுமாற்று இலக்க அட்டவணை மூலம் மாதிரிக்கான அலகுகள் தெரிவுசெய்யப்படும்.

எழுமாற்று இலக்க அட்டவணை பாவிக்கும் முறை

உதாரணமாக குடித்தொகை 1000 ஆக உள்ள குடியிலிருந்து 10 அலகுகளை மாதிரியாக தெரிவு செய்ய வேண்டி இருப்பின், அட்டவணையில் இடமிருந்து வலமாக அல்லது மேலிருந்து கீழாக நான்கு இலக்கங்களாக (4digits) 10 தெரிவு செய்யப்படும். (1000 என்பது நான்கு இலக்கங்களைக் கொண்டது).

பின் இணைப்பிலுள்ள எழுமாற்று அட்டவணையில் இடமிருந்து வலமாக கருதின் 8596, 7731, 5214, 5118, 5285, 3600, 9958, 9236, 9626,7835.

இவையாவும் 1000 இலும் கூடுதலானவை. ஆகவே இவற்றை 1000 இனால் வகுத்து மீதியைக் கருதுக.

596, 731, 214, 118, 285, 600, 958, 236, 626, 835. இந்த இலக்கங்களால் குறிக்கப்படும் அலகுகள் மாதிரியாக கருதப்படும். மேலும்,

(i) பிரதிவைப்பு முறை எனக் கருதப்படின் ஒரு இலக்கம் ஒருமுறைக்குமேல் ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். மீண்டும் மீண்டும் தோன்றுவது ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

(ii) பிரதிவைப்பு அற்றமுறை எனக் கருதப்படின் ஒரு இலக்கம் ஒருமுறை மட்டுமே ஏற்றுக்கொள்ளப்படும். மீண்டும் மீண்டும்

தோன்றும் சந்தர்ப்பத்தில் ஒரு முறை கருத்திற் கொள்ளப்பட்டு மீண்டும் அட்டவணையைப் பாவித்து தொடர்ந்து மிகுதி எண்கள் எடுக்கப்படும்.

Note: மேலுள்ள உதாரணத்தில் 1000 மடங்கு தோன்றின் 1000 ஆவது அலகு மாதிரிக்குள் சேர்த்துக் கொள்ளப்படும்.
(உ-ம்: 6000 தோன்றின்)

எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தலின் நன்மைகள்

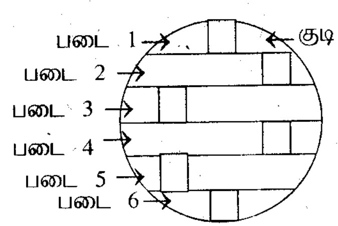
(i) தனிப்பட்ட வழுவுக்கான சந்தர்ப்பம் குறைவாக இருக்கும்.
(ii) மாதிரியின் அளவை அதிகரித்துச் செல்லும் போது குடித்தொகையை பிரதிநிதித்துவப் படுத்தும்.
(iii) சிக்கனமான முறை, அதாவது நேரம், பணம், மனிதவழு சிக்கனப் படுத்தப்படும்

எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தலின் தீமைகள்

(i) குடியின் முழுப்பட்டியலும் தேவைப்படும்.
(ii) மாதிரி அளவு சிறிதாக இருக்கும் போது அதுகுடியை பிரதிநிதித்துவப்படுத்த மாட்டாது.
(iii) அலகுகளுக்கிடையான பரம்பல் மிகவும் பெரிதாக இருக்கும் போது இந்த முறை பாவிக்க முடியாது.

(ii) படைமுறை மாதிரி எடுப்பு (Stratified Sampling)

பல்லினமானதாக அல்லது வேறுபட்ட பிரிவுகளைக் கொண்ட குடிக்கு படைமுறை மாதிரி எடுப்பு சிறந்தது. முதலில் குடியானது படைகளாக (Strata) அல்லது உபதொடைகளாகப் பிரிக்கப்படும். ஒவ்வொரு படையும் ஓரினமானதாக இருக்கும். ஒவ்வொரு படையிலிருந்தும் எழிய எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தல் மூலம் ஒவ்வொரு மாதிரி எடுக்கப்படும். இதுவே படைமுறை மாதிரி எடுத்தலாகும்.



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6$ என்பது படைமாதிரி. இங்கு $s_1, s_2, \ldots\ldots\ldots s_6$ என்பன ஒவ்வொரு படையிலிருந்தும் தெரிவு செய்யப்படும் எளிய எழுமாற்று மாதிரிகளாகும்.

இது இரண்டு வகையாகும்.
(i) விகித சமனானது (Propotional)
(ii) விகித சமனற்றது (Non-Propotional)

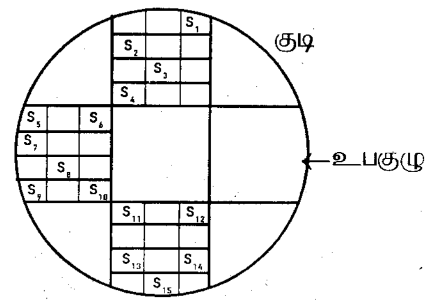
விகிதசமனான மாதிரி எடுத்தலில் சமவிகித பிரதிநிதித்துவம் படைகளுக்கு வழங்கப்படுகிறது. விகித சமனற்ற மாதிரி எடுத்தலில் குடியிலிருக்கும் மிகுதியை கருத்தில்கொள்ளாது சமபிரதிநிதித்துவம் எல்லா உபபடைகளுக்கும் வழங்கப்பட்டு மாதிரி எடுத்தல் செய்யப்படும்.

உ-ம் : பாடசாலை மாணவர்கள் பற்றிய ஆய்வில், எழிய எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தல் பயன்படுத்தும் போது பாடசாலைகளின் நிலைகளுக்கு ஏற்ப (மாணவர்தரம், அளவு) மாதிரி தெரிவு செய்யப்படுவதில்லை. ஆனால் படைமுறையில் குடியானது பாடசாலை நிலைகளுக்கேற்ப படைகளாக பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு படையிலிருந்தும் எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பு முறைமூலம் மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டு சேர்க்கப்படும். மேலும் ஒவ்வொரு படையிலும் உள்ள அளவுக்கேற்ப விகிதசம முறை மூலம் மாதிரி எடுக்கவும் முடியும். இல்லாத சந்தர்ப்பத்தில் விகிதசமனற்ற முறைமூலம் அதாவது உப படைகளுக்கு சம சந்தர்ப்பம் வழங்கப்படாது மாதிரிகள் தெரிவு செய்யப்படும்.

நன்மைகள்:
(i) குடியை நன்றாக பிரதிநிதித்துவப்படுத்துகிறது.
(ii) திருத்தமான முடிவுகளை உறுதிப்படுத்துகிறது.
(iii) படைகளாகப் பிரித்துள்ளதால் நிர்வகிப்பது, கையாள்வது சுலபம்.
(iv) குடியானது ஓராயமாக இருப்பினும் மிகவும் பொருத்தமானது.
(v) ஓரினமற்ற குடியாக இருப்பினும் மிகவும் நம்பிக்கையான முடிவுகளையே தருகிறது.

தீமைகள்:
(i) படைகளாகப் பிரிக்கப்படுவதால் பணம், நேரம் விரயம்.
(ii) சரியான முறையில் படைகள் பிரிக்கப்படாமையால் வழு ஏற்படும்.

iii) கொத்து மாதிரி எடுப்பு (Cluster sampling)
இது பல நிலைகளில் செய்யப்படும் மாதிரி எடுப்பு முறையாகும். அதனால் இதை பன்நிலை மாதிரி எடுப்பு (Multistage Sampling) என்றும் கூறப்படும். முழுக்குடியானது மாதிரி அலகுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு பிரிக்கப்பட்ட அலகுகளில் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் அலகுகள் மீண்டும் உப அலகுகளாக பிரிக்கப்படும். இந்த செய்முறையானது ஒரு தேவைப்படும் அலகுவரை தொடர்ந்து செய்யப்பட்டு மாதிரிகள் தெரிவு செய்யப்படும். இம்முறையே கொத்து மாதிரி எடுத்தல் எனப்படும்.



$S = S_1 U S_2 U ....U S_{15}$
என்பது கொத்துமாதிரி ஆகும்

உ-ம் : எமது நாட்டிலுள்ள மக்களின் பொருளாதார நிலைபற்றி ஆராய்வதற்கு முதலில் குடியானது மாகாணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அதிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்படும் மாகாணங்கள் மாவட்டங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டு அதிலிருந்து எழுமாற்றாக எடுக்கப்பட்ட மாவட்டங்கள் உதவி அரசாங்க அதிபர் பிரிவுகளாக பிரிக்கப்பட்டு மீண்டும் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்ற உதவி அரசாங்க அதிபர் பிரிவுகள் கிராம சேவை பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்ற கிராமங்களில் உள்ள எல்லா மக்களினதும் பொருளாதார நிலை பற்றி ஆராய்வதன் மூலம் எமது நாட்டில் பொருளாதார நிலை பற்றி கூறமுடியும். இவ்வகை மாதிரி எடுத்தல் கொத்து மாதிரி எடுத்தல் ஆகும்.

பல்கலைக்கழக மாணவர் பற்றிய ஆய்வில் நாட்டில் உள்ள பல்கலைக்கழகங்களில் எழுமாற்றாக தெரிவு செய்யப்படும் பல்கலைக்கழகங்களை பீடங்கள் ரீதியாக பிரிக்கப்பட்டு மீண்டும் அவற்றிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்படும் பீடங்களிலுள்ள

மாணவர்களை பூரணமாக ஆய்வுக்குட்படுத்தி பல்கலைக்கழக மாணவர் பற்றி முடிவுக்கு வருதல். இந்த வகையில் மாதிரி எடுத்தல் கொத்து மாதிரி எடுத்தல் ஆகும்.

நன்மைகள்:

(i) மாதிரி எடுப்பு முறைகளில் நெகிழ்வுகளை அறிமுகப்படுத்துகிறது.
(ii) மிகவும் பெரிய அளவைக் கொண்ட குடிக்கு பொருத்தமானது.
(iii) சில தரவுகள் சில பகுதிகளில் எடுக்கமுடியாத சந்தர்ப்பத்தில் இது பொருத்தமானது. (Missing Data)
(iv) வளர்ச்சியுறாத நாடுகளுக்குப் பொருத்தமானது.

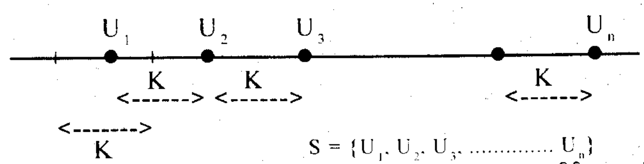
தீமைகள்:

(i) மற்றைய முறைகளை விட மிகவும் திருத்தம் குறைந்தது.

(iv) முறைமையான மாதிரி எடுப்பு (Systematic Sampling)

முழுக்குடித்தொகையும் தெரிந்திருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் இது பாவிக்கப்படுகிறது. இங்கு குடித்தொகையானது எண் ஒழுங்கில் அல்லது எழுத்து ஒழுங்கில் அல்லது வேறு ஏதாவது ஒழுங்கில் ஒழுங்கு செய்யப்படும். முதல் K அலகுகளில் முதலாவது அலகு தெரிவு செய்யப்படும். அதிலிருந்து ஒவ்வொரு K ஆவது அலகும் எடுக்கப்பட்டு மாதிரி உருவாக்கப்படும். இது முறையான மாதிரி எடுப்பு எனப்படும்.

குடித்தொகை N, மாதிரித்தொகை n எனின் $K = \frac{N}{n}$ என்பது மாதிரி ஆயிடை (Sample Interval) எனப்படும்.



$S = \{U_1, U_2, U_3, \ldots\ldots\ldots\ldots U_n\}$
என்பது முறைமையானமாதிரி ஆகும்

உ-ம் : 20 அலகுகளைக் கொண்ட குடியிலிருந்து மாதிரி அளவு 7 ஆகக்கொண்ட மாதிரி தெரிவு செய்யப்பட வேண்டுமெனின் அலகுகள் 20 ஐயும் ஒழுங்கு செய்து $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ என பெயரிட்டு மாதிரி ஆயிடை $= \frac{20}{7} \cong 3$, $\{x_1, x_2, x_3\}$ மூன்றிலிருந்தும் ஏதாவது ஒன்று

எழுமாற்றாக தெரிவு செய்யப்படும் முதலில் x_2 தெரிவு செய்யப்படின் தொடர்ந்து தெரிவு செய்தல் வருமாறு:

1	2	3
x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9
x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_{16}	x_{17}	x_{18}
x_{19}	x_{20}	

$\{x_2, x_5, x_8, x_{11}, x_{14}, x_{17}, x_{20}\}$ என்பது முறையான மாதிரியாகும். இதேபோல் x_1 இல் தொடங்கும் போது வேறு ஒரு மாதிரி தெரிவுசெய்யலாம். இப்படி மூன்று வகை மாதிரிகள் தெரிவு செய்யப்படலாம்.

நன்மைகள்:

(i) எளிய எழுமாற்று மாதிரி எடுப்பிலும் பார்க்க மிகவும் இலகுவானதும் சௌகரியமானதும் ஆகும்.
(ii) வேலையும் நேரமும் மிகவும் குறைக்கப்படுகிறது.
(iii) ஒரு திருப்திகரமான முடிவாக இருப்பதோடு, முடிவற்ற குடிக்கும் இம் முறை பயன்படுத்தப்படலாம்.

தீமைகள்:

(i) குடி முழுவதையும் பிரதிநிதித்துவப்படுத்தவில்லை.
(ii) ஆய்வு செய்பவரின் தனிப்பட்ட வழு உண்டு.

2. நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுப்பு (Non - Probability Sampling)

நிகழ்தகவு விதிகள் பற்றி கருத்தில் கொள்ளாமல் மாதிரி எடுத்தல் நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுப்பாகும். நிகழ்தகவு மாதிரி எடுத்தல் கடினமான சந்தர்ப்பத்தில் அல்லது விரைவாக மாதிரி ஒன்று தெரிவு செய்யப்படும் சந்தர்ப்பத்தில் இம்முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது. நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுத்தல் பின்வரும் முறைகளில் வகைக்குறிக்கலாம்.

(i) பங்குவீத மாதிரி எடுப்பு (Quota Sampling)

இது படைமுறை மாதிரி எடுத்தல் போன்ற மாதிரி எடுத்தல் முறையாகும். குடியானது சில பண்புகளைக் கொண்டு (வயது, தொழில், வருமானம், கல்வித்தரம்) பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு பிரிவுகளிலும் குறித்த பகுதிகளை, குறிப்பிட்ட தொகையினருக்கு அவர்களுடைய பங்குகளாக (Quota) விமர்சனத்திற்கு வழங்கப்படும். பின்னர் அவர்களுடைய தனிப்பட்ட தீர்ப்பின் மூலம் மாதிரி அலகுகள் தெரிவு செய்யப்படும். இம் முறையானது பங்குவீத மாதிரி எடுப்பு எனப்படும்.

உ-ம்: புதிதாக உற்பத்தி செய்யப்படும் குளிர்பானம் ஒன்றின் சந்தைநிலை பற்றி ஆராய்வதற்காக அளவீட்டிற்கு உட்படுத்தப்படும் ஒவ்வொரு 100 பேரில் 25 பேர் அரசதொழில் செய்பவர்கள், 20 பேர் தனியார் தொழில் செய்பவர்கள், 20 பேர் வேலையற்ற குடும்பப் பெண்கள், 10 பேர் வேலையற்றோர் என உள்ளடக்கப்பட வேண்டும் எனக் கருதின் விமர்சகர்களால் தேவையான எண்ணிக்கைக் கேற்ப ஒவ்வொரு வகையில் இருந்தும் தமது தனிப்பட்ட தீர்ப்பின் மூலம் வேண்டிய நபர்களின் எண்ணிக்கை தெரிவு செய்யப்படும். இம் முறையானது பங்குவீத மாதிரி எடுப்பு எனப்படும்.

நன்மை

1. பணம், நேரம் சேமிக்க முடியும்.
2. பயிற்றப்பட்ட ஆய்வாளர்கள் மூலம் இந்த மாதிரி தெரிவு செய்யப்படின் மிகவும் நம்பத்தகுந்த விடைகளைக் கொண்ட மாதிரியைத் தரும்.

தீமை

1. தனிப்பட்ட தீர்ப்பும், தனிப்பட்ட வழுவும் இருக்கும்.

தீர்ப்பு மாதிரி எடுத்தல் (Judgement Sampling)

ஆய்வு ஒன்றின் அலகுகளை தெரிவு செய்யும் அல்லது நிராகரிக்கும் அதிகாரம் ஆய்வாளரே கொண்டிருப்பார். ஆய்வாளரின் தீர்ப்பில் மாதிரி அலகுகள் தெரிவு செய்தல் தங்கியிருக்கும். அதாவது, ஆய்வாளரின் தீர்ப்பின் மூலம் மாதிரி தெரிவு செய்யப்படல் தீர்ப்பு மாதிரி எடுத்தல் எனப்படும்.

உ-ம்: ஒரு கிராமத்தில் புகைப்பழக்கம் பற்றிய ஆய்வில் 50 பேரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனின் ஆய்வாளர் தனது கருத்துப்படி அக்கிராமத்திலுள்ள 50 பேரை தெரிவு செய்தல் ஆகும். இம்முறையே தீர்ப்பு மாதிரி எடுத்தல் ஆகும்.

நன்மைகள்:

(i) இலகுவான முறை
(ii) நன்கு பிரதிநிதித்துவப்படுத்தும் மாதிரியை பெறுவதற்காக பயன்படுகிறது.
(iii) பொதுமக்களின் கொள்கைகள், தீர்மானங்கள் பற்றிய ஆய்விற்கு மிகவும் பயன்படும்.

தீமைகள்:

(i) தனிப்பட்ட வழு காரணமாக பிரதிநிதித்துவப்படுத்தும் ஒன்றாக இருக்கமுடியாது.
(ii) சரியான மாதிரி வழுவைப் பெறுவது கஷ்டம்.
(iii) மதிப்பீடுகள் மிகவும் சரியானதாக இருக்காது.
(iv) முடிவை மற்றைய மாதிரி எடுப்புகளுடன் ஒப்பிட முடியாது.

இலகு மாதிரி எடுப்பு (Convenience Sampling)

சௌகரியமான குடி அலகுகளை மாதிரிக்கு சேர்த்துக்கொள்ளுதல் இலகு மாதிரி எடுப்பு எனப்படும்.

(i) குடியானது தெளிவாக வரையறுக்கப்படாது இருத்தல்.
(ii) மாதிரி அலகுகள் தெளிவற்றதாக இருத்தல்.
(iii) மாதிரி எடுக்கப்படும் மூலத்தின் (Source) முழுவிபரம் கிடைக்காமல் இருத்தல்.

போன்ற சந்தர்ப்பத்தில் இம்முறை பொருத்தமானதாக இருக்கும். ஆனால் இம்முறைமூலம்

(i) குடியை பிரதிநிதித்துவப்படுத்தும் தீர்வுகளைக் கூறமுடியாது.
(ii) வழுகொண்டதாகவும், திருப்தியற்றதாகவும் இருக்கும்.

நிகழ்தகவு, நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுத்தலை ஒப்பிடல்

நிகழ்தகவு மாதிரி எடுத்தலுடன் ஒப்பிடும்போது நிகழ்தகவற்ற மாதிரி எடுத்தலில் நேரம், பணச்செலவு, வேலைப்பழு என்பன குறைவாக இருக்கும். ஆனால் இம் முறையில் கோடல் (Bias) அதிகமாக இருக்கும். அதனால் நிகழ்தகவற்ற

மாதிரி எடுத்தலானது நிகழ்தகவு மாதிரி எடுத்தலுடன் ஒப்பிடும் போது எதிர்பார்த்தளவு திருத்தமாக இருக்காது.

புள்ளிவிபர மாதிரி எடுத்தலின் வழுக்கள் (Statistical Errors in Sampling)

குடிபற்றி ஆராயும் போது குடியை முற்றுமுழுதாக அல்லது மாதிரியை (ஒரு பகுதியை) ஆராய்வதன் மூலம் குடிபற்றி முடிவுக்கு வரமுடியும். இப்படியான செய்கைகளின் போது வழுக்கள் ஏற்படும். இவைகள் புள்ளிவிபர மாதிரி எடுத்தலின் வழுக்கள் எனப்படும். இவை

(i) மாதிரி எடுப்பு வழு

(ii) மாதிரி எடுப்பற்ற வழு என இரண்டு வகைப்படும்.

மாதிரி எடுப்பு வழு (Sampling Errors)

குடி ஒன்றிலிருந்து மாதிரி எடுத்தலினால் ஏற்படும் வழுக்கள் மாதிரி எடுப்பு வழு எனப்படும். இது

(i) கோடலான வழு

(ii) கோடாத வழு என இரண்டு வகைப்படும்.

(i) கோடலான வழு (Biased Errors)

இது மாதிரியானது தெரிவு செய்தல் வழு, மதிப்பீடுசெய்தல் வழு போன்றவற்றால் ஏற்படுகின்றது.

உ-ம்: குடி ஒன்றிலிருந்து எழுமாற்று மாதிரி எடுத்தலில் மாதிரி அலகுகள் தெரிவு செய்யப்படும் போதும், மேலும் கணிப்புகளின் போதும் ஏற்படும் வழுக்களாகும்.

(ii) கோடாத வழு (Unbiased Error)

இது குடியிலிருந்து மாதிரிக்கு சேர்க்கப்படும் அலகு சேர்க்கபடாமல் விடல் போன்ற சந்தர்ப்பத்தில் ஏற்படுகின்றது.

உ-ம்: மாணவர்கள் பெற்ற புள்ளிகள் பற்றிய ஆய்வில் குடியின் இடை 60 ஆகவும், மாதிரி ஒன்று எடுக்கப்படும் போது 72, 54, 48 என கருதபப்படின் மாதிரி இடை 58 என அமைகிறது. மேலும் 54 என்ற அலகுக்குப் பதிலாக குடியிலிருந்து 59 என்ற அலகு தெரிவு செய்யப்பட்டிருப்பின் மாதிரி இடை 59.67 எனப்பெறப்படும். இந்த இடையானது முன்னையதைவிட குடி இடைக்கு நெருங்கியதாக இருக்கிறது. அதனால் வழு குறைக்கப்படுகின்றது. இந்த முறையில் ஏற்படும் வழு கோடாத வழு ஆகும்.

எது எவ்வாறு இருப்பினும் இந்த இரண்டு வகை வழுக்களும் மாதிரி எடுப்பு வழு எனப்படும்.

மாதிரி எடுப்பற்ற வழு (Non-Sampling Errors)

ஆய்வு செய்தலின் சாதாரண காரணங்களாலான அல்லது பகுதியை சேர்த்துக்கொள்ளும் சந்தர்ப்பங்களாலான எடுக்கப்பட்ட தரவுகளைப் பிரதிபண்ணுதல், கணிப்பீடு செய்தல், அளத்தலின் போது கருவியிலுள்ள வழு போன்றவற்றால் ஏற்படும் வழு மாதிரி எடுப்பற்ற வழு எனப்படும்.

உ-ம்: (i) 37 இற்கு பதிலாக 73 என பிரதியிடல் அல்லது 3 எனப் பிரதியிடல்.

(ii) கணித்துப் பெறவேண்டிய மாதிரி இடை 57.56 இற்குபதிலாக கணித்தலில் உள்ள வழு காரணமாக 52.47 எனபெறப்படுதல்.

(iii) உயரத்தை அளக்கும் போது 0 இலிருந்து அளப்பதற்குப் பதிலாக 1 இலிருந்து அளப்பதால் சாதாரண உயரத்தைவிட ஒரு அடி கூட சேர்க்கப்பட்டிருக்கும் அல்லது kg படிகளில் தேய்வின் காரணமாக ஏற்படும் நிறைக்குறைவு போன்றவை மாதிரி எடுப்பற்ற வழுக்களாகும்.

மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல (Sampling Distribution)

ஒரு குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் புள்ளிவிபரத்தின் பெறுமானங்கள் ஒரே அளவான வெவ்வேறு மாதிரிகளுக்கு மாறுபடுகின்றது. இப் பெறுமானங்களாலான பரம்பல் அப்புள்ளி விபரத்தின் மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல் எனப்படும்.

உ-ம்: ஐந்து விதமான பொருட்களை விற்பனை செய்யும் நிறுவனத்தினை கருதுக. ஐந்துவித பொருட்களினதும் விலை 3000, 3500, 4000, 5000, 5500 ரூபாய்கள் எனின் குடிபற்றி ஆராய்வதற்காக இரண்டு அலகுகளை கொண்ட மாதிரியை கொண்டு ஆராயப்படுகிறது எனின் இக்குடியிலிருந்து $5c_2 = 10$ வழிகளில் இரண்டு அலகுகளைக் கொண்ட மாதிரி எடுக்கமுடியும்.

ie, (3000,3500), (3500, 4000), (4000,5000), (5000,5500), (3000,4000), (3000,5000), (3000,5500), (3500,5000), (3500,5500), (4000,5500) என அமையும்.

மாதிரிகள்	மாதிரி இடை $(\bar{x})$
(3000,3500)	$3250 = \frac{3000+3500}{2}$
(3500,4000)	$3750 = \frac{3500+4000}{2}$
(4000,5000)	4500
(5000,5500)	5250
(3000,4000)	3500
(3000,5000)	4000
(3000,5500)	4250
(3500,5000)	4250
(3500,5500)	4500
(4000,5500)	4750
	42000

$\bar{x}$ இன் பரம்பலானது புள்ளிவிபரத்தின் மாதிரிப் பரம்பலாகும்.

மாதிரி இடைகளின் இடை $\mu_{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{10}$

$$= \frac{42000}{10}$$

$$= 4200$$

குடியின் இடை $\mu = \frac{3000+3500+4000+5000+5500}{5}$

$$= \frac{21000}{5}$$

$$= 4200$$

$$\therefore \quad \mu = \mu_{\bar{x}}$$

ie, மாதிரி இடைகளின் இடையானது குடிகளின் இடைக்கு சமனாகும்.

Result: செவ்வன் குடி ஒன்றின் மாதிரி இடைகளின் மாதிரிப் பரம்பலின் இடை $(\mu_{\bar{x}})$ குடிப்பரம்பலின் இடை μக்கு சமனாகும்.

முடிவுள்ள செவ்வன் குடி ஒன்றின் மாதிரி இடைகளின் மாதிரிப் பரம்பலின் மாறற்றிறன் $\sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$ ஆகும்.

இங்கு குடியின் மாறற்றிறன் σ^2, குடியின் அளவு N, மாதிரியின் அளவு $n(<N)$ ஆகும்.

Note: இங்கு மாதிரி பிரதிவைப்பற்ற முறையில் தெரிவு செய்யப்படும் மேலுள்ள உதாரணத்தில் $\mu_{\bar{x}} = 4200$

மாதிரிகள்	இடை$(\bar{x})$	$(\bar{x} - 4200)$	$(\bar{x} - 4200)^2$
(3000,3500)	3250	-950	902500
(3500,4000)	3750	-450	202500
(4000,5000)	4500	+300	90000
(5000,5500)	5250	1050	1102500
(3000,4000)	3500	-700	490000
(3000,5000)	4000	-200	40000
(3000,5500)	4250	+50	2500
(3500,5000)	4250	+50	2500
(3500,5500)	4500	+300	90000
(4000,5500)	4750	+550	302500
			3225000

மாதிரி இடை $\bar{x}$ இன் மாறற்றிறன் $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{10}\sum\left(\bar{x} - \mu_{\bar{x}}\right)^2$

$$= \frac{3225000}{10}$$

$$= 322500$$

குடியின் மாறற்றிறன் = $\frac{1}{5}\sum(x-\mu)^2$ இங்கு $\mu = 4200$

$$= \frac{1}{5}[(3000-4200)^2+(3500-4200)^2+(4000-4200)^2+(5000-4200)^2+(5500-4200)^2]$$

$$= \frac{1}{5}[1440000+490000+40000+640000+1690000]$$

$$= \frac{4300000}{5}$$

$$= 860000$$

$N=5,\ n=2,\ \sigma^2 = 860000$

$$\therefore \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n} = \left(\frac{5-2}{5-1}\right)\frac{860000}{2}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{860000}{2}$$

$$= 322500$$

$$\therefore\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}$$ ஆகும்

Note: குடித்தொகை N ஆனது மிகவும் பெரிதாக இருப்பின் மாதிரி இடையின் மாறற்றிறன் $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ஆகும்.

ஏனெனில் N மிக பெரிதாகும்போது $N - n \cong N-1$

$$\therefore\ \frac{N-n}{N-1} \cong 1$$

$$\therefore\ \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$ ஆகும்.

Theorem: இடை μ ஆகவும், மாறற்றிறன் σ^2 ஆகவும் கொண்ட செவ்வன் குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரி இடைகளின் மாதிரிப் பரம்பலானது இடை μ உம் மாறற்றிறன் $\sigma_{\bar{x}}^2$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

Note: (i) செவ்வன் குடியின் அளவு N, இடை μ, மாறற்றிறன் σ^2, எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் அளவு n ஆகவும் இருப்பின் மாதிரியின் இடை $\bar{x} \sim N\left(\mu, \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)$ ஆகும்.

(ii) பெரிய செவ்வன் குடியின் இடை μ, மாறற்றிறன் σ^2, எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் அளவு n ஆகவும் இருப்பின் மாதிரியின் இடை $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ஆகும்.

மையவெல்லைத் தேற்றம் (Central Limit Theorem)

ஏதேனும் ஒரு குடியிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரியின் அளவு பெரிதாயின் மாதிரி இடைகளின் மாதிரிப்பரம்பல் அண்ணளவாக செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

ie, இடை μ உம், மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்ட ஏதேனும் ஒரு குடியிலிருந்து பெறப்பட்ட எழுமாற்று மாதிரி $x_1, x_2, \ldots, x_n$ எனின், n பெரிதாக $(n>30)$ இருக்கும் போது மாதிரி இடை $\bar{x}$ இன் பரம்பலானது இடை μ உம், மாறற்றிறன் $\sigma_{\bar{x}}^2$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

Note: (i) செவ்வன் அல்லாத குடிக்கு இது பொருத்தமானது. இங்கு $n>30$

(ii) குடி பெரிதாக இருக்கும்போது $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ஆகும்.

(iii) $\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(iv) குடியானது செவ்வனாக இருப்பினும் இது பொருத்தமானது.

உ-ம்: சராசரி உயரம் 67.39 அங்குலமும் மாறற்றிறன் 1.69 உம் கொண்ட மாணவர்களைக் கொண்ட குடியொன்றிலிருந்து 400 பேர் கொண்ட மாதிரி தெரிவு செய்யப்படுகிறது.

(i) மாதிரி இடையின் பரம்பல் யாது?

(ii) இந்த மாதிரியில் சராசரி உயரம் 67.5 அங்குலத்திலும் கூடிய மாணவர் எத்தனை பேர்?

விடை: (i) பெரிய குடியின் இடை $\mu = 67.39$

மாறற்றிறன் $\sigma^2 = 1.69$

மாதிரியின் அளவு $= 400$ (பெரியது)

∴ மையவெல்லைத் தேற்றப்படி மாதிரி இடையின் மாதிரிப் பரம்பல் செவ்வனாக அமையும். மேலும் பரம்பலின் இடை $\mu = 67.39$

மாறற்றிறன் $\sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$

$= \dfrac{1.69}{400} = 0.0042$ ஆகவும் அமையும்.

ie, $\bar{x} \sim N(67.39, 0.0042)$

(ii) $\bar{x}$ ஆனது 67.5 இலும் கூடவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(\bar{x} > 67.5) = P\left(\frac{\bar{x} - 67.39}{\sqrt{0.0042}} > \frac{67.5 - 67.39}{\sqrt{0.0042}}\right)$$

$= P(Z > 1.69)$; இங்கு $Z \sim N(0,1)$

$= 0.0455$

∴ சராசரி உயரம் 67.5 அங்குலத்திலும் கூடவாக இருக்கும் வீதம்
$= 0.0455 \times 100$
$= 4.55$

குடிவிகிதம் (Population Proportion)

ஒரு குடியின் சிறப்பியல்பொன்றைக் கொண்ட பகுதியின் பருமனுக்கும் குடியின் பருமனுக்கும் உள்ள விகிதம் குடிவிகிதம் எனப்படும்.

ie, குடிப்பருமன் N ஆகவும் அதில் உள்ள சிறப்பியல்பு ஒன்றைக் கொண்ட குடியின் பருமன் D ஆகவும் இருப்பின் குடிவிகிதம் $\pi = \dfrac{D}{N}$ ஆகும்.

உ-ம்: (1) 2,00,000 ஆணிகள் தயாரிக்கும் இயந்திரத்தின் உற்பத்தியில் 40 ஆணிகள் பழுதடைந்தவை எனின், பழுதடைந்த ஆணிகளுக்கான குடிவிகிதம் $\pi = \dfrac{D}{N} = \dfrac{40}{2,00,000} = 0.0002$

(2) இலங்கையில் கல்வி கற்பிக்கும் 1,00,000 தமிழ் ஆசிரியர்களில் 30,000 பேர் விஞ்ஞானப் பட்டதாரிகள் எனின், விஞ்ஞானப் பட்டதாரி ஆசிரியர்களின் குடிவிகிதம்,

$$\pi = \frac{D}{N} = \frac{30000}{100000} = 0.3$$

மாதிரி விகிதம் (Sample Proportion)

குடி ஒன்றிலிருந்து பெறப்பட்ட மாதிரியில் உள்ள சிறப்பியல்பு ஒன்றினைக் கொண்ட பகுதியின் பருமனுக்கும், மாதிரியின் பருமனுக்கும் உள்ள விகிதம் ஆகும்.

ie, மாதிரிஅளவு n ஆகவும் அதிலுள்ள சிறப்பியல்பு ஒன்றினைக் கொண்ட பகுதியின் அளவு d ஆகவும் இருப்பின்

மாதிரி விகிதம் $p = \dfrac{d}{n}$ ஆகும்.

உ-ம்: (1) பேனாக்கள் உற்பத்திசெய்யும் நிறுவனத்தின் குறித்த ஒருநாள் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பேனாக்களில் 1000ஐ சோதித்த போது அதில் 30 பழுதடைந்தவையாக காணப்பட்டது.

$n = 1000,\ d = 30$

பழுதடைந்ததிற்கான மாதிரி விகிதம் $p = \dfrac{d}{n}$

$= \dfrac{30}{1000}$

$= 0.03$

மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல்

Sampling Distribution of Sample Proportion

குறித்த ஒரு குடியிலிருந்து பெறக்கூடிய சமபருமனுடைய மாதிரிகளின் மாதிரி விகிதங்களின் பரம்பல் மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல் எனப்படும்.

மாதிரி விகிதம் p எனின்

மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல் இடை $\mu_p = \pi$

மாறற்றிறன் $\sigma_p^2 = \left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$ ஆகும்.

Note: (1) குடி பெரிதாக அமையும் போது, மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல் மாறற்றிறன் $\sigma_p^2 = \dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$

(2) மாதிரியின் பருமன் பெரிதாகும் போது $(n>30)$ இப்பரம்பல் மையவெல்லைத் தேற்றத்திற்கு அமைய இடை μ_p யையும், மாறற்றிறன் σ_p^2 ஐயும் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

உ-ம்: ஒரு பெரிய அன்னாசிப்பழத் தொகுதியில் 2.5% ஆனவை பழுதடைந்தவை. அத்தொகுதியிலிருந்து 500 பழங்களைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்று எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றது. அம் மாதிரியில்

(i) பழுதடைந்த பழங்கள் 20 இற்கு குறையாமல் இருப்பதற்கான

(ii) 4.5% இற்கு குறைந்த பழுதடைந்த பழங்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

விடை: x - மாதிரியிலுள்ள பழுதடைந்த பழங்களின் விகிதம் என்க.

மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல் இடை $\mu_p = \pi = 0.025$

மாறற்றிறன் $\sigma_p^2 = \dfrac{\pi(1-\pi)}{n}$

$= \dfrac{0.025(1-0.025)}{500}$

$= \dfrac{0.025 \times 0.975}{500}$

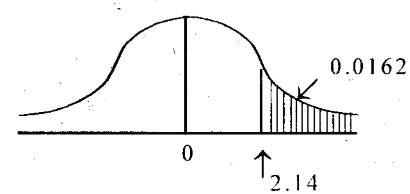
$= 0.000049$

$\therefore\ \sigma_p = 0.007$

$\therefore$ மாதிரி விகித மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல்

$x \sim N(0.025, 0.007^2)$

(i) எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் பழுதடைந்த பழங்கள் 20 இற்கு குறையாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு



$P(x > \dfrac{20}{500}) = P\left(\dfrac{x-0.025}{0.007} > \dfrac{0.04-0.025}{0.007}\right)$

$= P(z > \dfrac{0.015}{0.007})$ இங்கு $Z \sim N(0,1)$

$= P(Z > 2.14)$

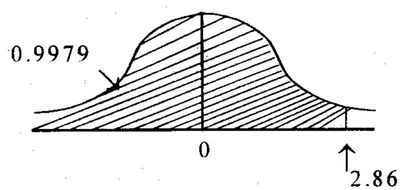
$= 0.0162$

(ii) எடுக்கப்பட்ட மாதிரியில் பழுதடைந்த பழங்கள் 4.5% இற்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x < 0.045) = P\left(\frac{x-0.025}{0.007} < \frac{0.045-0.025}{0.007}\right)$$

$= P(z < 2.86)$ இங்கு $Z \sim N(0,1)$

$= 0.9979$



இரண்டு மாதிரி இடைகளின் வித்தியாசத்தின் மாதிரி எடுத்தற் பரம்பல்
Sampling Distribution of Difference of Two Sample Means

முறையே இடைகள் μ_1, μ_2 உம், மாறற்றிறன் σ_1^2, σ_2^2 உம் கொண்ட இரண்டு குடியிலிருந்து n_1, n_1 பருமன் கொண்ட மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் இடைகள் முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ எனின் $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ இன் பரம்பலானது இரண்டு மாதிரி இடைகளின் வித்தியாசத்தின் மாதிரி எடுத்தற் பரம்பலாகும்.

பரம்பலின் இடை $\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \mu_{\bar{x}_1} - \mu_{\bar{x}_2}$

$$= \mu_1 - \mu_2$$

மாறற்றிறன் $\sigma^2_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sigma^2_{\bar{x}_1} + \sigma^2_{\bar{x}_2}$ ஆகும்.

$$= \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$ ஆகும்.

Note: (i) இரண்டு குடிகளும் செவ்வன் பரம்பலில் அமைந்தால் $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ஆனது இடை $\mu_1 - \mu_2$ உம் மாறற்றிறன் $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

(ii) குடியின் பரம்பல் செவ்வனாக அமையாதபோது மாதிரிகளின் பருமன் பெரிதாயின் $(n_1>30,\ n_2>30)$ மையவெல்லைத் தேற்றப்படி; $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ஆனது அண்ணளவாக இடை $\mu_1 - \mu_2$ உம் மாறற்றிறன் $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலாக (அண்ணளவாக) அமையும்.

(iii) $\mu_1 \mu_2$; σ_1^2, σ_2^2 போன்றவற்றில் ஏதாவது ஒரு கணியம் தெரியாத போது மேற்குறிப்பிட்ட முடிபுகளில் ஏற்படும் மாற்றம் பற்றி புள்ளிவிபர மதிப்பீட்டிற்கு பின்னர் ஆராயப்படும்.

உ-ம்: கைக்கடிகாரங்கள் உற்பத்தி செய்யும் CITIZEN நிறுவனத்தின் ஒரு வகை கைக்கடிகாரத்தின் சராசரி ஆயுட்காலம் 3600 நாட்கள் ஆகவும் மாறற்றிறன் 100 நாட்களாகவும் காணப்பட்டது. MONDIA நிறுவனத்தினரால் உற்பத்தி செய்யப்படும் அதேவகைக் கைக்கடிகாரத்தின் சராசரி ஆயுட்காலம் 3400 நாட்களாகவும் மாறற்றிறன் 125 நாட்களாகவும் காணப்பட்டது. இரண்டு நிறுவனத் தயாரிப்பிலிருந்தும் முறையே பருமன் 100, 125 கொண்ட மாதிரிகள் இரண்டு எடுக்கப்பட்டு பரிசோதனைக்குட்படுத்தப்படின் CITIZEN நிறுவனத்தினால் உற்பத்தி செய்யப்படும கைக்கடிகாரத்தின் ஆயுட்காலமானது MONDIA நிறுவனத்தினரால் உற்பத்தி செய்யப்படும் கைக்கடிகாரத்தின் ஆயுட்காலத்திலும் 220 நாட்களிலும் அதிகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

$\bar{x}_1$ - CITIZEN நிறுவன உற்பத்தியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் இடை

$\bar{x}_2$ - MONDIA நிறுவன உற்பத்தியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் இடை என்க.

எடுக்கப்பட்ட மாதிரி அளவுகள் பெரிதாக இருப்பதால் மையவெல்லைத் தேற்றப்படி,

$$\overline{x_1} - \overline{x_2} \sim N\left(\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}, \sigma^2_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}\right)$$

$$\mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \mu_1 - \mu_2$$

= 3600 - 3400 = 200 நாட்கள்

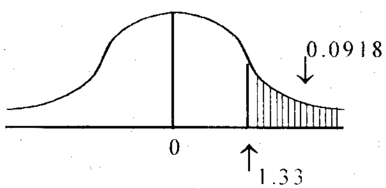
$$\sigma^2_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = 15$$

ie, $\overline{x_1} - \overline{x_2} \sim N(200, 15^2)$

$$\therefore \quad P\left(\overline{x_1} - \overline{x_2} > 220\right) = P\left(\frac{\left(\overline{x_1} - \overline{x_2}\right) - \mu_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}}{\sigma_{\overline{x_1}-\overline{x_2}}} > \frac{220 - 200}{15}\right)$$

= P (Z > 1.33); Z ~ N(0, 1)

= 0.0918



இரண்டு மாதிரி விகிதங்களின் வித்தியாசத்தின் மாதிரிப் பரம்பல்

Sampling Distribution of Difference of Two Sample Proportion

முறையே குடிவிகிதம் π_1, π_2 கொண்ட இரண்டு குடியிலிருந்து n_1, n_2 பருமன் கொண்ட இரண்டு மாதிரிகள் எழுமாற்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் மாதிரி விகிதங்கள் முறையே p_1, p_2 எனின் $p_1 - p_2$ இன் பரம்பலானது இரண்டு மாதிரி விகிதங்களின் வித்தியாசத்தின் மாதிரிப் பரம்பலாகும்.

பரம்பலின் இடை $\mu_{p_1-p_2} = \mu_{p_1} - \mu_{p_2}$

$$= \pi_1 - \pi_2$$

மாறற்றிறன் $\sigma^2_{p_1-p_2} = \sigma^2_{p_1} + \sigma^2_{p_2}$

$$= \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$$ ஆகும்.

Note: மாதிரிகளின் பருமன் பெரிதாக அமையும் போது ($n_1>30, n_2>30$) மையவெல்லைத் தேற்றத்திற்கு அமைய இடை $\mu_{p_1-p_2}$ உம் மாறற்றிறன் $\sigma^2_{p_1-p_2}$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

உ-ம்: கூரைத்தகடுகள் உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் (Asbestos Cement Industries Ltd.) தனது உற்பத்திக்கான மூலப்பொருட்களை இரண்டு வழங்குனர்களிடமிருந்து கொள்வனவு செய்தது. இரு வழங்குனர்களும் வழங்கிய மூலப்பொருட்களில் 0.09, 0.07 விகிதமும் நிராகரிக்கப்பட்டது. குறித்த ஒரு நாள் உற்பத்திக்காக வழங்குனர்களிடம் பெற்ற மூலப் பொருட்களில் முறையே 400, 550 பக்கற்றுகள் பாவிக்கப்பட்டது. முதலாவது வழங்குனரிடம் நிராகரிக்கப்பட்ட விகிதத்திலும், இரண்டாவது வழங்குனரிடம் நிராகரிக்கப்பட்ட விகிதம் 0.008 இலும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

விடை: $\pi_1 = 0.09$ $\quad \pi_1 = 0.07$

$n_1 = 400 \quad n_2 = 550$

மாதிரிகளின் அளவு பெரிதாக இருப்பதால் மையவெல்லைத் தேற்றப்படி மாதிரி விகிதங்களின் வித்தியாசம் $p_1 - p_2$ ஆனது செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

பரம்பலின் இடை $\mu_{p_1-p_2} = \pi_1 - \pi_2$

= 0.09 - 0.07

= 0.02

மாறற்றிறன் $\sigma^2_{p_1-p_2} = \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$

$$= \frac{0.09 \times 0.91}{400} + \frac{0.07 \times 0.93}{550}$$

= 0.00033

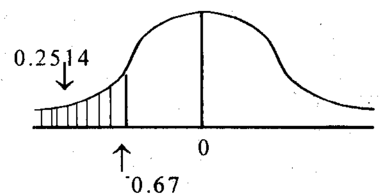
$\sigma_{p_1-p_2}$ = 0.018

$$\therefore \quad P_1 - P_2 \sim N(0.02, 0.018^2)$$

$$\therefore \quad P(P_1 - P_2 < 0.008) = P\left(\frac{(p_1 - p_2) - \mu_{p_1 - p_2}}{\sigma_{p_1 - p_2}} < \frac{0.008 - 0.02}{0.018}\right)$$

$$= P(Z < -0.67); \quad \text{இங்கு } Z \sim N(0,1)$$

$$= 0.2514$$



புள்ளிவிபர மதிப்பீடு (Statistical Estimation)

குடியின் பரமானங்களை மாதிரியின் தரவுகளிலிருந்து மதிப்பீடு செய்யும் முறை புள்ளிவிபர மதிப்பீடு எனப்படும்.

ie, குடியின் பரமானங்களான இடை μ மாறற்றிறன் σ^2 போன்றவைகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு புள்ளிவிபர மதிப்பீடு உதவுகின்றது.
மேலும் குடிப்பரமானங்களை அளப்பதற்கு குடி முழுவதையும் ஆய்வுக்குட்படுத்த வேண்டும். இந்த முறையில் பணம், நேரம் போன்றன விரையமாவதோடு குடியின் முழுஅலகையும் ஆராயும் சந்தர்ப்பம் இல்லாமல் போகலாம். அதன்காரணமாக குடியிலிருந்து மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் தகவல்களின் அடிப்படையில் குடிப்பரமானங்கள் பற்றிய முடிவுக்கு வரவேண்டியுள்ளது.

மதிப்பான் (Estimator)

குடிப்பரமானத்தை ஆக்குவதற்காக எடுக்கப்பட்ட மாதிரியிலிருந்து பரமானத்தைக் கணிக்கக்கூடிய மாதிரி உறுப்புக்களின் சார்புகள் அப்பரமானத்தின் மதிப்பான் ஆகும்.

உதாரணமாக, மாதிரி இடை $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{n}$, அதன் குடியின்இடை μ இற்கான மதிப்பான் ஆகும்.

மதிப்பீடு (Estimation)

ஒரு குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட எழுமாற்று மாதிரிகள் மூலம் கணிக்கப்படும் புள்ளிவிபரப் பெறுமானம் அக்குடிக்குரிய பரமானத்தின் மதிப்பீடு ஆகும்.

உ-ம்: மாதிரி இடை எடுக்கும் பெறுமானம் 4.25 எனின் μ இன் மதிப்பீடு 4.25 ஆகும்.

குடியின் பரமானங்களை மதிப்பீடு செய்யும்போது கீழ்வரும் இரண்டு வகை மதிப்பீடுகள் சாத்தியமாகிறது.

(i) புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimation)
(ii) ஆயிடை மதிப்பீடு (Interval Estimation)

(i) புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimation)

ஒரு தெரியாத குடியின் பரமானத்தை அண்ணளவாக்குவதற்கு புள்ளிவிபரத்தில் ஒரு தனிப் பெறுமானத்தால் மதிப்பீடு செய்யப்படும். இந்த மதிப்பீடு புள்ளி மதிப்பீடு எனப்படும்.

ie: மாதிரி இடையானது குடியின் இடையின் மதிப்பீட்டுக்காக பாவிக்கப்படும் ஒரு புள்ளி மதிப்பான் ஆகும்.

(ii) ஆயிடை மதிப்பீடு (Interval Estimation)

இரண்டு இலக்கங்களுக்கிடையில் கருதப்படும் பரமானமானது அமையுமானால் இது ஆயிடை மதிப்பீடு எனப்படும்.

ie, குறிப்பிட்ட பிரதேசத்திலுள்ள தோட்டங்களில் வேலை செய்யும் தொழிலாளர்களின் நாட்கூலி பற்றி அறிவதற்கு ஒரு மாதிரி எடுக்கப்பட்டு, அதன்மூலம் அப்பிரதேச தோட்டங்களில் வேலைசெய்யும் தொழிலாளர்களின் நாட்கூலிகளின் சராசரி 100 ரூபா என மதிப்பீடு செய்யப்பட்டது. இது புள்ளி மதிப்பான் ஆகும். அதே வேளை ஒரு மாதிரியை ஆராய்வதன்மூலம் நாட்கூலியின் சராசரி 70 ரூபாவிற்கும் 110 ரூபாவிற்கும் இடையில் அமையும் என மதிப்பீடு செய்யப்பட்டது. இது ஆயிடை மதிப்பான் ஆகும்.

இரண்டு மதிப்பீட்டு முறையிலும் நன்மைகளும் தீமைகளும் உள்ளன. ஆனால் புள்ளிவிபரவியலில் பரமானத்தின் சரியான பெறுமானம் தேவைப்படுவதில்லை. அதேபோல் பொதுவாக பயிற்சிகளின்போது ஆயிடை மதிப்பான் சேர்த்துக் கொள்ளப்படுகிறது. ஒரு பரமானத்தின் பெறுமானத்தைக் கொண்ட ஒரு மதிப்பான் சிறந்த மதிப்பான் (Good Estimator) ஆகும். அது பின்வரும் உடமைகளைக் கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

(a) கோடாமை (Unbiasedness)
(b) இசைவு (Consistency)
(c) வினைத்திறன் (Efficiency)
(d) போதுமை (Sufficiency)

(a) கோடாமை (Unbiasedness)

ஒரு மதிப்பானின் பெறுமானம் பரமானத்தின் பெறுமானத்திற்கு சமனாக இருந்தால் அந்த மதிப்பான் கோடாத மதிப்பானாக (Unbiased Estimator) இருக்கும் என எதிர்பார்க்கப்படுகிறது. பொதுவாக மாதிரியின் பருமன் போதுமானளவு பெரிதாக இருக்கும்போது கோடலால் ஏற்படும் வழு புறக்கணிக்கப்படக்கூடிய அளவு மிகவும் சிறிய பெறுமானமாக குறைக்கப்படுகிறது.

புள்ளிவிபரம் T என்பது பரமானம் θ இன் கோடாதமதிப்பான் எனின் $E[T] = \theta$ ஆகும். மறுதலையும் உண்மை ஆகும்.

Note: $E[T]$ என்பது T இன் எதிர்பார்க்கப்பட்ட பெறுமானம் (Expected Value) ஆகும்.

உ-ம்: (i) மாதிரி இடை $\bar{x}$ குடியின் இடை μ இற்கான கோடாத மதிப்பான் ஆகும்.

ie, $E[\bar{x}] = \mu$

(ii) மாதிரி மாறற்றிறன் S^2 என்பது குடியின் மாறற்றிறனின் கோடாத மதிப்பான் ஆகும். இங்கு $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x-\bar{x})^2$ ஆகும்.

ie, $E[S^2] = \sigma^2$

(iii) மாதிரி விகிதம் p குடிவிகிதம் π இற்கான கோடாத மதிப்பான் ஆகும்.

ie, $E[p] = \pi$

Note: கோடலினால் ஏற்படும் வழு $B(T) = E[T] - \theta$ என வரையறுக்கப்படும்.

(b) இசைவு (Consistency)

மாதிரியின் பருமன் அதிகரிக்கும்போது மாதிரிப் புள்ளிவிபரத்திற்கும் குடிபரமானத்திற்கும் இடையிலான வித்தியாசம் குறைந்துசெல்கிறது. அதாவது மாதிரிப்புள்ளிவிபரத்தின் பெறுமானம் பரமானத்தின் பெறுமானத்திற்கு அண்ணளவாக சமனாக அமைகின்றது. இவ்வாறான மதிப்பான் இசைவான மதிப்பான் (Consistent Estimator) எனப்படும்.

ie, மாதிரியின் பருமன் n மிகவும் பெரிதாகும்போது (முடிவிலியை அணுகும்போது) $E[(T-\theta)^2]$ ஆனது பூச்சியத்தை அணுகினால் T ஆனது θ இன் இசைவு மதிப்பான் ஆகும்.

Note: $E[(T-\theta)^2]=V(T)+B(T)$ எனக்காட்டலாம்.

உ-ம்: மாதிரி இடை $\bar{x}$ ஆனது குடிப்பரமானம் μ இன் இசைவு மதிப்பான் ஆகும்.

ie, $E[(\bar{X}-\mu)^2]=V(\bar{x})+B(\bar{x})$

ஆனால் $\bar{x}$ ஆனது μ இன் கோடாத மதிப்பான் ஆகும்.

$\therefore\quad E[\bar{x}]=\mu$

$\therefore$ கோடலினால் ஏற்படும் வழு $B(\bar{x})=E[\bar{x}]-\mu=0$

மாறற்றிறன் $V(\bar{x})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$E\left[(\bar{x}-\mu)^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}+0$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

n அதிகரித்து முடிவிலியை அணுகும்போது $\dfrac{\sigma^2}{n}$ ஆனது குறைந்து 0 ஐ அணுகுகிறது.

$\therefore\quad \bar{x}$ ஆனது μ இன் இசைவு மதிப்பான் ஆகும்.

ie, $n\to\infty$ ஆக $E\left[(\bar{x}-\mu)^2\right]\to 0$

(c) வினைத்திறன் (Efficiency)

ஒரு பரமானத்திற்கு பல கோடாத மதிப்பான்கள் உண்டு. அவற்றின் மாறற்றிறன்களில் மிகவும் குறைந்த மாறற்றிறன் (Minimum variance) கொண்ட மதிப்பான் வினைத்திறன் கொண்ட மதிப்பான் (Efficient Estimator) எனப்படும்.

உ-ம்: மாதிரியின் இடை $\bar{x}$, மாதிரியில் ஏதாவது ஒரு மாறி x_i இரண்டும் பரமானம் μ இற்கான கோடாத மதிப்பான்கள் ஆகும்.

ie, $E[\bar{x}]=\mu$ & $E[x_i]=\mu$

மாறற்றிறன் $V(\bar{x})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

$$V(x_i)=\sigma^2$$

$$\sigma^2>\frac{\sigma^2}{n}$$

$\therefore$ குறைந்த மாறற்றிறனைக் கொண்ட $\bar{x}$ ஆனது x_i இலும் பார்க்க இடை μ இற்கான வினைத்திறனுடைய மதிப்பான் ஆகும்.

(d) போதுமை (Sufficiency)

பரமானம் சம்பந்தமான எல்லாத்தகவல்களையும் கொண்ட மதிப்பான் போதுமான மதிப்பான் (Sufficient Estimator) எனப்படும்.

உ-ம்: (i) $\sum x_i$ என்பது μ இற்கான போதுமான மதிப்பான் ஆகும்.

(ii) $\sum x_i^2$, $\sum x_i$ என்பன σ^2 இற்கான போதுமான மதிப்பான் ஆகும்.

Note: (i) $\bar{x}$ ஆனது μ இற்கான ஒரு மதிப்பான் ஆகும். $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$ இங்கு n ஒரு மாறிலி. $\sum x_i$ இன் பெறுமானம் தெரிந்தால் μ இன் பெறுமானம் காணமுடியும். ஆகவே $\sum x_i$ என்பது μ இற்கான போதுமான மதிப்பான் ஆகும்.

(ii) மாதிரி மாறற்றிறன்

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x-\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right]$$

இங்கு n ஒரு மாறிலி.

$\sum x_i^2, \sum x_i$ இரண்டினதும் பெறுமானங்கள் தெரிந்தால் S^2 இன் பெறுமானம் காணலாம். அத்துடன் S^2 ஆனது σ^2 இற்கான ஒரு மதிப்பான் ஆகும்.

$\therefore$ $\sum x_i^2, \sum x_i$ என்பன σ^2 இற்கான போதுமான மதிப்பான் ஆகும்.

ஆயிடை மதிப்பீட்டிற்கான முறை

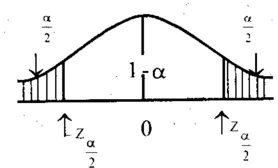
தரப்பட்ட நிகழ்தகவு மட்டமொன்றுக்கு அமைய பரமானம் ஒன்றிற்கான ஆயிடையை மாதிரியில் பெற்ற தகவல்களின் அடிப்படையில் காண்பதாகும். இந்த நிகழ்தகவு மட்டம் நம்பிக்கை மட்டம் (level of confidence) எனவும், இவ் ஆயிடை நம்பிக்கை (or பொருளுள்ள) ஆயிடை (Confidence Interval) எனவும் கூறப்படும். இவ்வாயிடையில் இரண்டு எல்லைகளாவன மேல்பொருளுள்ள எல்லை (Upper Confidence limit), கீழ்பொருளுள்ள எல்லை (Lower Confidence limit) ஆகும்.

(i) மாறற்றிறன் தெரிந்த செவ்வன் பரம்பல் ஒன்றின் இடைக்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

குடியானது இடை μ உம் மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்போது மாதிரியின் இடை $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ஆகும்.

$$\therefore \quad z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \text{ ஆகும்.}$$

நம்பிக்கைமட்டம் $1-\alpha$ எனக் கொண்டால்



$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu < z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x}-z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$\therefore$ μ இன் பொருளுள்ள ஆயிடை

$$\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

Note: பொருளுள்ள மட்டம் மாறும்போது α இன் பெறுமானம் மாறுகிறது. நியமசெவ்வன் அட்டவணையை பாவித்து $z_{\frac{\alpha}{2}}$ இன் பெறுமானம் பெறப்படும்.

உ-ம்: ஒரு நிறுவனத்தினால் உற்பத்தி செய்யப்படும் தீப்பெட்டியிலுள்ள குச்சிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நியமவிலகல் 2 ஆகும். குச்சிகளின் பொருளுள்ள எல்லைகளைக் காண்பதற்காக 10 தீப்பெட்டிகள் எடுக்கப்பட்டு சோதிக்கப்பட்ட போது குச்சிகளின் எண்ணிக்கைகள் முறையே 48, 50, 51, 49, 48, 47, 50, 52, 51, 53 என காணப்பட்டது. உற்பத்தி செய்யப்படும் தீப்பெட்டியிலுள்ள குச்சிகளின் எண்ணிக்கைகளுக்கான பொருளுள்ள எல்லைகளை, 95% பொருளுள்ள மட்டத்தில் காண்க?

தீர்வு: $\sigma = 2$

மாதியின் இடை $\bar{x} = \frac{\sum x}{10}$

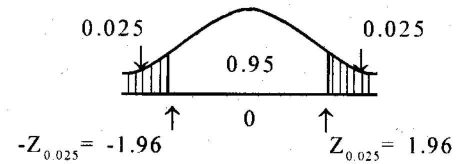
$\bar{x}$ இன்பெறுமதி $= \frac{499}{10}$

$= 49.9$

$\bar{x} \sim N(\mu, 2^2)$

$\frac{\bar{x} - \mu}{2} \sim N(0,1)$

$$P\left(-z_{0.025} < \frac{\bar{x} - \mu}{2} < z_{0.025}\right) = 0.95$$



$$\therefore \quad P\left(-1.96 < \frac{\bar{x} - \mu}{2} < 1.96\right) = 0.95$$

$\therefore$ μ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$49.9 - 1.96 * 2 < \mu < 49.9 + 1.96 * 2$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= 49.9 - 1.96 \times 2 = 46$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= 49.9 + 1.96 \times 2 = 54$

ie, மேற்குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தால் உற்பத்தி செய்யப்படும் தீப்பெட்டியிலுள்ள குச்சிகளின் சராசரி எண்ணிக்கை 46 க்கும் 54க்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கும் என 95% நம்பிக்கயுடன் கூறமுடியும்.

(ii) மாறற்றிறன் தெரியாத செவ்வன் குடியின் இடைக்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

(a) மாதிரி பருமன் பெரிதாக இருப்பின் **(n >30)**

n பெரிதாக இருக்கையில் மாதிரி மாறற்றிறன் S^2 ஆனது σ^2 இன் சிறந்த மதிப்பான் ஆகும். ஆகவே σ^2 இற்குபதிலாக S^2 ஐ பிரதியிடுவதன்மூலம் மேலுள்ள முறையிலேயே ஆயிடை கணிக்கப்படும்.

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

ie, $\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

(b) மாதிரி பருமன் சிறிதாக இருப்பின் **(n <30)**

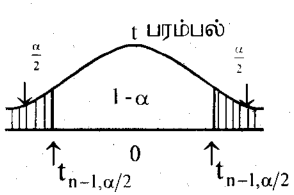
n சிறிதாக இருக்கையில் மாதிரி மாறற்றிறன் S^2 ஆனது σ^2 இன் சிறந்த மதிப்பானாக கருதுமுடியாது.

∴ செவ்வன் பரம்பலுக்குப் பதிலாக அதேபோன்ற சமச்சீரான ஆனால் செவ்வன் பரம்பலிலும் கூடிய மாறற்றிறன் உடைய t - பரம்பல் பயன்படுத்தப்படும்.

புள்ளிவிபரம் $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1,\alpha/2}$

இங்கு $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$

Note: $t_{n-1,\alpha/2}$ என்பது t - பரம்பல் அட்டவணையில் n-1 சுயாதீனப்படியும் $\frac{\alpha}{2}$ பரப்பும் கொண்டுள்ள பெறுமானம் ஆகும். இங்கு $1-\alpha$



பொருளுள்ள மட்டம்.

$$\therefore \quad p(-t_{n-1,\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{n-1,\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$p(\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

μ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$\bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

உ-ம்: குறித்த பாடசாலையிலுள்ள ஆசிரியர்களின் மாதாந்த சம்பளம் பற்றிய ஆய்வு ஒன்றில் 20 ஆசிரியர்களைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்றை எடுத்து ஆய்வுக்குட்படுத்தியபோது அவர்களின் மாதாந்த சம்பளத்தின் சராசரி 7400/= ஆகவும் மாறற்றிறன் 1000000/= ஆகவும் காணப்பட்டது. அப் பாடசாலையிலுள்ள ஆசிரியர்களின் மாதாந்த சம்பளத்திற்கான 96% பொருளுள்ள எல்லையை காண்க.

தீர்வு: குடியின் மாறற்றிறன் தெரியாது

மாதிரி பருமன் $(n = 20)$ சிறிதாகும்.

∴ S^2 ஆனது σ^2 இன் சிறந்த மதிப்பானாக கொள்ளமுடியாது.

$$\frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1,\alpha/2}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + t_{n-1,\alpha/2} * \frac{s}{\sqrt{n}}$ ஆகுமாறு கணிக்கப்படும்.

இங்கு
$$\bar{x} = 7400$$
$$S^2 = 1000000$$
$$n = 20$$
$$1-\alpha = 0.96$$
$$\Rightarrow S = 1000$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0.02$$

t - பரம்பல் அட்டவணைப் பெறுமானம் $t_{n-1,\alpha/2} = t_{19,0.02} = 2.539$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= 7400 - 2.539 \times \frac{1000}{\sqrt{20}} = 6832.26$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= 7400 + 2.539 \times \frac{1000}{\sqrt{20}} = 7967.74$

அப் பாடசாலை ஆசிரியர்களின் சம்பளம் ரூபா 6832.26 ற்கும் ரூபா 7967.74 ற்கும் இடையில் காணப்படும் என 96% நம்பிக்கை மட்டத்தில் கூறமுடியும்.

(iii) மாறற்றிறன் தெரிந்த செவ்வன் அல்லாத குடியின் இடைக்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

மாதிரி பருமன் பெரிதாக இருப்பின் $(n > 30)$ மையஎல்லைத் தேற்றப்படி,

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} < z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$\therefore$ μ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

(iv) மாறற்றிறன் தெரியாத செவ்வன் அல்லாத குடியின் இடைக்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

மாதிரி பருமன் பெரிதாக இருப்பின் $(n > 30)$ S^2 ஆனது σ^2 இன் சிறந்த மதிப்பானாக கொள்ளப்பட்டு மையஎல்லைத் தேற்றப்படி,

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$\therefore$ μ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$$ ஆகும்.

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

உ-ம்: Kandos நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் 10/= பெறுமதியான Chocolate இன் தடிப்பு பற்றி ஆய்வு செய்வதற்காக 100 Chocolate கள் எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் தடிப்பு அளக்கப்பட்ட போது அதன் சராசரி 0.5 cm ஆகவும் மாறற்றிறன் 0.05 cm ஆகவும் காணப்பட்டது. Kandos நிறுவனம் உற்பத்தி செய்யும் 10/= பெறுமதியான Chocolate இன் தடிப்புக்கான எல்லையை 99% நம்பிக்கை மட்டத்தில் காண்க.

தீர்வு: இங்கு $\bar{x} = 0.5$

$S^2 = 0.05$

$n = 100$

$1-\alpha = 0.99$

$\Rightarrow S = 0.224$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.005$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.57$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

$$= 0.5 - 2.57 \times \frac{0.224}{\sqrt{100}}$$

$= 0.443$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

$$= 0.5 + 2.57 \times \frac{0.224}{\sqrt{100}}$$

$= 0.558$

மேற்குறிப்பிட்ட Chocolate இன் தடிப்பு 0.443 cm ற்கும் 0.558 cm ற்கும் இடையில் அமையும் என 99% நம்பிக்கையுடன் கூறமுடியும்.

(v) குடிவிகிதத்திற்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

(a) குடிவிகிதம் π தெரிந்தால்

குடிவிகிதம் π ஐ கொண்ட குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பருமன் n உம் மாதிரி விகிதம் p உம் எனின், n பெரிதாக அமையும் போது

$$P \sim N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$ ஆகும்.

$$z = \frac{P-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$1-\alpha$ பொருளுள்ள மட்டத்தில்

$$P\left(-Z_{\alpha} < \frac{P-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

ie, $$P\left(P - Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < P + Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$\therefore$ π இற்கான பொருளுள்ள எல்லை

$$P - Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < \pi < P + Z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= P - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= P + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$ ஆகும்.

(b) குடிவிகிதம் π தெரியாதபோது

மாதிரியின் பருமன் பெரிது ஆகையால் p ஆனது π இன் சிறந்த மதிப்பான் ஆகும்.

$$\therefore \quad \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(P - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < \pi < P + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}\right) = 1-\alpha$$ ஆகும்.

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$ ஆகும்.

Note: (i) மாதிரியின் பருமன் சிறிதாக உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் p யின் பரம்பலானது ஈருறுப்புப்பரம்பலாக இருக்கும்.

(ii) மாதிரியின் பருமன் பெரிதாகும்போது p யின் பரம்பலானது அண்ணளவாக செவ்வன் பரம்பலில் அமைகிறது.

உ-ம்: தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளை இறக்குமதி செய்து விநியோகிக்கும் நிறுவனம் ஒன்று இறக்குமதி செய்யப்பட்ட ஒரு தொகுதியிலுள்ள பழுதடைந்த தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகள்பற்றி அறிவதற்காக தொகுதியிலிருந்து எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட 64 பெட்டிகளை பரிசீலித்தபோது 7 பழுதடைந்து காணப்பட்டது. தொகுதியிலுள்ள பழுதடைந்த தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் விகிதத்திற்கான 95% பொளுள்ள எல்லையைக் காண்க.

தீர்வு: இங்கு $n = 64$

$$p = \frac{7}{64} = 0.109$$

$$1-\alpha = 0.95$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

$$= 0.109 - 1.96\sqrt{\frac{0.109 * 0.891}{64}}$$

$$= 0.033$$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$

$$= 0.109 + 1.96\sqrt{\frac{0.109 * 0.891}{64}}$$

$$= 0.185$$

ie, $0.033 < \pi < 0.185$

ie, பழுதடைந்த தொலைக்காட்சிப் பெட்டிகளின் விகிதம் 0.033 ற்கும் 0.185 ற்கும் இடைப்பட்டதாக இருக்கும் என 95% நம்பிக்கையுடன் கூறமுடியும்.

(vi) மாறற்றிறன் தெரிந்த இரு குடிகளின் இடைகளின் வித்தியாசத்திற்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

μ_1, μ_2 இடைகளையும் σ_1^2, σ_2^2 மாறற்றிறன்களையும் கொண்ட இரண்டு குடிகளிலிருந்து பெறப்பட்ட, n_1, n_2 பருமன் கொண்ட மாதிரிகள் இரண்டின் இடைகள் முறையே $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ எனின், n_1, n_2 பெரிதாக இருப்பின் $(n_1>30, n_2>30)$

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 \sim N\left[\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right]$$ ஆகும்.

புள்ளிவிபரம் $$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

$$\therefore \quad P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_1^2}{n_1}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

ie, $$P\left((\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2_1}{n_1} + \frac{\sigma^2_2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$\therefore$ $\mu_1 - \mu_2$ இன் பொருளுள்ள ஆயிடை

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ ஆகும்.

உ-ம்: ஒரு பல்கலைக்கழகத்திற்கான புதுமுக மாணவர்கள் 60 பேரின் சராசரி உயரம் 68.60 அங்குலங்கள் ஆகவும், சிரேஸ்ட மாணவர்கள் 50 பேரின் சராசரி உயரம் 69.51 அங்குலங்கள் ஆகவும் காணப்பட்டது. உயரத்தின் நியமவிலகல் 2.48 அங்குலங்கள் எனக்கொண்டு இரண்டு வகை மாணவர்களினதும் சராசரி உயரத்தின் வித்தியாசத்திற்கான 98% நம்பிக்கை மட்டத்திலான ஆயிடையைக் காண்க.

தீர்வு: $\sigma_1 = \sigma_2 = 2.48$

$n_1 = 50$ $\qquad 1 - \alpha = 0.98$

$n_2 = 60$ $\qquad \alpha/2 = 0.01$

$\overline{x}_1 = 69.51$ $\qquad z_{\alpha/2} = 2.33$

$\overline{x}_2 = 68.60$

μ_1 - சிரேஸ்ட மாணவர்களின் சராசரி உயரம்

μ_2 - புதுமுக மாணவர்களின் சராசரி உயரம், என்க.

$\mu_1 - \mu_2$ இற்கான 98% பொருளுள்ள ஆயிடை

$$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

ie, $$(69.51 - 68.6) \pm 2.33 \times 2.48\sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{60}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= 0.91 - 1.11 = -0.20$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= 0.91 + 1.11 = 2.02$

ie, $-0.20 < \mu_1 - \mu_2 < 2.02$

(vii) மாறற்றிறன் தெரியாத இருகுடி இடைகளின் வித்தியாசத்திற்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

μ_1, μ_2 இடைகளைக் கொண்ட இரண்டு குடிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட முறையே n_1, n_2 பருமன் கொண்ட மாதிரிகளின் இடைகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ உம் மாறற்றிறன்கள் s_1^2, s_2^2 உம் எனின், n_1, n_2 பெரிதாக இருப்பின் ($n_1>30$ & $n_2>30$)

$\mu_1 - \mu_2$ இன் பொருளுள்ள ஆயிடை

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$ ஆகும்.

Note:
(1) n_1, n_2 பெரிதாகும்போது s_1^2, s_2^2 என்பன σ_1^2, σ_2^2 இன் சிறந்த மதிப்பான்கள் ஆகும்.
(2) n_1, n_2 பெரிதாகும்போது செவ்வன் அல்லாத குடிகளுக்கு மையஎல்லைத் தேற்றப்படி $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ இன் பரம்பல் அண்ணளவாக செவ்வனாக இருக்கும்.
(3) செவ்வன் குடிகளுக்கும் மேற்குறிப்பிட்ட முடிவுகள் (vi & vii) பொருத்தமானது.
(4) n_1, n_2 பருமன்கொண்ட மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட குடி செவ்வனாக இருப்பின் n_1, n_2 இன் எப்பெறுமானத்திற்கும் $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ இன் பரம்பல் செவ்வனாக இருக்கும்.

உ-ம்: ஒரு குறித்தவருடத்தில் எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட 100 வயல்களின் சராசரி நெல் விளைச்சல் ஏக்கருக்கு 1000 kg ஆகவும் மாறற்றிறன் 22500 kg ஆகவும் காணப்பட்டது. அடுத்தவருடம் இன்னொரு 100 வயல்களைக்கொண்ட மாதிரியில் சராசரி நெல் விளைச்சல் ஏக்கருக்கு 1150 kg ஆகவும் மாறற்றிறன் 12100 kg ஆகவும் காணப்பட்டது. இரு வருடங்களிலும் நாட்டின் சராசரி நெல் விளைச்சலின் வித்தியாசத்திற்கான 95% பொருளுள்ள ஆயிடையைக் காண்க.

தீர்வு: $n_1 = 100$ $\quad s_1^2 = 110^2$

$n_2 = 100$ $\quad s_2^2 = 150^2$

$\bar{x}_1 = 1150$

$\bar{x}_2 = 1000$

$1-\alpha = 0.95$ $\quad \alpha/2 = 0.025$

$z_{\alpha/2} = 1.96$

μ_1 - குறித்த ஆண்டின் சராசரி நெல் விளைச்சல்

μ_2 - அடுத்த ஆண்டின் சராசரி நெல் விளைச்சல் எனக.

$\mu_1 - \mu_2$ இன் 95% பொருளுள்ள ஆயிடை

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

ie, $$(1150-1000) \pm 1.96\sqrt{\frac{110^2}{100} + \frac{150^2}{100}}$$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை $= 150 - 36.46 = 113.54$

மேற் பொருளுள்ள எல்லை $= 150 + 36.46 = 186.46$

$113.54 < \mu_1 - \mu_2 < 186.46$

ie, இரண்டு வருடத்தினதும் சராசரி நெல் விளைச்சலின் வித்தியாசமானது 113.54 kg, இற்கும; 186.46 kg இற்கும் இடையில் இருக்கும் என்பதை 95% நம்பிக்கையுடன் கூறமுடியும்.

(viii) மாறற்றிறன் தெரியாத இரண்டு செவ்வன்குடி இடைகளின் வித்தியாசத்திற்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

μ_1, μ_2 இடைகளையும் ஒரே மாறற்றிறன்கள் σ^2 ஐயும் கொண்ட இரண்டு செவ்வன் குடிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட n_1, n_2 பருமன் கொண்ட மாதிரிகளின் இடைகள் முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ எனின்,

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$$

(t - பரம்பல், $n_1 + n_2 - 2$ சுயாதீனப்படி)

இங்கு $$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2$$ ஆகும்.

$$p\left| -t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} < \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} < t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \right| = 1 - \alpha$$

$\mu_1 - \mu_2$ இன் பொருளுள்ள எல்லைகள்

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} * s * \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Note: n_1 அல்லது n_2 சிறிதாக இருக்கும்சந்தர்ப்பத்தில் இம்முறை பாவிக்கப்படுகின்றது.

உ-ம்: தன்னிச்சையாக சீமெந்து பக்கற் செய்யும் இரண்டு இயந்திரங்கள் 25 நாட்களில் உற்பத்திசெய்த பக்கற்றுக்களின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டு ஒரு நாளில் செய்யும் பக்கற்றுக்களின் சராசரி எண்ணிக்கைகள் முறையே 1600, 1500 எனக் கணிக்கப்பட்டது. அவற்றின் நியம விலகல்கள் முறையே 25, 30 எனக் காணப்பட்டது எனில் இரண்டு இயந்திரங்களின் உற்பத்தியின் இடைகளின் வித்தியாசத்திற்கு 95% பொருளுள்ள ஆயிடையைக் காண்க.

தீர்வு: $n_1 = n_2 = 25$

$\bar{x}_1 = 1600$ $\quad s_1 = 25$

$\bar{x}_2 = 1500$ $\quad s_2 = 30$

$1 - \alpha = 0.95$

$\alpha/2 = 0.025$ $\quad t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} = t_{48,0.02}$

$= 2.41$

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$= \frac{24 \times 625 + 24 \times 900}{48} = 762.5$$

$s = 27.61$

$\therefore$ $\mu_1 - \mu_2$ இன் 95% பொருளுள்ள எல்லை

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} * s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

ie, $(1600-1500)\pm 2.41\times 27.61\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{25}}$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை = 100 - 18.82 = 81.18

மேற் பொருளுள்ள எல்லை = 100 + 18.82 = 118.82

ie, $81.18 < \mu_1-\mu_2 < 118.82$

(ix) குடிவிகிதங்கள் இரண்டின் வித்தியாசத்திற்கான பொருளுள்ள ஆயிடை

மாதிரிகளின் பருமன் பெரிதாயின் மாதிரிவிகிதங்களின் வித்தியாசம் p_1-p_2 ஆனது இடை $\pi_1-\pi_2$ உம் மாறற்றிறன் $\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$ உம் கொண்ட அண்ணளவான செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

இங்கு π_1,π_2 என்பன இரண்டு குடிகளினதும் விகிதங்களாகும்.

$$\frac{(p_1-p_2)-(\pi_1-\pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$\pi_1-\pi_2$ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$(p_1-p_2)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$$ ஆகும்.

π_1,π_2 தெரியாதபோது n_1,n_2 பெரிதாக இருப்பதால் p_1,p_2 ஆனது π_1,π_2 இன் சிறந்த மதிப்பான்களாகும்.

$\therefore$ $\pi_1-\pi_2$ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$(p_1-p_2)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$ ஆகும்.

உ-ம்: "Rexona", "Lux" சவர்க்காரங்களின் நுகர்வு பற்றிய ஆய்வில் 400 பேர் தெரிவுசெய்யப்பட்டு "Rexona" வின் நுகர்வு பற்றி கேட்டபோது 250 பேர் சாதகமாகவும், 300 பேர் தெரிவுசெய்யப்பட்டு "Lux" இன் நுகர்வுபற்றிக் கேட்டபோது 200 பேர் சாதகமாகவும் பதிலளித்தனர். இவ் விருசவர்க்காரங்களினதும் நுகர்வு விகிதத்தின் வித்தியாசத்திற்கான 95% பொருளுள்ள ஆயிடையைக் காண்க.

தீர்வு: $p_1=\frac{200}{300}=0.667$ $\quad 1-\alpha=0.95$

$p_2=\frac{250}{400}=0.625$ $\quad z_{\alpha/2}=1.96$

$\pi_1-\pi_2$ இன் பொருளுள்ள எல்லை

$$(p_1-p_2)\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1}+\frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$$ ஆகும்.

ie, $(0.667-0.625)\pm 1.96\sqrt{\frac{0.667\times 0.333}{300}+\frac{0.625\times 0.375}{400}}$

கீழ் பொருளுள்ள எல்லை = 0.042 - 0.071 = -0.029

மேற் பொருளுள்ள எல்லை = 0.042 + 0.071 = 0.113

$\therefore$ குடிவிகிதங்களின் வித்தியாசம் -0.029 இற்கும் 0.113 இற்கும் இடையில் அமையும்.

கருதுகோள் சோதனை (Testing Hypothesis)

ஒரு மாதிரியை ஆராய்ந்து படிமுறை மூலம் சில முடிவுகள் எடுக்கப்படும். இந்த முடிவுகள் குடித்தொகையில் எடுக்கப்படும் சில முடிவுகளாக இருக்கின்றன. ஆனால் இப்படியான முடிவுகள் சில அடிப்படை உறுதியின்மை காரணமாக பிழையான முடிவாக அமையும்.

கருதுகோள்

குடித்தொகைப் பரமானம் (Population Parameter) பற்றிய உண்மையாக இருக்கக்கூடிய அல்லது இருக்கமுடியாத ஒரு எடுகோள் கருதுகோள் எனப்படும்.

மாதிரி எடுத்தலின் மூலம் எடுகோளை சரிபார்ப்பதற்கு

1. தரவுகள் சேகரிப்பதன் மூலம் குடித்தொகைப் பரமானத்திற்குரிய மாதிரிப் புள்ளிவிபரத்தின் (Sample Statistic) பெறுமானங்களைக் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.
2. பொதுவாக இரண்டு கருதுகோள்கள் வரையறுக்கப்படும், ஒன்று ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்போது, மற்றையது நிராகரிக்கப்படும்.

சூனியக்கருதுகோள் (Null Hypothesis) (Ho)

கருதுகோள் சோதனையில், குறித்த சோதனையை நடத்தக்கூடியவாறு குடித்தொகை தொடர்பாக மேற்கொள்ளப்படும் எடுகோள் சூனியக் கருதுகோள் எனப்படும்.

Note: சாதாரணமாக கருதுகோள் சோதனையின் போது Ho உண்மை என்று ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்டு சோதனைகள் மேற்கொள்ளப்படுகின்றன.

உ-ம்:
1. உயர்தர வகுப்பு மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 155cm
   ie. $Ho : \mu = 155$
2. ஒரு நிறுவனத்தில் நாளாந்த தேறியவருமானம் Rs. 15,000/=
   ie. $Ho : \mu = 15,000$
3. இரண்டு பாடசாலைகள் A, B இலுள்ள உயர்தர மாணவர்களின் புள்ளிவிபரப்பாட புள்ளிகளின் சராசரி நிலை சமனானது.
   ie. $Ho : \mu_A = \mu_B$

மாற்றுக்கருதுகோள் (Alternative Hypothesis) (H_1)

சூனியக்கருதுகோள் நிராகரிக்கப்படும் சந்தர்ப்பத்தில், சூனியக்கருதுகோளுக்கு எதிரான கருதுகோள் ஒன்று ஏற்றுக்கொள்ளப்பட வேண்டிய சந்தர்ப்பம் ஏற்படும். அவ்வெதிரான கருதுகோள் மாற்றுக்கருதுகோள் எனப்படும்.

மேலுள்ள உதாரணத்தில்

சூனியக்கருதுகோள்	$Ho : \mu = 155$
மாற்றுக்கருதுகோள்	$H_1 : \mu \neq 155$
ie.	$\mu > 155$ அல்லது $\mu < 155$

அமைக்கப்பட்ட இந்த இரண்டு கருதுகோள்களில் (Ho, H_1) சூனியக்கருதுகோளானது மாதிரியை அடிப்படையாகக் கொண்டு ஏற்றுக்கொள்ளப்படும் அல்லது நிராகரிக்கப்படும். இது சில சந்தர்ப்பங்களில் இரண்டு பிழையான முடிவுகளுக்கு இட்டுச் செல்லலாம்.

அதாவது,
(i) Ho உண்மையாக உள்ளபோது Hoஐ நிராகரித்தல்.
(ii) Ho பொய்யாக உள்ளபோது Hoஐ ஏற்றுக்கொள்ளல்.

		மாதிரியிலிருந்து எடுக்கும் முடிவு	
		Ho ஏற்றுக்கொள்ளல்	Ho நிராகரித்தல்
சந்தர்ப்பம்	Ho உண்மை	சரியான முடிவு	பிழையான முடிவு (1ம் வகை வழு)
	Ho பொய் (H_1 உண்மை)	பிழையான முடிவு (2ம் வகை வழு)	சரியான முடிவு

அட்டவணைப்படி நான்கு முடிவுகளுக்கு சந்தர்ப்பங்கள் உண்டு.
அதாவது
(i) Ho உண்மையாக உள்ளபோது அது ஏற்றுக்கொள்ளப்படல். (சரியான முடிவு)
(ii) Ho பொய்யாக உள்ளபோது அது நிராகரிக்கப்படல். (சரியான முடிவு)
(iii) Ho உண்மையாக உள்ளபோது அது நிராகரிக்கப்படல். (பிழையான முடிவு)

(iv) Ho பொய்யாக உள்ளபோது அது ஏற்றுக்கொள்ளப்படல். (பிழையான முடிவு)

கருதுகோட் சோதனையின் மூலம் முடிவு எடுக்கப்படும்போது வழுக்கள் ஏற்படலாம். அதாவது சரியான எடுகோள்கள் நிராகரிக்கப்படுதலும், பொய்யான எடுகோள்கள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுதலும் ஆகும். இவ்வாறான வழுக்கள் இருவகைப்படும்.

1. முதலாம் வகை வழு (Type I Error)

இது சூனியக்கருதுகோள் Ho உண்மையாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் அதை நிராகரித்தலாகும். இந்நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு பொதுவாக α என குறிக்கப்படும்.

ie, α = P (Ho நிராகரித்தல்/ Ho உண்மை)

2. இரண்டாம் வகை வழு (Type II Error)

இது சூனியக்கருதுகோள் Ho பொய்யாக உள்ள சந்தர்ப்பத்தில் அதை ஏற்றுக்கொள்ளுதல் ஆகும். இந்நிகழ்ச்சிக்கான நிகழ்தகவு பொதுவாக β என குறிக்கப்படும்.

ie, β = P (Ho ஏற்றுக்கொள்ளல்/ Ho பொய்)

ie, β = P (H_1 நிராகரித்தல்/ H_1 உண்மை) எனவும் கூறலாம்.

Note: இவ் வழுக்களைக் குறைப்பதற்கு மாதிரிப்பருமனை (Sample Size - n) அதிகரித்தல் வேண்டும்.

பொருண்மை மட்டம் (Level of Significant) (α)

ஒரு கருதுகோட் சோதனையில் ஏற்படும் முதலாம் வகை வழுவிற்கான நிகழ்தகவு α இன் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட அளவு பொருண்மை மட்டம் எனப்படும். இது ஒரு சோதனையின் பருமன் (Size of a Test) எனவும் கூறப்படும். இதன் மிகுதி (1-α) ஆனது சோதனையை ஏற்றுக் கொள்வதற்கான நம்பிக்கை மட்டம் (Level of Confidence) எனப்படும். பொதுவாக புள்ளிவிபர சோதனையில் α = 0.05 அல்லது 5% எனக்கொள்ளப்படும். அதாவது நம்பிக்கைமட்டம் 1-α = 0.95 அல்லது 100 - α = 95% எனக்கொள்ளப்படும்.

அவதிப்பிரதேசம் (Critical Region)

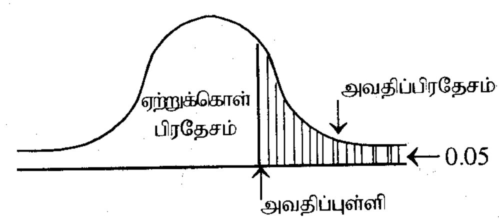
மாறலின் வீச்சானது இரண்டு பிரதேசங்களாக இருக்கின்றது. அதாவது, ஏற்றுக்கொள் பிரதேசம் (Acceptance Region), அவதிப்பிரதேசம் அல்லது நிராகரித்தல் பிரதேசம் (Rejection Region) என இரண்டு பிரதேசங்களாகும்.

மாதிரிப் புள்ளிவிபரமானது அவதிப்பிரதேசத்தில் இருக்குமாயின் சூனியக்கருதுகோளானது பிழையான முடிவுக்கு இட்டுச்செல்வதாக அதை நிராகரித்தல் வேண்டும். மறுதலையும் உண்மையாகும்.

ie, கணிக்கப்பட்ட மாதிரிப்புள்ளிவிபரத்தின் பெறுமானம் நிராகரிக்கப்படும் பிரதேசத்தில் இருக்குமாயின், H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும், மறுதலையும் உண்மையாகும்.

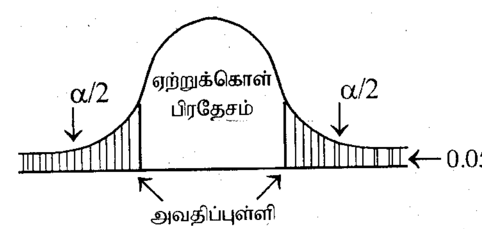
Note: அவதிப்பிரதேசமானது முதலாம் வகை வழு α இன் மாறாப் பெறுமானத்தில் அமையுமாறு தீர்மானிக்கப்படும். மேலும் இது மாதிரிப்புள்ளிவிபரங்களில் ($\overline{x}$ போன்றவை) தங்கியிருக்கும்.

ஒரு செவ்வன் பரம்பலில், α = 0.05

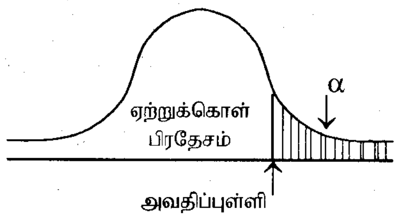


ஒரு செவ்வன் பரம்பலின் கீழ் மேற்குறிப்பிட்டது போல, அவதிப்பிரதேசத்தை இரண்டுவகையாக பிரிக்கலாம்.

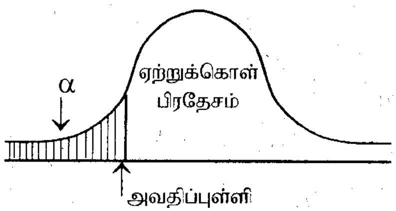
(i) இரண்டு பக்கம் (Two Sided) அல்லது இரண்டு வால் (Two Tailed) களாக வளையியின் கீழ் அமைத்தல்.



(ii) ஒருபக்கம் (One Sided) அல்லது ஒரு வால் (One Tailed) ஆக வளையியின் கீழ் அமைத்தல்.



வலதுவால் (Right Tail)



இடதுவால் (Left Tail)

இவைபற்றி பின்னர் மேலும் விளக்கமாக பார்க்கப்படும்.

கருதுகோள் சோதனையின் வலிமை (Power of a Test)

ஒரு கருதுகோள் சோதனையில் சூனியக்கருதுகோள் பொய்யாக இருக்கையில் அதை நிராகரிப்பதற்கான நிகழ்தகவு ஆகும்.

ie, Power = P (Ho நிராகரித்தல்/Ho பொய்)
= P (H_1 ஏற்றுக்கொள்ளல்/H_1 உண்மை)
= 1- P (H_1 நிராகரித்தல்/H_1 உண்மை)
= 1- β இங்கு β இரண்டாம் வகை வழு ஆகும்.

ie, H_1 உண்மையாக இருக்கையில் H_1 நிராகரிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகும்.

Note: இரண்டு சோதனைகளை ஒப்பிடும்போது, ஒரே பொருண்மை மட்டம் α இல் கூடியவலிமை (உயர் $1-\beta$) கொண்ட சோதனையானது சிறந்த சோதனையாக (Most Powerful Test) கருதப்படும்.

Result: இடை μ வும் மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்டு செவ்வனாக பரம்பும் குடியிலிருந்து n அளவுகொண்ட எழுமாற்றுமாதிரி எடுக்கப்படும்போது அதன் மாதிரி இடை $\bar{x}$ ஆனது இடை μ உம் மாறற்றிறன் $\dfrac{\sigma^2}{n}$ உம் கொண்ட செவ்வன் பரம்பலில் அமையும்.

ie, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow \bar{x} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ இங்கு $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots. + x_n}{n}$

இங்கு குடியின் இடை μ தெரியாத சந்தர்ப்பத்தில் $H_0 : \mu = \mu_0$, (μ_0 - தெரிந்த பெறுமானம்) எனும் சூனியக்கருதுகோள் சோதிக்கப்பட வேண்டும்.

மாதிரிப்புள்ளிவிபரம் $$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

H_0 உண்மையாகும் போது $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ ஆகும்.

ஆகவே மாதிரிப்புள்ளிவிபரம் $$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$ ஆனது குறிப்பிட்ட சோதனைக்குரிய சோதனைப்புள்ளிவிபரம் (Test Statistic) ஆகும்.

$H_0 : \mu = \mu_0$ என்னும் சூனியக்கருதுகோளுக்கான மாற்றுக்கருது கோளானது கீழ்வரும் ஏதாவது ஒரு வடிவில் வரையறுக்கப்படலாம்

(i) $H_1 : \mu \neq \mu_0$

(ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

(iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

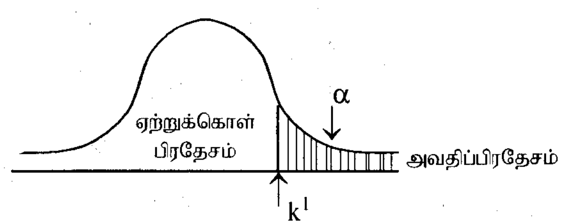
Note: H_1 இன் வரையறுக்கப்பட்ட வடிவத்திற்கேற்ப அவதிப்பிரதேசம் மாறுபடும்.

(1) $H_0 : \mu = \mu_0$ எதிர் $H_1 : \mu > \mu_0$ எனும் சோதனை
(வலதுவாற் சோதனை /Right tail test)
அவதிப்பிரதேசமானது $\bar{x} > k$ எனும் வடிவில் அமையும்.

ie, $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rangle \dfrac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = k^1$ (என் க)

இங்கு k^1 ஒரு மாறிலி ஆகும். இதன் பெறுமதி பொருண்மைமட்டம் α இற்கு அமைய தீர்மானிக்கப்படும்.

Note: $Z > k^1$ என்பதிலிருந்து, புள்ளிவிபரம் Z ன் பெறுமதியானது k^1 இலும் பெரிதாக அமையும் சந்தர்ப்பங்களில் Ho நிராகரிக்கப்படும். இங்கு k^1 என்பது அவதிப் பெறுமானம் ஆகும். இது செவ்வன் வளையியின் வலது வாலில் அமைவதால் இதை வலதுவாற் சோதனை என்போம்.



(வலதுவாற்சோதனை)

$\alpha = p(Z \rangle k')$ என அமையும், இங்கு $Z \sim N(0,1)$

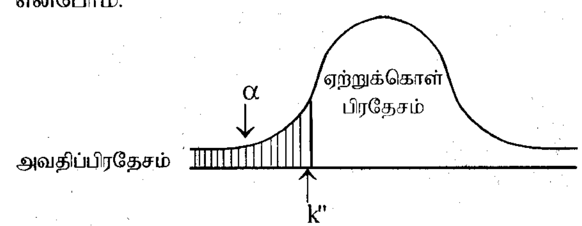
(2) $H_0 : \mu = \mu_0$ எதிர் $H_1 : \mu < \mu_0$ எனும் சோதனை
(இடதுவாற் சோனை /Left tail test)

அவதிப்பிரதேசமானது $\bar{x} < k$ எனும் வடிவில் அமையும்.

ie, $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \langle \dfrac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = k''$ (என் க)

இங்கு k'' ஒரு மாறிலி ஆகும். இதன் பெறுமதி பொருண்மைமட்டம் α இற்கு அமைய தீர்மானிக்கப்படும்.

Note: $z < k''$ என்பதிலிருந்து, புள்ளிவிபரம் z ன் பெறுமதியானது k'' இலும் சிறிதாக அமையும் சந்தர்ப்பங்களில் Ho நிராகரிக்கப்படும். இங்கு k'' என்பது அவதிப்பெறுமானம் ஆகும். இது செவ்வன் வளையியின் இடதுவாலில் அமைவதால் இதை இடதுவாற் சோதனை என்போம்.



(இடதுவாற் சோதனை)

$\alpha = P(z < k'')$ என அமையும் இங்கு $Z \sim N(0,1)$

(3) $H_0 : \mu = \mu_0$ எதிர் $H_1 : \mu \neq \mu_0$ எனும் சோதனை
(இரட்டைவாற் சோதனை/ Two tail test)

அவதிப்பிரதேசமானது $\{\bar{x} < k \;\&\; \bar{x} > k'\}$ என அமையும். இங்கு $k<k'$

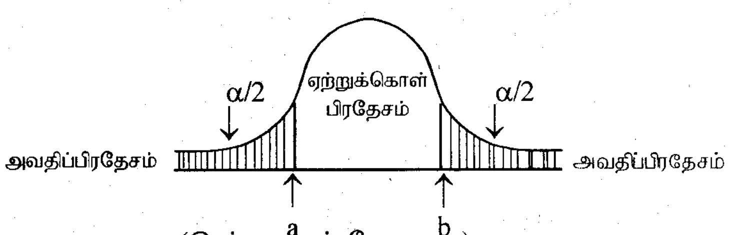
ie, $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \dfrac{k - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = a$ (என் க)

$$z = \frac{\bar{x}-\mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{k-\mu_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = b(\text{என் க})$$

$\therefore$ $z < a$ உம் $z > b$ உம் ஆகும்.

இங்கு $a, b\ (a < b)$ என்பன சோதனைக்குரிய பொருண்மை மட்டம் α விற்கு அமைய தீர்மானிக்கப்படும்.

Note: $z < a, z > b$ என்பதிலிருந்து, புள்ளிவிபரம் z ன் பெறுமானம் a இலும் சிறிதாக அல்லது b இலும் பெரிதாக இருக்கும் சந்தர்ப்பங்களில் Ho நிராகரிக்கப்படும். இங்கு a, b என்பன அவதிப்பெறுமானங்களாகும். இவை செவ்வன் வளையியின் இரண்டு வாற்பகுதியிலும் அமைவதால் இதை இரட்டை வாற்சோதனை என்போம்.



(இரட்டைவாற் சோதனை)

உ-ம் 1: மின்குமிழ்களை உற்பத்திசெய்யும் நிறுவனமொன்றில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தின் சராசரி 1600 hrs ஆகவும், நியமவிலகல் 120 hrs ஆகவும் காணப்பட்டது. மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தை அதிகரிக்கச் செய்யும் முகமாக உற்பத்திச் செயன்முறையில் சில மாற்றங்கள் கொண்டு வரப்பட்டது. புதிய உற்பத்தியின் மாதிரியாக 100 மின்குமிழ்கள் எடுக்கப்பட்டு சோதிக்கப்பட்டபோது அதன் ஆயுட்காலத்தின் சராசரி 1630 hrs ஆக காணப்பட்டது. செயன்முறை மாற்றம் பலனளித்துள்ளதா என $\alpha = 0.05$ பொருண்மைமட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு: கருதுகோள் $H_0 : \mu = 1600$ எதிர் $H_1 : \mu > 1600$

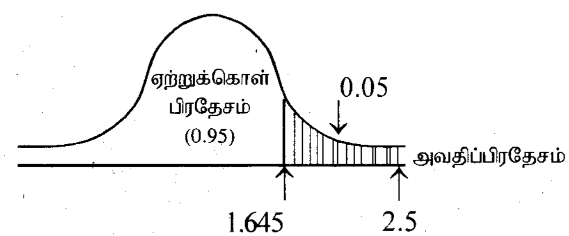
(வலதுவாற்சோதனை)

$x = 1630, \quad \sigma = 120, \quad \mu_0 = 1600, \quad n = 100$

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ இன் பெறுமானம்

$$= \frac{1630-1600}{120/\sqrt{100}} = 2.5$$

$\alpha = 0.05$ இல் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = 1.645$



$\alpha = 0.05$ மட்டத்தில்

கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 2.5 > அவதிப் பெறுமானம் 1.645.

$\therefore$ Ho நிராகரிக்கப்படும்.

H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலம் 1600hrs இலும் அதிகரித்துள்ளது.

ie, உற்பத்தி செயன்முறை மாற்றம் பலனளித்துள்ளது.

உ-ம் 2: ஒரு நிறுவனத்தின் சுருக்கெழுத்தாளர் பதவிக்கான விளம்பரத்தில் நிமிடத்திற்கு சராசரி 120 சொற்களுடன் 15 சொற்கள் நியமவிலகலாக இருக்குமாறு கோரப்பட்டது. அந்த வெற்றிடத்திற்கு தெரிவுசெய்யப்பட்டவர் 100 தடவைகள்

சோதிக்கப்பட்டபோது நிமிடத்திற்கு சராசரி 116 சொற்கள் என காணப்பட்டது. இதிலிருந்து அந்த சுருக்கெழுத்தாளர் சராசரி எழுத்து வீதம் 120 இலும் குறைவானதா என 5% பொருண்மை மட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு: கருதுகோள் $H_0 : \mu = 120$ எதிர் $H_1 : \mu < 120$

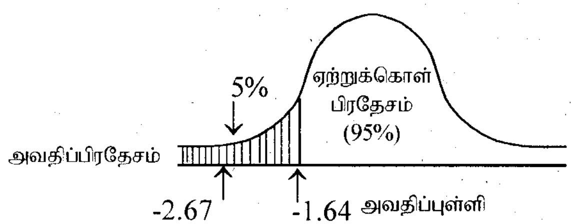
(இடது வாற்சோதனை)

$\mu_0 = 120, \quad \bar{x} = 116, \quad \sigma = 15, \quad n = 100$

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ இன் பெறுமானம்

$$= \frac{116-120}{\frac{15}{\sqrt{100}}} = -2.67$$

5% மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = -1.64$



5% பொருண்மை மட்டத்தில்
கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் (-2.67) < அவதிப் பெறுமானம் (-1.64)

∴ Ho நிராகரிக்கப்படும்.
H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, தெரிவு செய்யப்பட்ட சுருக்கெழுத்தாளரின் சராசரி எழுத்துவீதம் நிமிடத்திற்கு 120 இலும் குறைவானது ஆகும்.

உ-ம் 3: Coca-Cola நிறுவனத்தில் உற்பத்தி செய்யப்படும் மென்பானங்கள் நாளுக்கு 15000 போத்தல்கள் எனக் கூறப்படுகிறது. இதன் நியமவிலகல் 800 போத்தல்கள் ஆகும். 36 நாட்களைக்கொண்ட ஒரு மாதிரியை சோதித்தபோது நாளுக்கு அடைக்கப்படும் போத்தல்களின் சராசரி எண்ணிக்கை 14800 என காணப்பட்டது. நிறுவனத்தின் கூற்றின் உண்மையை α = 0.05 பொருண்மை மட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு: சோதனை, $H_0 : \mu = 15000$ எதிர் $H_1 : \mu \neq 15000$

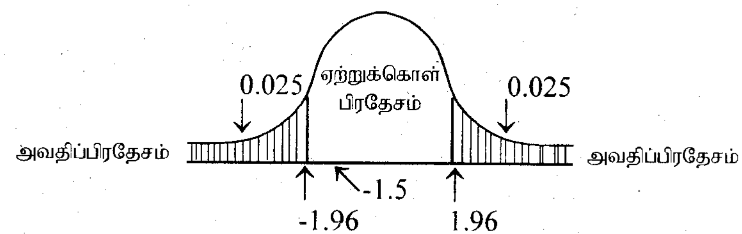
(இரட்டை வாற்சோதனை)

$\bar{x} = 14800, \quad \mu = 15000, \quad n = 36, \quad \sigma = 800$

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ இன் பெறுமானம்

$$= \frac{14800 - 15000}{800/\sqrt{36}} = -1.5$$

α = 0.05 மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் $z_{\alpha/2} = 1.96$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் அவதிப் பெறுமானங்களுக்கு இடையில் அமைவதால்

ie, -1.96 < -1.5 < 1.96

∴ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, Coca-Cola நிறுவனத்தில் நாளொன்றுக்கு சராசரியாக 15000 போத்தல்கள் மென்பானம் நிரப்பப்படுகிறது.

மேற்குறிப்பிட்ட உதாரணங்களில் குடித்தொகை மாறற்றிறன் σ^2 தெரிந்திருந்தது. இது தெரியாத சந்தர்ப்பத்தில் மேற்குறிப்பிட்ட சோதனைகளைச் செய்வதற்கு இரண்டுவகையாக நோக்க வேண்டும்.

1. எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பருமன் பெரிதாக இருத்தல் (n > 30)

இந்த வகையில், σ^2 அறியப்படாத சந்தர்ப்பத்தில், σ^2 இன் சிறந்த மதிப்பானாக (Best Estimator) மாதிரியின் மாறற்றிறன் S^2 பாவிக்கப்படும்.

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

இப்புள்ளிவிபரத்தைக்கொண்டு

$H_0 : \mu = \mu_0$ எதிர் $H_1 : \mu \neq \mu_0$

அல்லது $H_1 : \mu < \mu_0$

அல்லது $H_1 : \mu > \mu_0$

எனும் சோதனையை மேலே விபரிக்கப்பட்டது போன்று செய்யமுடியும்.

2. எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பருமன் சிறிதாக இருத்தல (n < 30)

மாதிரியின் பருமன் சிறிதாக இருக்கையில், மேற்குறிப்பிட்ட

சோதனைப்புள்ளிவிபரம $\dfrac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ ஆகும்

ie, t - பரம்பலில் n - 1 சுயாதீனப்படியை (Degrees of Freedom) கொண்டிருக்கும்.

உ-ம் 4: ஒரு தன்னிச்சையாக தேயிலை பக்கற்பண்ணும் இயந்திரம் சரியாக 2.0kg பக்கற்றுகள் தயாரிக்குமாறு சரிசெய்யப் பட்டிருந்தது. இந்த இயந்திரத்தினால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பக்கற்றுகளில் 100 பக்கற்றுகள் மாதிரி எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் நிறைகளின் சராசரி, நியமவிலகல் கணிக்கப்பட்டபோது முறையே 1.99kg, 0.10kg ஆக காணப்பட்டது. இயந்திரம் சரியாக வேலை செய்கிறதா என்பதை சோதிக்க. $(\alpha = 0.05)$

தீர்வு: சோதனை $H_0 : \mu = 2.0$ எதிர் $H_1 : \mu \neq 2.0$

(இரட்டை வாற்சோதனை)

$\mu_0 = 2.0, \quad \bar{x} = 1.99, \quad s = 0.10, \quad n = 100$

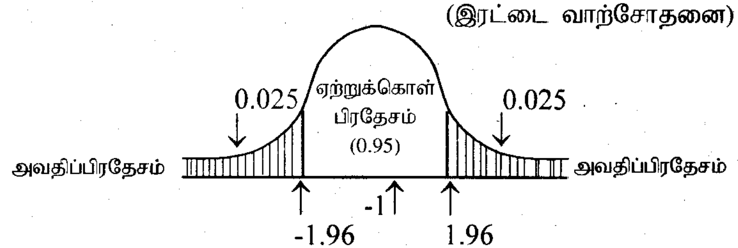
மாதிரியின் பருமன் பெரிதாக உள்ளதால்

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$\therefore$ Z இன் பெறுமானம் $= \dfrac{1.99 - 2.0}{0.10/\sqrt{100}} = -1$

$\alpha = 0.05$ இல் அவதிப்பெறுமானம் $z_{\alpha/2} = 1.96$

(இரட்டை வாற்சோதனை)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் ஏற்றுக்கொள் பிரதேசத்திற்குள் அமைவதால்

ie, $-1.96 < -1 < 1.96$

$\therefore$ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

$\therefore$ இயந்திரம் சரியாக வேலைசெய்கிறது.

உ-ம் 5: உதாரணம் 4 இல் எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் அளவு 16 என அமையும் எனின் இயந்திரம் சரியான நிறையுடைய பக்கற் தயாரிக்கிறதா என்பதை சோதிக்க.

தீர்வு: சோதனை $H_0 : \mu = 2.0$ எதிர் $H_1 : \mu \neq 2.0$

$\mu_0 = 2.0, \quad \bar{x} = 1.99, \quad s = 0.10, \quad n = 16$

மாதிரியின் அளவு சிறிதாக உள்ளதால்

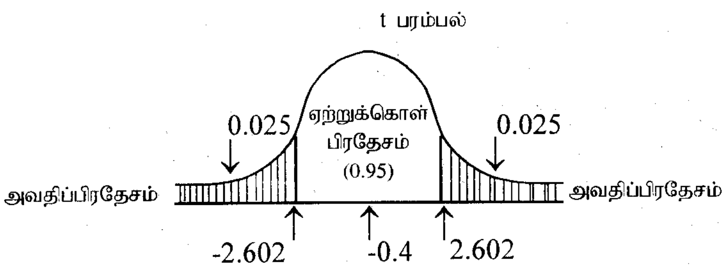
சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$

(t - பரம்பல், n - 1 சுயாதீனப்படி)

$\therefore$ t இன் பெறுமானம் $= \dfrac{1.99 - 2.0}{0.10/\sqrt{16}} = -0.4$

α = 0.05 இல் பரம்பல் பெறுமானம் (அவதிப்பெறுமானம்)

$t_{16-1, \alpha/2} = 2.602$ (இரட்டை வாற்சோதனை)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் அவதிப்பெறுமானத்திற்கு இடையில் அமைவதால்

ie, $-2.602 < -0.4 < 2.602$

$\therefore$ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, இயந்திரம் சரியானமுறையில் செயற்படுகிறது.

குடித்தொகை விகிதத்திற்கான சோதனை
(Test of population proportion)

குடித்தொகை விகிதம் π ஆகக் கொண்ட குடித்தொகையிலிருந்து எழுமாற்றாக n பருமனுடைய மாதிரி எடுக்கப்படும் போது மாதிரி விகிதம் (Sample Proportion) p ஆக இருப்பின், மாதிரிப் பருமன் பெரிதாக இருக்கும்போது $(n > 30)$,

$$P \sim N\left(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{n}\right)$$ எனக்கொள்ளலாம்.

$$\frac{P - \pi}{\sqrt{\dfrac{\pi(1-\pi)}{n}}} \sim N(0,1)$$ ஆகும்

எனவே $H_0 : \pi = \pi_0$ எதிர் $H_1 : \pi \neq \pi_0$

அல்லது $H_1 : \pi > \pi_0$

அல்லது $H_1 : \pi < \pi_0$ என சோதிப்பதற்கு

சோதனைப் புள் ளிவிபரம் $$Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\dfrac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$$ என கொள் ளப் படும்

Note: இங்கு கருதப்படும் மாதிரி அளவு பெரிதாக இருத்தல் வேண்டும். $(n > 30)$. அப்படி இல்லாத சந்தர்ப்பத்தில் p இன் பரம்பல் செவ்வன் என கொள்ள முடியாது. மேலும் n சிறிதாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் ஈருறுப்பு பரம்பலில் p இருப்பதாக கொள்ளப்பட்டு சோதிக்கப்பட வேண்டும்.

உ-ம் 6: அப்பிள் விற்பனை செய்யும் ஒரு மொத்த வியாபாரி, அவர் விற்பனை செய்யும் அப்பிள்களில் 4% ஆனவை பழுதடைந்திருக்கும் என கூறுகின்றார். எழுமாறாக எடுக்கப்பட்ட 600 அப்பிள்களைக்கொண்ட மாதிரியில் 36 பழுதடைந்திருந்தன. மொத்த வியாபாரியின் கூற்றை சோதிக்க. α = 0.05

தீர்வு: கருதுகோள்: $H_0 : \pi = 0.04$

$H_1 : \pi > 0.04$ (வலது வாற்சோதனை)

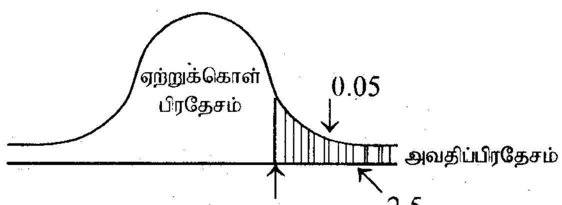
$\pi_0 = 0.04, \quad n = 600$

மாதிரி விகிதம் $P = \frac{36}{600} = 0.06$

சோதனைப் புள்ளிவிபரம் $Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$

இன் பெறுமானம் $= \frac{0.06 - 0.04}{\sqrt{\frac{0.04 \times 0.96}{600}}} = 2.5$

$\alpha = 0.05$ இல் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = 1.65$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 2.5 > அவதிப்பெறுமானம் 1.65

∴ Ho நிராகரிக்கப்படும்

ie, வியாபாரியின் கூற்று பிழையானது.

ie, விற்பனையின் போது பழுதடைந்த அப்பிள்கள் 4% இலும் கூடவாக இருக்கும்.

உ-ம் 7: ஒரு நாணயம் 400 தடவைகள் சுண்டப்பட்டபோது 216 தடவைகள் தலைவிழுகின்றது. அந்த நாணயம் கோடாததா (Unbiased) என்பதை சோதிக்க. ($\alpha = 0.05$)

தீர்வு: நாணயம் கோடாதது எனின் $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$

சோதனை $H_0 : \pi = \frac{1}{2}$ எதிர் $H_1 : \pi \neq \frac{1}{2}$

(இரட்டை வாற்சோதனை)

$\pi_0 = \frac{1}{2}, \quad n = 400,$

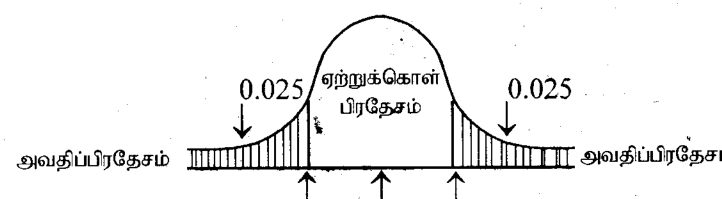
மாதிரி விகிதம் $= \frac{216}{400} = 0.54$

சோதனைப் புள்ளிவிபரம் $Z = \frac{P - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$

இன் பெறுமானம் $= \frac{0.54 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}} = 1.6$

$\alpha = 0.05$ இல் அவதிப்பெறுமானம் $z_{\alpha/2} = 1.96$

(இரட்டை வாற்சோதனை)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் அவதிப்பெறுமானத்திற்கிடையில் அமைவதால்

ie, $-1.96 < 1.6 < 1.96$

∴ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, நாணயம் கோடாதது

குடித்தொகை இரண்டின் இடைகளுக்கிடையிலான வித்தியாசத்தைச் சோதித்தல் (Test of the difference between two means)

(i) n_1, n_2 பருமனுடைய இரண்டு எழுமாற்று மாதிரிகள் (Random Sample) μ இடையும், σ^2 மாறற்றிறனும் கொண்ட ஒரே குடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டு மாதிரிகளினதும் இடைகள் முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ஆகுமெனின்

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$ என்பது சோதனைப் புள்ளிவிபரமாக இருக்கும.

Note: இங்கு இரண்டு மாதிகளுக்கிடையிலான நிலைமாறுதல் (Fluctuation) சோதிக்கப்படும்.

(ii) n_1, n_2 பருமனுடைய இரண்டு எழுமாற்று மாதிரிகள் முறையே σ_1^2, σ_2^2 மாறறறிறன்களைக் கொண்ட இரண்டு வேறுபட்ட குடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. இரண்டு குடியினதும் இடைகள் μ_1, μ_2 உம் மாதிரிகளின் இடைகள் முறையே $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ உம் எனின்

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$ ஆகும்

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

இங்கு இரண்டு குடித்தொகைகளின் இடைகளின் சமமின்மைகளை சோதிக்கலாம்.

கருதுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எதிர் $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

அல்லது $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

அல்லது $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ ஆகும்.

Note: (1) இங்கு n_1, n_2 பெரிதாக இருத்தல் வேண்டும். ie, $n_1 > 30, n_2 > 30$

(2) இரண்டு மாதிரிகளும் சாரா (Independent) மாதிரிகளாக இருத்தல் வேண்டும்.

(3) மாறற்றிறன்கள் தெரிந்த செவ்வன் குடிக்கு, எல்லா மாதிரி அளவுகளுக்கும் மேற்குறிப்பிட்ட சோதனைகள் வலிதானவை.

(4) மேற்குறிப்பிட்ட சோதனையில் σ_1^2, σ_2^2 தெரிந்திருத்தல் வேண்டும். இவை தெரியாத சந்தர்ப்பங்களில் n_1, n_2 இரண்டும் பெரிதாக அமைந்தால் σ_1^2, σ_2^2 என்பன அவற்றின் மதிப்பான்களான மாதிரி மாறற்றிறன்கள் S_1^2, S_2^2 இனால் பிரதியிடப்படும்.

இங்கு $S_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)^2$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)$$ ஆகும்

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

(iii) n_1, அல்லது n_2 சிறிதாக இருக்கும் சந்தர்ப்பத்தில் μ_1, μ_2 இடையாகவும், ஆனால் ஒரே மாறற்றிறன் σ^2 உம் கொண்ட இரண்டு செவ்வன் குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு n_1, n_2 பருமன் கொண்ட மாதிரிகளின் இடைகள் முறையே $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ ஆகவும் இருப்பின்

மாதிரிமாற்றற்றிறன் $$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_{1i} - \overline{x_1}\right)^2$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_{2i} - \overline{x_2}\right)^2 \quad \text{ஆகும்}$$

$$S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad \text{என்க}$$

இங்கு S^2 என்பது ஒன்று சேர்ந்த மாறற்றிறன் (Pooled Variance) எனப்படும்.

சோதனைப்புள்ளிவிபரம
$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$$

(t - பரம்பல், $n_1 + n_2 - 2$ சுயாதீனப்படி)

மேற்குறிப்பிட்ட சோதனைப்புள்ளி விபரத்தைக் கொண்டு

கருதுகோள் $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எதிர் $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

அல்லது $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

அல்லது $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

என்பது சோதனை செய்யப்படும்.

Note: 1. t - பரம்பல் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி அவதிப்பெறுமானம் கணிக்கப்படும்.

2. n_1, n_2 இரண்டும் பெரிதாக (>30) அமையும்போது செவ்வன் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி அவதிப்பெறுமானம் கணிக்கலாம்.

உ-ம்: ஒரேவகை ஆணிகளின் மாதிரிகள் இரண்டு 1000, 2000 அளவு எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் நீளங்களின் இடை முறையே 67.5cm, 67.8cm ஆக கணிக்கப்பட்டது. இரண்டு மாதிரிகளும் 4.5cm நியம விலகலைக் கொண்ட ஒரே குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக இருக்கமுடியுமா? ($\alpha = 0.05$)

தீர்வு: மாதிரி I $n_1 = 1000$

$\overline{x}_1 = 67.5\text{cm}$

மாதிரி II $n_2 = 2000$

$\overline{x}_2 = 67.8\text{cm}$

மாதிரிகள் எடுக்கப்பட்ட குடியின் இடைகள் μ_1, μ_2 என்க.

$\sigma = 4.5\text{cm}$

சோதனை $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எதிர் $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

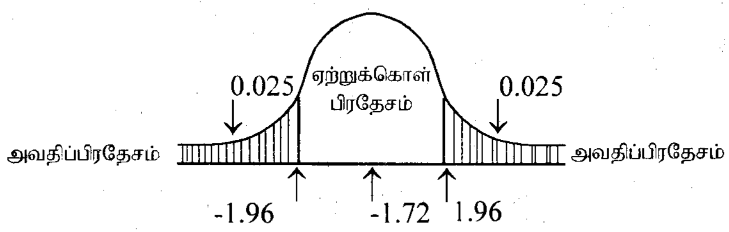
(இரு வாற்சோதனை)

சோதனைபுள் ளிவிபரம் $$Z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

$$Z\text{இன் பெறுமானம்} = \frac{67.5 - 67.8}{4.5\sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}}} = -1.72$$

$\alpha = 0.05$ இல் அவதிப்பெறுமானம் $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

(இரு வாற்சோதனை)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் அவதிப்பெறுமானத்திற்கிடையில் அமைவதால் ie, $-1.96 < -1.72 < 1.96$

$\therefore$ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, இரண்டு மாதிரிகளும் நியமவிலகல் 4.5 cm கொண்ட ஒரே குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது.

உ-ம்: ஆயுட்காலத்தில் நியமவிலகல் 125hrs, 128hrs கொண்ட இரண்டு வகை மின்குமிழ்களைத் தயாரிக்கும் நிறுவனங்களிலிருந்து முறையே 60, 80 மின்குமிழ் மாதிரிகளை எடுத்து சோதித்தபோது ஆயுட்காலத்தின் சராசரிகள் முறையே 1282hrs, 1208hrs ஆக காணப்பட்டது. ஒருவர் மின்குமிழ் வாங்கும்போது எந்த நிறுவன உற்பத்தியை தெரிவுசெய்வார் $(100\alpha = 5)$.

தீர்வு: $\sigma_1 = 125$ $\quad \sigma_2 = 128$

$n_1 = 60$ $\quad n_2 = 80$

$\overline{x_1} = 1282$ $\quad \overline{x_2} = 1208$

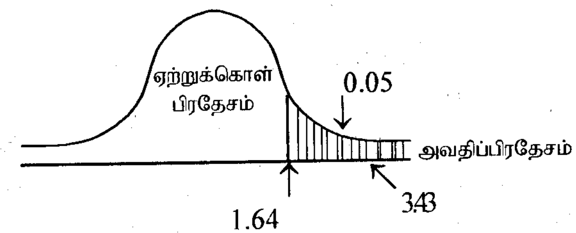
சோதனை $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எதிர் $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

(வலது வாற்சோதனை)

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \dfrac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$

z இன் பெறுமானம் $= \dfrac{1282 - 1208}{\sqrt{\dfrac{125^2}{60} + \dfrac{128^2}{80}}} = 3.43$

$\alpha = 5/100$ அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = 1.64$



கணிக்கப்பட்டபெறுமானம் 3.43 > அவதிப்பெறுமானம்

$\therefore$ H_0 நிராகரிக்கப்படும்

ie, H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ஆயுட்காலம் 125hrs நியமவிலகலாகக் கொண்ட நிறுவனஉற்பத்தி மின்குமிழ்களை தெரிவுசெய்வார்.

உ-ம்: மேல்மாகாணம், மத்தியமாகாணம் ஆகியவற்றில் உள்ள தொழிலாளர்களின் நாளாந்த சம்பளம்பற்றிய ஆய்வு ஒன்றில் இரண்டு மாகாணத்திலிருந்தும் முறையே 1000, 1500 தொழிலாளர்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டு அவர்களின் நாளாந்த சம்பளத்தின் சராசரியும் நியம விலகலும் முறையே Rs. 85/-, Rs. 3/- உம் Rs. 80/-, Rs. 4/- உம் ஆக கணிக்கப்பட்டது. இரண்டு மாகாணத் தொழிலாளர்களின் சம்பளம்பற்றி சோதிக்க. $(\alpha = 5\%)$

தீர்வு: சோதனை $H_0 : \mu_w = \mu_c$ எதிர் $H_1 : \mu_w > \mu_c$

(வலது வாற்சோதனை)

$s_w = 3$ $\quad \overline{x}_w = 85$ $\quad n_w = 1000$

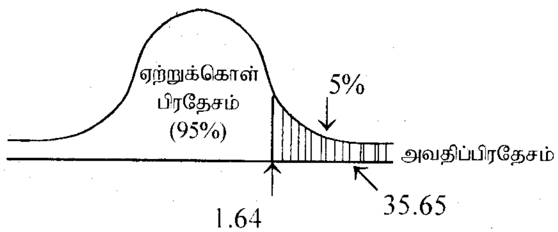
$s_c = 4$ $\quad \overline{x}_c = 80$ $\quad n_c = 1500$

n_w & n_c என்பன பெரிய பெறுமானம்

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $z = \frac{(\bar{x}_w - \bar{x}_c) - (\mu_w - \mu_c)}{\sqrt{\frac{s_w^2}{n_w} + \frac{s_c^2}{n_c}}} \sim N(0,1)$

z இன் பெறுமானம் $= \frac{85-80}{\sqrt{\frac{3^2}{1000}+\frac{4^2}{1500}}} = 35.65$

α = 5% மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = 1.64$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 35.65 > அவதிப்பெறுமானம் 1.64
$\therefore H_0$ நிராகரிக்கப்படும்

ie. மேல்மாகாணத்திலுள்ள தொழிலாளர் சம்பளம் மத்தியமாகாணத்திலுள்ள தொழிலாளர் சம்பளத்திலும் உயர்வானது.

உ-ம்: இரண்டு பாடசாலை மாணவர்களின் புள்ளிவிபரவியல் பாடத்திறமையை சோதிப்பதற்கு பாடசாலை A யிலிருந்து 15 மாணவர்களையும் பாடசாலை B யிலிருந்து 22 மாணவர்களையும் எடுத்து சோதித்தபோது அவர்கள் பெற்ற பெறுபேறுகளின் சராசரி முறையே 65, 68 ஆகவும் நியமவிலகல் முறையே 3.5, 4 ஆகவும் காணப்பட்டது. பாடசாலைத்தரத்தை சோதிக்க. $(\alpha = 0.05)$

தீர்வு: $n_A = 15$ $\quad n_B = 22$

$\bar{x}_A = 65$ $\quad \bar{x}_B = 68$

$S_A = 3.5$ $\quad S_B = 4$

சோதனை $H_0 : \mu_A = \mu_B$ எதிர் $H_1 : \mu_A < \mu_B$
(இடது வாற்சோதனை)

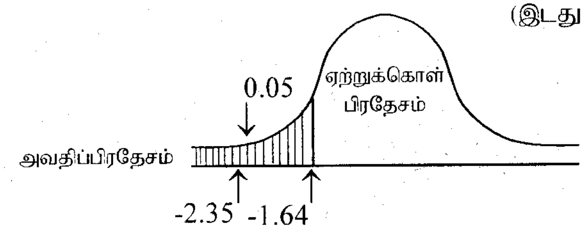
n_A, n_B சிறிதாக இருப்பதால், மாணவர்பெற்ற புள்ளிகள் செவ்வன்பரம்பலில் உள்ளது என எடுத்துக்கொண்டு
ஒன்று சேர்ந்த மாறற்றிறன்

$$S^2 = \frac{(15-1)(3.5)^2 + (22-1)4^2}{(15-1)+(22-1)} = 14.5$$

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $Z = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{S\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \sim N(0,1)$

z இன் பெறுமானம் $= \frac{65-68}{3.8\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{22}}} = -2.35$

α = 0.05 மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = -1.64$
(இடது வாற்சோதனை)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் -2.35 < அவதிப்பெறுமானம் -1.64
$\therefore H_0$ நிராகரிக்கப்படும்

ie, இரண்டு பாடசாலையிலும் புள்ளிவிபரபாடத்தரம் சமனற்றது.
ie, H_1 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்
ie, பாடசாலை B இன் புள்ளிவிபரவியல் பாடத்தரம் பாடசாலை A யிலும் உயர்வானது.

குடித்தொகை விகிதங்கள் இரண்டின் வித்தியாசத்திற்கான சோதனை (Test for the Difference of Population Propotion)

இரண்டு குடித்தொகை விகிதங்கள் π_1, π_2 ஆகக் கொண்ட குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட இரண்டு பெரிய மாதிரிகளின் அளவுகள் $n_1(>30), n_2(>30)$ உம் அவற்றின் விகிதங்கள் முறையே P_1, P_2 உம் எனின் மாதிரி விகிதங்களின் வித்தியாசம் $P_1 - P_2$ இன் இடை $\pi_1 - \pi_2$ உம்

மாறற்றிறன் $\dfrac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \dfrac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}$ உம் ஆகும்.

$$P_1 - P_2 \sim N\left((\pi_1 - \pi_2), \frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}\right)$$ என கொள்ளலாம்.

$$\frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}} \sim N(0,1)$$ ஆகும்.

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $\dfrac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}}$ ஐ கொண்டு

கருதுகோள் $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ எதிர் $H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

அல்லது $H_1 : \pi_1 < \pi_2$

அல்லது $H_1 : \pi_1 > \pi_2$

என்பது சோதிக்கப்படும்.

Note: π_1, π_2 அறியப்படாத சந்தர்ப்பத்தில் P_1, P_2 ஐ மதிப்பான்களாகக் கருதலாம்.

$$P = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$$ எனின்

$$\frac{(P_1 - P_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$ என்பது சோதனைப்புள்ளிவிபரமாகக் கொள்ளப்படும். கருதுகோள் $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ ஏற்றுக்கொண்டே சோதனை செய்யப்படுவதால்

$$\frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P(1-P)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$ என்பது சோதனைப்புள்ளிவிபரமாகும்.

Note: மேற்குறிப்பிட்ட சோதனையானது பெரிய மாதிரிஅளவுகளுக்கு மாத்திரம் வலிதானதாகும். ஏனெனில் பெரிய மாதிரிஅளவுகளுக்கு ஈருறுப்பு பரம்பலானது செவ்வன் பரம்பலை அணுகுகிறது. சிறிய மாதிரி அளவுகளுக்கு ஈருறுப்பு பரம்பல் பாவிக்கப்படும்.

உ-ம்: கணனிகளை உற்பத்தி செய்யும் தொழிற்சாலை ஒன்றில் 1000 கணனிகளை சோதித்தபோது 3% குறைபாடு உள்ளவையாக இருந்தன. கணனிகளை உற்பத்தி செய்யும் இன்னொரு தொழிற்சாலையில் 1500 கணனிகளை சோதித்தபோது 2% குறைபாடு உள்ளவையாக இருந்தன. முதலாவது தொழிற்சாலை உற்பத்தித்தரம் இரண்டாவதிலும் தாழ்வானது என்று கூறுவது பொருத்தமானதா? ($\alpha = 0.05$)

தீர்வு: சோதனை $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ எதிர் $H_0 : \pi_1 > \pi_2$

(வலது வாற்சோதனை)

முதலாம் தொழிற்சாலையின் மாதிரியில் உள்ள குறைபாடுடைய

கணனிகள் $= \dfrac{3}{100} \times 1000 = 30$

இரண்டாம் தொழிற்சாலையின் மாதிரியில் உள்ள குறைபாடுடைய

கணனிகள் $= \dfrac{2}{100} \times 1500 = 30$

மாதிரி விகிதங்கள் $P_1 = \frac{30}{1000} = 0.03$

$$P_2 = \frac{30}{1500} = 0.02$$

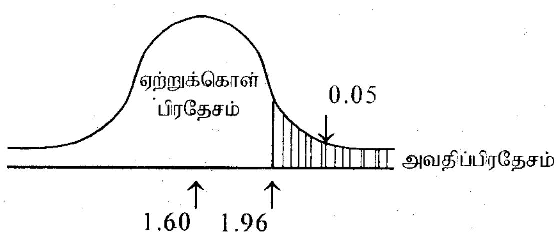
$$P = \frac{1000 \times 0.03 + 1500 \times 0.02}{1000 + 1500} = 0.024$$

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $\frac{P_1 - P_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$

இன் பெறுமானம் $\frac{0.03 - 0.02}{\sqrt{0.024 \times 0.976\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{1500}\right)}}$

$$= \frac{0.01}{0.06} = 1.60$$

$\alpha = 0.05$ மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் $z_\alpha = 1.96$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 1.60 < அவதிப்பெறுமானம் 1.96

$\therefore H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie. இரண்டு தொழிற்சாலையிலும் உற்பத்தித்தரம் சமனானது. (சமஅளவான குறைபாடுள்ள கணனிகளையே உற்பத்தி செய்கின்றன.)

'கை' வர்க்க சோதனை (Chi - Square Test)

புள்ளிவிபரவியலில் கை-வர்க்க சோதனையானது அவதானிக்கப்பட்ட (Observed) தரவுகளின் பரம்பலுடன் கொள்கைரீதியில் ஏற்றுக்கொள்ளப்பட்ட பரம்பல் மாறுபடுதலின், பொருந்துகைக்கான தன்மையை சோதிப்பதற்கு பயன்படுகின்றது. ஆகவே இது எதிர்பார்க்கப்பட்ட (Expected), உண்மையான (Actual) மீடிறன்களுக்கான விலகலை அறிவதற்கான ஒரு அளவு ஆகும்.

Note: இச்சோதனையில் பின்வருவன எடுகோள்களாக கொள்ளப்படும்.

(a) ஒவ்வொரு அவதானிப்புகளும் சாராதவையாக (Independent) இருத்தல் வேண்டும்.

(b) ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் தம்முள் புறநீங்கலானவையாக (Mutually Exclusive) இருத்தல் வேண்டும்.

(c) அவதானிப்புகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் பெரிதானதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(d) ஒப்பீட்டுத் தேவைக்காக, தரவுகள் எடுக்கப்பட்ட மூல அலகிலேயே (Original Units) இருத்தல் வேண்டும்.

உ-ம்: நாணயம் ஒன்று 100 தடவைகள் சுண்டப்படும் போது 65 தடவைகள் தலையும், 35 தடவைகள் பூவும் விழுவதாக அவதானிக் கப்படுகிறது. இது அவதானிகப்பட்ட மீடிறன்கள் (Observed Frequency) ஆகும். நாணயம் கோடாதது எனும் எடுகோளின் கீழ் எதிர்பார்க்கக்கூடிய தலைகளின், பூக்களின் எண்ணிக்கைகள் முறையே 50, 50 ஆகும். இது எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன்கள் (Expected Frequency) ஆகும். இதிலிருந்து நாணயம் கோடாததா, இல்லையா என்பதை சோதிப்பதற்கு இவ்விரண்டு மீடிறன்களுக்குமிடையிலான வேறுபாடுகளை வைத்து χ^2 - புள்ளிவிபரத்தின் மூலம் χ^2 சோதனை செய்யப்படும்.

χ^2 - புள்ளிவிபரம் (χ^2 - Statistic)

K நிகழ்வுகளுக்கான அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன்கள் (Observed Frequency) $O_1, O_2, ..., O_k$, எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன்கள் (Expected Frequency) $E_1, E_2, ..., E_k$ என்க. இரு மீடிறன்களினதும் உடன்பாட்டை அளப்பதற்கு

$$\frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + ... \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$ என்பது புள்ளிவிபரமாக

பயன்படும். ie, $\chi^2 = \Sigma \frac{(O - E)^2}{E}$

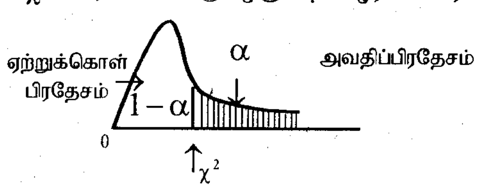
சுயாதீனப்படி (Degree of freedom)

χ^2 - புள்ளிவிபரத்தில் k மீடிறன்கள் கருதப்படுகின்றது எனின் சுயாதீனப்படி (k-1) ஆகும்.

Note: (i) $\sum \frac{(O - E)^2}{E}$ எனும் புள்ளிவிபரம்

k-1 சுயாதீனப் படியாகக்கொண்ட χ^2 - பரம்பலில் உள்ளது என நிறுவலாம்.

(ii) χ^2 - பரம்பலானது ஒரு நேர் ஓராயப்பரம்பலாகும்



(iii) χ^2 -புள்ளிவிபரம் எடுக்கும் பெறுமானத்தைக் கணித்து χ^2 - பரம்பலின் அட்டவணைப் பெறுமானத்தையும் காண்பதன் மூலம் இரண்டையும் ஒப்பிட்டு மீடிறன்கள் உடன்படுகிறதா என்னும் கருதுகோளை ஏற்றல் அல்லது நிராகரித்தல் ஆகும்.

(iv) உண்மையான, எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன்களுக்கிடையில் வித்தியாசம் இல்லை எனின் $\chi^2 = 0$ ஆகும்.

உ-ம் 1: 2500 மாணவர்களைக் கொண்ட குறித்த பாடசாலையில் ஒரு மாதகாலமாகச் செய்த ஆய்வில் பாடசாலைக்கு வராத மாணவர்கள் பற்றிய விரபங்கள் பின்வருமாறு:-

நாட்கள்	மாணவர்கள் எண்ணிக்கை
திங்கள்	100
செவ்வாய்	180
புதன்	120
வியாழன்	70
வெள்ளி	130

ஐந்து நாட்களும் பாடசாலைக்கு மாணவர்களின் வருகை சமஅளவில் உள்ளது என்பதை $\alpha = 0.05$ மட்டத்தில் சோதிக்க.

தீர்வு: கருதுகோள்

H_0: ஐந்து நாட்களும் மாணவர்களின் வருகை சமஅளவு.

H_1: ஐந்து நாட்களும் மாணவர்களின் வருகை சமனற்றது.

நாட்கள்	பாடசாலைக்கு சமுகமளிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கை (O)	எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E)	O-E	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
திங்கள்	2400	2380	20	400	0.17
செவ்வாய்	2320	2380	-60	3600	1.51
புதன்	2380	2380	0	0	0
வியாழன்	2430	2380	50	2500	1.05
வெள்ளி	2370	2380	-10	100	0.04
	11900				2.77

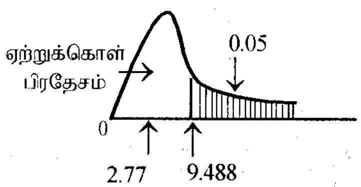
எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் $= \frac{11900}{5} = 2380$

χ^2 -புள்ளிவிபரம், $\sum \frac{(O-E)^2}{E}$ எடுக்கும் பெறுமானம் = 2.77

சுயாதீனப்படி (d.f) = k-1 = 5 - 1 = 4

அட்டவணைப் பெறுமானம் $\chi^2_{4,5\%} = 9.488$

ie, 0.05 மட்டத்தில் அவதிப்பெறுமானம் = 9.488



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் (2.77) < அட்டவணைப் பெறுமானம் (9.488)

∴ Ho ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, ஐந்து நாட்களிலும் மாணவர்களின் வருகை சமனானது.

உ-ம்: நான்கு ஒரேமாதிரியான நாணயங்கள் 160 தடவைகள் சுண்டப்பட்டு பெறப்பட்ட தரவுகள் வருமாறு:

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன்	17	52	54	31	6

இத்தரவுகளைக் கொண்டு நாணயங்கள் கோடாதவை என்பதை சோதிக்க.

Note: நிகழ்ச்சி A யிற்கு $P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \Rightarrow n(A) = P(A) \times n(E)$

தீர்வு: H_0: நாணயங்கள் கோடாதவை.

H_1: நாணயங்களில் ஒன்றாவது கோடலானது.

எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் = ${}^4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \times 160,$

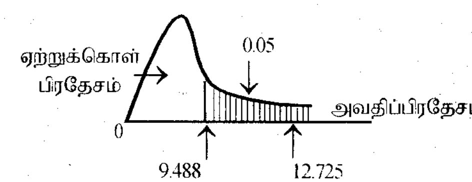
x = 0, 1, 2, 3, 4

தலைகள்	அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (O)	எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E)	(O-E)	$(O-E)^2$	$(O-E)^2/E$
0	17	$4c_0(\frac{1}{2})^4 \times 160 = 10$	7	49	4.9
1	52	$4c_1(\frac{1}{2})^4 \times 160 = 40$	12	144	3.6
2	54	$4c_2(\frac{1}{2})^4 \times 160 = 60$	-6	36	0.6
3	31	$4c_3(\frac{1}{2})^4 \times 160 = 40$	-9	81	2.025
4	6	$4c_4(\frac{1}{2})^4 \times 160 = 10$	-4	16	1.6
					12.725

சுயாதீனப்படி (d.f) = 5 - 1 = 4

χ^2 - புள்ளிவிபரம், $\sum \frac{(O-E)^2}{E}$ இன் பெறுமானம் = 12.725

அட்டவணைப் பெறுமானம் $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் (12.725) > அட்டவணைப் பெறுமானம்(9.488)

∴ Ho நிராகரிக்கப்படுகிறது.

ie, நாணயங்களில் ஏதேனும் ஒன்றாவது கோடலானதாக இருக்கும்.

உ-ம்: ஒரு அறுமுகித்தாயக்கட்டை 120 தடவைகள் சுண்டப்படும்போது பெறப்பட்ட அவதானிப்புகள் வருமாறு:-

முகப்பு இலக்கம்	1	2	3	4	5	6
எண்ணிக்கை	30	25	18	10	22	15

α = 5% மட்டத்தில் சுண்டப்பட்ட தாயக்கட்டை கோடாதது என்பதை சோதிக்க. ($\chi^2_{5,5\%}$ = 11.07)

அறிமுறைப் பரம்பல் ஒன்றின் பொருத்துகை
(Fit of a Theoritical Distribution)

குடித்தொகைப் பரம்பல் பற்றிய கருத்து உள்ளபோது அக் குடித்தொகை யிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரி ஒன்றுக்கு பொருத்தமான அறிமுறைப் பரம்பல் ஒன்றைப் பொருத்தமுடியும். இந்த பொருந்துகைக்கான வாய்ப்புப்பற்றி χ^2 சோதனைமூலம் சோதிக்க முடியும்.

உ-ம்: மேலே உள்ள உ-ம்-2 இல் தரவுக்கான ஈருறுப்புப்பரம்பலின் பொருந்துகைக்கான வாய்ப்புபற்றி சோதிக்க.

தீர்வு: H_0: எடுக்கப்பட்ட மாதிரியானது ஈருறுப்புப்பரம்பல் குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது. (or இந்த தரவுகள் ஈருறுப்புப் பரம்பலுக்கு கீழ்படிகிறது).

H_1: ஈருறுப்புப்பரம்பல் குடியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை.

x : தலைகளின் எண்ணிக்கை

$P(H) = P$ என்க

$P(T) = 1\text{-}P(H) = 1\text{-}p = q$ என்க; $p+q = 1$

x இன் நிகழ்தகவுப் பரம்பல்

$$P(x) = {}^4C_x p^x q^{4-x}; \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

x	அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (f)	(fx)
0	17	0
1	52	52
2	54	108
3	31	93
4	6	24
	160	277

அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் பரம்பலின் இடை $= \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{277}{160}$

$= 1.731$

ஈருறுப்பரம்பலின் இடை $= nP = 4P$

$\therefore \quad 4P = 1.731$

$P = 0.433$

$\therefore$ பொருத்தப்பட்ட ஈருறுப்புப்பரம்பல்

$$P(x) = 4c_x(0.433)^x(0.567)^{4-x}, \; x = 0, 1, 2, 3, 4$$

எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் $(E) = P(x) \times 160$

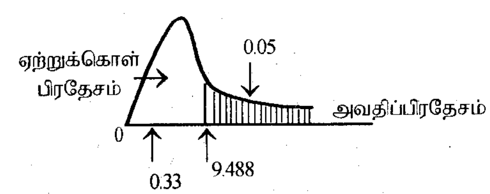
$$= 160 \times 4c_x(0.433)^x(0.567)^{4-x}, \; x = 0, 1, 2, 3, 4$$

X	O	E	O-E	(O-E)2	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	17	$160 \times 4c_0(0.433)^0(0.567)^4 = 17$	0	0	0.0
1	52	$160 \times 4c_1(0.433)^1(0.567)^3 = 51$	1	1	0.02
2	54	$160 \times 4c_2(0.433)^2(0.567)^2 = 58$	-4	16	0.28
3	31	$160 \times 4c_3(0.433)^3(0.567)^1 = 30$	1	1	0.03
4	6	$160 \times 4c_4(0.433)^4(0.567)^0 = 6$	0	0	0.00
					0.33

χ^2 - புள்ளிவிபரம், $\sum \dfrac{(O-E)^2}{E}$ இன் பெறுமானம் $= 0.33$

சுயாதீனப்படி $= 5 - 1 = 4$

$\alpha = 0.05$ மட்டத்தில் மாறுநிலைப் பெறுமானம் $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 0.33 < மாறுநிலைப் பெறுமானம் 9.488
$\therefore H_0$ ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

ie, இத்தரவுகள் ஈருறுப்புப்பரம்பலுக்கு கீழ்ப்படிகின்றது.

சாராமையை சோதிப்பதற்கான χ^2 - சோதனை

(χ^2 test for test of Independence)

ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட காரணக்குறிகள் (Attributes) சம்பந்தப்பட்டுள்ளதா இல்லையா என்பதை கண்டறிவதற்கு இந்த சோதனை பாவிக்கப்படுகிறது.

இந்த காரணக்குறிகள் தம்முள் தொடர்புள்ளவையா (சார்புடையவையா) அல்லது தொடர்பற்றவையா (சாராதவையா) என்பதைக் கண்டறிய முடியும். காரணக்குறிகள் சாராதவை என்ற கருதுகோளை எடுத்து மேலே விபரிக்கப்பட்ட முறைமூலம் χ^2 – புள்ளிவிபரம் சோதிக்கப்படும்.

நேர்வு அட்டவணை (Contingency table)

புகைப்பழக்கம்

		உண்டு	இல்லை	மொத்தம்
பால்	ஆண்	18	12	30
	பெண்	9	11	20
	மொத்தம்	27	23	50

2 x 2

இது இரண்டு மாறிகளை (புகைப்பழக்கம், பால்) இவ்விரண்டு நிலைகளில் ((உண்டு, இல்லை) (ஆண். பெண்), கொண்ட நேர்வு அட்டவணை ஆகும்.

இந்த அட்டவணையைப் பாவித்து பால், புகைப்பழக்கம் என்பன ஒன்றில் ஒன்று சார்ந்ததா, சாராதவையா என்பதை சோதிக்க முடியும்.

Note: (1) r நிரைகளையும், c நிரல்களையும் கொண்ட ஒரு நேர்வு அட்டவணையின் சுயாதீனப்படி $(r - 1) \times (c - 1)$.

அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன்கள் தரப்படுமிடத்து எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன்கள் கணித்தல் முறை.

	B	b	மொத்தம்
A	O_{11}	O_{12}	T_A
a	O_{21}	O_{22}	T_a
மொத்தம்	T_B	T_b	T

அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (தரப்பட்டது)

	B	b	மொத்தம்
A	E_{11}	E_{12}	T_A
a	E_{21}	E_{22}	T_a
மொத்தம்	T_B	T_b	T

எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன். (கணிக்கப்பட வேண்டியவை)

இங்கு இரண்டு மாறிகளும் சாராதவை என்பதை சோதிக்கவேண்டும். ஆகவே இரண்டும் சாராதவை என்பதை ஏற்றுக்கொண்டு எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் கணிக்கப்பட்டு சோதனை செய்யப்படும்.

A எனும் நிகழ்சிக்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{T_A}{T}$

B எனும் நிகழ்சிக்கான நிகழ்தகவு $= \dfrac{T_B}{T}$

A, B சாராதவை

(A,B) இரண்டும் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு $= P(A).\,P(B) = \dfrac{T_A}{T} \times \dfrac{T_B}{T}$

$\therefore$ (A,B) எனும்நிகழ்சியின் எதிர்பார்க்கப்பட்ட எண்ணிக்கை $= P(A,B) \times T$

$$= \frac{T_A}{T} \times \frac{T_B}{T} \times T$$

$$= \frac{T_A}{T} \times T_B$$

ie, எதிர்பார்க்கப்பட்டமீடிறன் $= \dfrac{\text{உரியநிரையின் கூட்டுத் தொகை}}{\text{மொத்த புள்ளி விபரம்}} \times$ உரியநிரலின் கூட்டுத் தொகை

$$\therefore \quad E_{11} = \frac{T_A}{T} \times T_B \qquad E_{12} = \frac{T_A}{T} \times T_b$$

$$E_{21} = \frac{T_a}{T} \times T_B \qquad E_{22} = \frac{T_a}{T} \times T_b$$

உ-ம்: 50 பேரைக் கொண்ட மாதிரி ஒன்றின் புகைப்பழக்கத்தை பால்ரீதியாக ஆராயப்பட்டு பெறப்பட்ட நேர்வு அட்டவணை வருமாறு:

புகைப்பழக்கம

		உண்டு	இல்லை	மொத்தம்
பால்	ஆண்	20	10	30
	பெண்	5	15	20
	மொத்தம்	25	25	50

புகைப்பழக்கம் பால்ரீதியாக தங்கியுள்ளதா என்பதை சோதிக்க.

தீர்வு: கருதுகோள்

H_o: புகைப்பழக்கம் பாலில் தங்கவில்லை.

H_1: புகைப்பழக்கம் பாலில் தங்கியுள்ளது.

எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E)

		புகைப்பழக்கம்		
		உண்டு	இல்லை	மொத்தம்
பால்	ஆண்	$\frac{30}{50} \times 25 = 15$	$\frac{30}{50} \times 25 = 15$	30
	பெண்	$\frac{20}{50} \times 25 = 10$	$\frac{20}{50} \times 25 = 10$	20
	மொத்தம்	25	25	50

அவதானித்த மீடிறன் (O)	எதிர்பார்த்த மீடிறன் (E)	(O-E)	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
20	15	5	25	1.67
10	15	-5	25	1.67
5	10	-5	25	2.5
15	10	5	25	2.5
				8.34

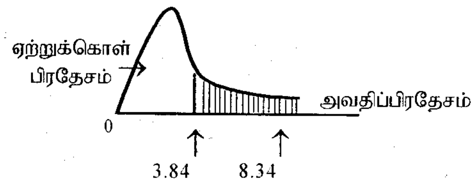
χ^2 - புள்ளிவிபரம், $\sum \frac{(O-E)^2}{E}$ இன் பெறுமானம் $= 8.34$

நேர்வு அட்டவணை 2 நிரல்களையும் 2 நிரைகளையும் (2 x 2) கொண்டது.

$\therefore$ சுயாதீனப்படி (d.f) $= (2-1) \times (2-1) = 1$

χ^2 - அட்டவணை பெறுமானம் $\chi^2_{1,0.05} = 3.84$

(அவதிப் பெறுமானம்)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 8.34 > அவதிப் பெறுமானம் 3.84

∴ H_0 நிராகரிக்கப்படும்

∴ புகைப்பழக்கம் பாலில் தங்கியுள்ளது.

மாறற்றிறன் பகுப்பாய்வு (Analysis of Variance) (ANOVA)

இரண்டு செவ்வன் குடித்தொகைகளின் இடை சமம்பற்றி சோதிப்பதற்காக கருதுகோள் சோதனை பயன்படுகிறது. இரண்டுக்கு மேற்பட்ட குடித்தொகைகள் உள்ளபோது குடித்தொகை இடைகள் சமம் என்பதை ஒரேதடவையில் சோதிப்பதற்காக பயன்படும் புள்ளிவிபர முறை மாறற்றிறன் பகுப்பாய்வு ஆகும்.

ஒருவழி மாறற்றிறன் பகுப்பாய்வு (One - way ANOVA)

வேறுபட்ட k குடித்தொகையிலிருந்து பெறப்பட்ட n பருமனுடைய மாதிரிகளை கருதுக. அவற்றின் மாதிரி இடைகள் $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots \bar{x}_k$ உம் மாதிரி மாறற்றிறன்கள் $s_1^2, s_2^2 \ldots\ldots s_k^2$ உம் கணிக்கப்படும்.

கருதுகோள்: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots \mu_k$

H_1 : ஏதாவது இரண்டு இடை சமனற்றது.

ie, $\mu_i \neq \mu_j \; (i \neq j)$

என வரையறுக்கப்பட்டு, இதை சோதிப்பதற்காக, மாதிரி இடைகளின் மாறற்றிறன் $s_{\bar{x}}^2$ உம் மாறற்றிறன்களின் இடை μ_{s^2} உம் கணிக்கப்படும்.

$$\frac{\text{மாதிரிகளுக்கு இடையிலான மாறற்றிறன் } (ns_{\bar{x}}^2)}{\text{மாதிரிகளுக்குள்ளான மாறற்றிறன் } (\mu_{s^2})}$$

எனும் புள்ளிவிபரமானது F - பரம்பலில் உள்ளது எனக் காட்டலாம்.

F - பரம்பலுக்கான சுயாதீனப்படி

k மாதிரிகள் இருப்பதனால் மாதிரிகளுக்கிடையிலான மாறற்றிறன் சுயாதீனப்படி k - 1 உம்

k மாதிரிகளுக்குள்ளும் n அவதானிப்புகள் இருப்பதனால் மாதிரிகளுக்குள்ளான மாறற்றிறன் சுயாதீனப்படி k(n-1) உம் ஆகும்.

F பரம்பலின் சுயாதீனப்படி k - 1, k(n-1) ஆகும்.

$F_{k-1,\, k(n-1),\, \alpha\%}$ என குறிக்கப்படும்.

சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $\frac{ns_x^2}{\mu_{s^2}}$ இன் பெறுமானம் கணிக்கப்பட்டு F-பரம்பல் அட்டவணையின் பெறுமானத்துடன் $(F_{k-1,\ k(n-1),\ \alpha\%})$ ஒப்பிடுவதன்மூலம் H_0 சோதிக்கப்படும்.

உ-ம்: புதிதாக ஆரம்பிக்கப்பட்ட மின்குமிழ் உற்பத்தி செய்யும் நிறுவனம் மூன்றுவகையான மின்குமிழ்களை உற்பத்தி செய்கிறது. ஒவ்வொருவகையிலும் 5 மின்குமிழ்கள் வீதம் தெரிவு செய்து அவற்றின் ஆயுட்காலம் (நாட்களில்) சோதிக்கப்பட்டது. அவை ஒவ்வொருவகைக்குமான உற்பத்திச்செலவு சமன் எனின், வாடிக்கையாளரின் நன்மைகருதி எந்த வகை மின்குமிழ்களை தெரிவு செய்து நிறுவனத்தினர் சந்தைப்படுத்துவார்கள்.

x வகை	y வகை	z வகை
26.0	29.0	30.0
28.5	28.8	26.3
27.3	27.6	29.2
25.9	28.1	27.1
28.2	27.0	29.8

தீர்வு:

x	y	z	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(z-\bar{z})^2$
26.0	29.0	30.0	1.39	0.81	2.31
28.5	28.8	26.3	1.74	0.49	4.75
27.3	27.6	29.2	0.01	0.25	0.52
25.9	28.1	27.1	1.64	0.00	1.90
28.2	27.0	29.8	1.04	1.21	1.74
135.9	140.5	142.4	5.82	2.76	11.22

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} \qquad \bar{z} = \frac{\sum z}{n}$$

$$= \frac{135.9}{5} \qquad = \frac{140.5}{5} \qquad = \frac{142.4}{5}$$

$$= 27.18 \qquad = 28.10 \qquad = 28.48$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x-\bar{x}\right)^2 \quad S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(y-\bar{y}\right)^2 \quad S_z^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(z-\bar{z}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5-1}\Sigma\left(x-27.18\right)^2 \qquad = \frac{1}{5-1}\Sigma\left(y-28.10\right)^2 \qquad = \frac{1}{5-1}\Sigma\left(y-28.10\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\times 5.82 \qquad = \frac{1}{4}\times 2.76 \qquad = \frac{1}{4}\times 28.48$$

$$= 1.46 \qquad = 0.69 \qquad = 2.81$$

$H_0 : \mu_x = \mu_y = \mu_z$ எதிர் H_1 : ஏதாவது இரண்டு இடைகள் சமனற்றவை

மாதிரி இடைகள் 27.18, 28.10, 28.48 இன்

$$\text{இடை} = \frac{27.18+28.10+28.48}{3} = 27.92$$

மாறற்றிறன்

$$S^2 = \frac{1}{3-1}\left\{(27.18-27.92)^2 + (28.10-27.92)^2 + (28.48-27.92)^2\right\}$$

$= 0.45$

மாதிரி மாறற்றிறன்கள் 1.46, 0.69, 2.81 இன்

$$\text{இடை } \mu_{s^2} = \frac{1.46+0.69+2.81}{3} = 1.65$$

$n = 5,\ \ k = 3$

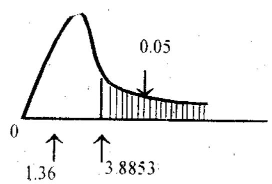
சோதனைப்புள்ளிவிபரம் $\frac{ns_{\bar{x}}^2}{\mu_{s^2}}$ இன் பெறுமானம்

$$= \frac{5 \times 0.45}{1.65} = 1.36$$

F- பரம்பல் அட்டவணையின் பெறுமானம் $= F_{3-1,3(5-1),0.05}$

$= F_{2,12,0.05}$

$= 3.8853$
(அவதிப்பெறுமானம்)



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் 1.36 < அவதிப்பெறுமானம் 3.8853
H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

மூன்றுவகையான மின்குமிழ்களும் சம ஆயுட்காலம் உள்ளவை. ஆயுட்காலத்தை பொறுத்தமட்டில் மூன்றுவகையான மின்குமிழ் களையும் சந்தைப்படுத்த முடியும். ஆனால் விலை குறைந்த மின்குமிழ்களை சந்தைப்படுத்துவதே வாடிக்கையாளருக்கு நன்மையயக்கும்.

Note: ஒவ்வொரு மாதிரிகளின் எண்ணிக்கையும் சமனாக அமையத்தேவையில்லை. இந்நிலையில் சுயாதீனப்படி $k(n-1)$ என்பது $N-k$ என அமையும்.
இங்கு N என்பது மொத்த அவதானிப்புகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

மாறற்றிறன் பகுப்பு அட்டவணை மூலம் சுருக்கமுறை
(Short method using ANOVA Table)

1. சமனான மாதிரிப் பருமன் கொண்ட மாதிரிகளுக்கு ANOVA அட்டவணை தயாரிக்கும்முறை

n மாதிரிப்பருமன் கொண்ட k மாதிரிகளைக் கருதுக.

சோதிக்க வேண்டிய கருதுகோள்கள்

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots\dots = \mu_k$

எதிர் $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ (ஏதாவது இரண்டின் இடை சமனற்றது)

Step 1: அனைத்து தரவுகளினதும் மொத்தம் (Total)

$$T = \sum x_1 + \sum x_2 + \dots\dots + \sum x_k$$

Step 2: திருத்தக்கணியம் (Correction factor)

$$C.F. = \frac{T^2}{N}$$ இங்கு $N = nk$

Step 3: எல்லாத் தரவுகளினதும் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$\sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \dots\dots + \sum x_k$$

Step 4: மொத்த வர்க்க கூட்டுத்தொகை. (Total sum of squares)

$$SST = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \dots\dots + \sum x_k^2 - C.F$$

Step 5: மாதிரிகளுக்கிடையிலான வர்க்க கூட்டுத்தொகை. (Between sum of squares)

$$SSB = \frac{(\sum x_1)^2 + (\sum x_2)^2 + \dots\dots + (\sum x_k)^2}{n} - C.F$$

Step 6: மாதிரியினுள் வர்க்க கூட்டுத்தொகை
(வழு வர்க்க கூட்டுத்தொகை).
(within sum of squares or Error sum of squares)
SSW (or SSE) = SST - SSB

Step 7: ANOVA அட்டவணை

மாறற்றிறன் Variance	சுயாதீனப்படி degree of freedom	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை sum of squares	இடைவர்க்க கூட்டுத்தொகை mean sum of squares	F- விகிதம் F - ratio
மாதிரிகளுக் கிடையில் (Between samples)	k - 1	SSB	$MSB = \frac{SSB}{k-1}$	$F = \frac{MSB}{MSW}$
மாதிரிகளுக்குள் (within samples)	k(n - 1)	SSW (or SSE)	$MSW = \frac{SSW}{k(n-1)}$ (or MSE)	
மொத்தம் Total	kn - 1	SST		

F - பரம்பல் அட்டவணைப் பெறுமானம் $F_{k-1,k(n-1),\alpha\%}$ என்பது F-விகிதம்,

$F = \frac{MSB}{MSW}$ இன் பெறுமதியுடன் ஒப்பிடுவதன் மூலம் சோதனைக்கான (H_0 vs H_1) தீர்மானம் எடுக்கப்படும்.

Note: F- விகிதத்தில் பங்குபற்றுவது MSB, MSW ஆகியன ஆகும் F-விகிதத்துடன் ஒப்பிடும் F - அட்டவணைப் பெறுமானம் பார்க்கும் போது அதற்கான சுயாதீனப்படி MSB, MSW இற்கு தொடர்புடைய சுயாதீனப் படிகள் k-1, k(n-1) ஆகும்.

உ-ம்: மேலுள்ள உதாரணத்தை கருதுவோமாயின்

$H_0 : \mu_x = \mu_y = \mu_z$

$H_1 : \mu_x \neq \mu_y$ or $\mu_x \neq \mu_z$ or $\mu_y \neq \mu_z$

மொத்தம் $T = \Sigma x + \Sigma y + \Sigma z$

$= 135.9 + 140.5 + 142.4$

$= 418.8$

இங்கு $n = 5$

$k = 3$

$\therefore N = 15$

திருத்தக்கணியம் $C.F = T^2/N$

$= \frac{(418.8)^2}{15}$

$= \frac{175393.44}{15}$

$= 11692.896$

எல்லாத்தரவுகளினதும் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$\sum x^2 + \sum y^2 + \sum z^2 = 3699.59 + 3950.81 + 4066.78$

$= 11717.18$

மொத்தவர்க்க கூட்டுத்தொகை

$SST = \sum x^2 + \sum y^2 + \sum z^2 - C.F = 11717.18 - 11692.896$

24.284

மாதிரிகளுக்கிடையிலான வர்க்க கூட்டுத்தொகை

$$SSB = \frac{(\sum x)^2}{5} + \frac{(\sum y)^2}{5} + \frac{(\sum z)^2}{5} - C.F$$

$$= \frac{(135.9)^2}{5} + \frac{(140.5)^2}{5} + \frac{(142.4)^2}{5} - 11692.896$$

= 11697.364 - 11692.896

= 4.468

மாதிரியினுள் வர்க்க கூட்டுத்தொகை

SSW (or SSE) = SST - SSB

= 24.284 - 4.468

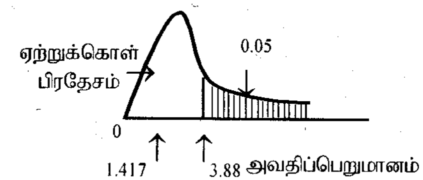
= 19.816

ANOVA Table

மாறற்றிறன்	சுயாதீனப்படி	வர்க்க கூட்டுத்தொகை	இடை வர்க்க கூட்டுத்தொகை	F – விகிதம்
மாதிரிகளுக் கிடையில்	3-1=2	SSB = 4.68	$MSB = \frac{4.68}{2}$ = 2.34	$F = \frac{2.34}{1.651}$ = 1.417
மாதிரி களுக்குள்	15-3 = 12	SSE = 19.816	$MSE = \frac{19.816}{12}$ = 1.651	
மொத்தம்	15-1 = 14	SST = 24.284		

F- விகிதம் = 1.417

F - பரம்பல் அட்டவணைப் பெறுமானம் $F_{2,12,0.05}$ = 3.88



F- விகிதம் < $F_{2,12,0.05}$ (அவதிப்பெறுமானம்)

∴ H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்

∴ மின்குமிழ்களின் ஆயுட்காலத்தில் வேறுபாடுகள் இல்லை.

2. சமனற்ற மாதிரிப்பருமன் கொண்ட மாதிரிகளுக்கு ANOVA அட்டவணை தயாரிக்கும் படிமுறைகள்:

$n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ மாதிரிப்பருமன்களாகக் கொண்ட k மாதிரிகளைக் கருதுக.

சோதிக்கவேண்டிய சூனியக்கருதுகோள்

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots\ldots = \mu_k$$

எதிர் $H_1 : \mu_i \neq \mu_j$ (ஏதாவது இரண்டு சமனற்றது)

Step 1: அனைத்து தரவுகளினதும் மொத்தம் (Total)

$$T = \sum x_1 + \sum x_2 + \ldots\ldots + \sum x_k$$

Step 2: திருத்தக்கணியம் (Correction factor)

$$C.F. = \frac{T^2}{N}$$ இங்கு $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Step 3: எல்லாத் தரவுகளினதும் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$\sum x_1^{\,2} + \sum x_2^{\,2} + \ldots\ldots + \sum x_k^{\,2}$$

Step 4: மொத்த வர்க்க கூட்டுத்தொகை. (Total sum of squares)

$$SST = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + ... + \sum x_k^2 - C.F$$

Step 5: மாதிரிகளுக்கிடையிலான வர்க்க கூட்டுத்தொகை. (Between sum of squares)

$$SSB = \frac{(\Sigma x_1)^2}{n_1} + \frac{(\Sigma x_2)^2}{n_2} + ---- + \frac{(\Sigma x_k)^2}{n_k} - C.F,$$

Step 6: மாதிரியினுள் வர்க்க கூட்டுத்தொகை (or வழு வர்க்க கூட்டுத்தொகை). (within sum of squares or Error sum of squares)

SSW (or SSE) = SST - SSB

Step 7: ANOVA அட்டவணை

மாறற்றிறன் Variance	சுயாதீனப்படி degree of freedom	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை sum of squares	இடைவர்க்க கூட்டுத்தொகை mean sum of squares	F - விகிதம் F - Ratio
மாதிரிக ளுக்கிடையில் (Between samples)	k - 1	SSB	$MSB = \frac{SSB}{k-1}$	$F = \frac{MSB}{MSW}$
மாதிரிகளுக்குள் (within samples)	N-k	SSW (or SSE)	$MSW = \frac{SSW}{N-k}$ (or MSE)	
மொத்தம் Total	N-1	SST		

F - பரம்பல் அட்டவணைப் பெறுமானம் $F_{k-1,N-k,\alpha\%}$ என்பது Fவிகிதம், $F = \frac{MSB}{MSE}$ இன் பெறுமதியுடன் ஒப்பிடுவதன் மூலம் சோதனைக்கான (H_0 vs H_1) தீர்மானம் எடுக்கப்படும்.

Note: 1. F - விகிதம், F - அட்டவணைப் பெறுமானத்துடன் ஒப்பிடப்படும். F - விகிதத்தில் MSB, MSW என்பன சம்பந்தப்படுகிறது. அதற்கு தொடர்புடைய சுயாதீனப்படிகள் K-1, N-k என்பன F - அட்டவணைப் பெறுமானத்திற்கான சுயாதீனப் படிகளாக இருக்கும்.

2. ANOVA அட்டவணைக்குள் வரும் எல்லாப் பெறுமானங்களும் நேர் பெறுமானங்களாக இருக்கும்.

உ-ம்: ஒரே மாதிரியான நான்கு வியாபாரஸ்தாபனங்களின் வியாபாரம் பற்றிய ஆய்வுக்காக நாளாந்த மொத்த வியாபாரத்தின் அளவு ரூபாவில் தரப்பட்டுள்ளது. தரவுகள் 00000' இல் தரப்பட்டுள்ளது.

நிறுவனம் A	நிறுவனம் B	நிறுவனம் C	நிறுவனம் D
15	19	22	16
17	18	18	19
19	20	21	17
16	17	23	18
14	14	20	22
18	-	19	21
15	-	-	16
16	-	-	-

நான்கு நிறுவனங்களினதும் வியாபாரத்தின் சமம்பற்றி சோதிக்க.

தீர்வு: $H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu_C = \mu_D$

எதிர் H_1: ஏதாவது இரண்டு சமனற்றதாக இருத்தல் $(\mu_i \neq \mu_j)$.

A	B	C	D
15	19	22	16
17	18	18	19
19	20	21	17
16	17	23	18
14	14	20	22
18	-	19	21
15	-	-	16
16	-	-	-
130	88	123	129

மாதிரி எண்ணிக்கை	$n_A = 8$	$n_B = 5$	$n_C = 6$	$n_D = 7$
கூட்டுத்தொகை	$T_A = 130$	$T_B = 88$	$T_C = 123$	$T_D = 129$
வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	$\sum X_A^2 = 2132$	$\sum X_B^2 = 1570$	$\sum X_C^2 = 2539$	$\sum X_D^2 = 2411$

மொத்தம் $T = T_A + T_B + T_C + T_D$
$= 130 + 88 + 123 + 129$
$= 470$

$N = n_A + n_B + n_C + n_D$
$= 8 + 5 + 6 + 7$
$= 26$

திருத்தக்கணியம் $C.F = T^2/N$

$= \dfrac{470^2}{26}$

$= 8496.15$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$SST = \sum X_A^2 + \sum X_B^2 + \sum X_C^2 + \sum X_D^2 - C.F$$

$= 2132 + 1570 + 2539 + 2411 - 8496.15$
$= 8652 - 8496$
$= 156$

மாதிரிகளுக்கிடையிலான வர்க்க கூட்டுத்தொகை

$$SSB = \frac{T_A^2}{n_A} + \frac{T_B^2}{n_B} + \frac{T_C^2}{n_C} + \frac{T_D^2}{n_D} - C.F$$

$$= \frac{130^2}{8} + \frac{88^2}{5} + \frac{123^2}{6} + \frac{129^2}{7} - 8496.15$$

$= 2112.5 + 1548.8 + 2521.5 + 2377.29 - 8496.15$
$= 8560.09 - 8496.15$
$= 63.94$

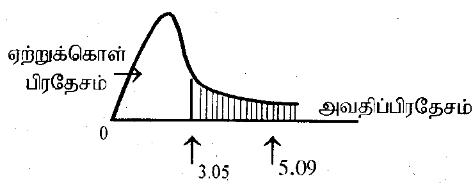
வழு வர்க்கத்தின் கூட்டுத்தொகை
SSE $= SST - SSB$
$= 156 - 63.94$
$= 92.06$

ANOVA அட்டவணை

மாறற்றிறன்	சுயாதீனப்படி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	இடைவர்க்க கூட்டுத்தொகை	F-விகிதம்
மாதிரிகளுக்கிடையில்	4-1=3	63.94	21.31	$\frac{21.31}{4.18} = 5.09$
வழு	22	92.06	4.18	
மொத்தம்	26-1=25	156		

கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் $= 5.09$

அவதிப்பெறுமானம் $= F_{3,22,5\%}$
$= 3.05$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் $5.09 >$ அவதிப்பெறுமானம் 3.05

$\therefore$ H_0 நிராகரிக்கப்படும்.

$\therefore$ நான்கு நிறுவனங்களினதும் வியாபாரம் சமமற்றது.

மாதிரி வினாவிடை

உ-ம் 1: ஐந்து அலகுகளைக் கொண்ட குடி ஒன்றின் அவதானிப்புகள் 7, 6, 8, 10, 4 ஆகும். பிரதிவைப்பின்றி மூன்று அலகுகளைக் கொண்ட எழுமாற்று மாதிரிகள் எடுக்கப்படுகின்றன.

(i) சாத்தியமான மாதிரிகள் எத்தனை? அவற்றை எழுதுக.

(ii) அவற்றின் இடை, மாறற்றிறன்களை காண்க.

(iii) மாதிரி இடைகளின் இடை $\mu_{\bar{x}}$ ஐயும், மாறற்றிறன்களின் இடை μ_{s^2} ஐயும் காண்க.

(iv) மேற்கணிப்புகளிலிருந்து

(a) மாதிரி இடையானது குடிஇடையின் கோடாத மதிப்பான்

(b) மாதிரி மாறற்றிறன் குடி மாறற்றிறனின் கோடாத மதிப்பான் என்னும் கூற்றுக்களை சரிபார்க்க.

தீர்வு: சாத்தியமான மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $= 5c_3$
$= 10$

மாதிரி	இடை($\bar{x}$)	மாறற்றிறன் S^2
(7, 6, 8)	7	
(7, 6, 10)	$23/3$	$13/3$
(7, 6, 4)	$17/3$	$7/3$
(7, 8, 10)	$25/3$	$7/3$
(7, 8, 4)	$19/3$	$13/3$
(7, 10, 4)	7	9
(6, 8, 10)	8	4
(6, 8, 4)	6	4
(6, 10, 4)	$20/3$	$28/3$
(8, 10, 4)	$22/3$	$28/3$

மாறற்றிறன் கணிக்கும் முறை

(i) மாதிரி $(7, 6, 8)$ இன்

$$S_1^{\,2} = \frac{1}{3-1}[(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2] = 1$$

(ii) மாதிரி $(7, 6, 10)$ இன்

$$S_2^{\,2} = \frac{1}{3-1}\left[\left(7-\frac{23}{3}\right)^2+\left(6-\frac{23}{3}\right)^2+\left(10-\frac{23}{3}\right)^2\right] = 13/3$$

(iii) $$\mu_{\bar{x}} = \frac{1}{10}\left(7+\frac{23}{3}+\frac{17}{3}+\frac{25}{3}+\frac{19}{3}+7+8+6+\frac{20}{3}+\frac{22}{3}\right)$$

$$= \frac{210}{30} = 7$$

$$\mu_{s^2} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{13}{3}+\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\frac{13}{3}+9+4+4+\frac{28}{3}+\frac{28}{3}\right)$$

$$= \frac{50}{10}$$

$= 5$

(iv) குடியின் இடை

$$\mu = \frac{1}{5}(7+6+8+10+4)$$

$$= \frac{35}{5}$$

$= 7$

குடியின் மாறற்றிறன்

$$s^2 = \frac{1}{4}\left[(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(4-7)^2\right]$$

$$= \frac{20}{4}$$

$= 5$

$\therefore \quad \mu = \mu_{\bar{x}}$

$\quad\; s^2 = \mu_{s^2}$

$\therefore$ கூற்றுக்கள் (a), (b) என்பன உண்மையாகும்.

உ-ம் 2: ஒரு குறிப்பிட்ட வகுப்பு மக்களிலிருந்து எழுமாறாக தெரிவுசெய்யப்பட்டு அவர்களின் வருட மொத்த வருமானம் ஆயிரம் ரூபாக்களில் கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

6.5	10.5	12.7	13.8	13.2	11.4
5.5	8.0	9.6	9.1	9.0	8.5
4.8	7.3	8.4	8.7	7.3	7.4
5.6	6.8	6.9	6.8	6.1	6.5
4.0	6.4	6.4	8.0	6.6	6.2
4.7	7.4	8.0	8.3	7.6	6.7

மாதிரித் தரவுகளைக்கொண்டு இந்த வகுப்பிலுள்ள ஒருவரின் சராசரி வருமானம் வருடத்திற்கு 10000/- ஆக இருக்கும் என்ற முடிவுக்கு வரமுடியுமா?

$H_0 : \mu = 10$ எதிர் $H_1 : \mu \neq 10$

மாதிரி பருமன் $n = 36$

மாதிரி இடை $\bar{x} = \dfrac{280}{35} = 7.80$

சோதனைப் புள்ளி விபரம் $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

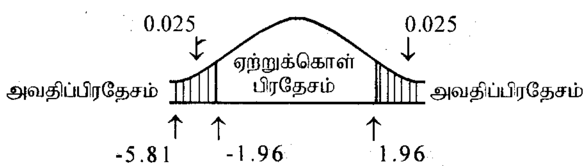
$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(x - \overline{x}\right)^2$$

$$= \frac{180.07}{35}$$

$S = 2.27$

Z இன் பெறுமதி $= \dfrac{(7.80 - 10)}{2.27/\sqrt{36}} = -5.81$

$\alpha = 0.05$ இல் $Z_{\alpha/2} = 1.96$



கணிக்கப்பட்ட பெறுமானம் (-5.81) < அவதிப் பெறுமானம் (-1.96)

$\therefore$ H_0 நிராகரிக்கப்படும்.

ie, வருட சராசரி வருமானம் 10,000/- இற்குச் சமனாகாது.

உ-ம் 3: 1998ம் ஆண்டு நமது நாட்டு மக்களின் சராசரி வயது வருடங்கள் 60 என எதிர்பார்க்கப்பட்டது. இதை சோதிப்பதற்காக 11 பிரதேசங்களில் ஆய்வுகள் மேற்கொள்ளப்பட்டு பெறப்பட்ட தரவுகள் வருமாறு. இத்தரவு எமது எதிர்பார்ப்பை உறுதிசெய்கின்றதா?

64.2, 60.4, 54.2, 59.7, 65.4, 67.0, 68.2, 66.6, 71.9, 57.5, 53.4.

தீர்வு: $H_O : \mu = 60$

$H_1 : \mu \neq 60$

(இருவாற்சோதனை)

மாதிரி அளவு n = 18 (சிறியது)

$$\therefore \quad t = \frac{\overline{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1, 5\%}$$

$$\overline{x} = \frac{688.5}{11} = 62.29$$

$$S^2 = \frac{1}{10}(358.29)$$

$= 35.81$

$S = 5.98$

t இன் பெறுமானம் $= \dfrac{62.29 - 60}{5.98/\sqrt{11}}$

$= 1.27$

$t_{10,\, 0.025} = 2.718$

$-2.718 < 1.27 < 2.718$

$\therefore$ H_o ஏற்றுக் கொள்ளப்படும்.

உ-ம் 4: இரண்டு மாதிரிகள், இரண்டு செவ்வன்குடிகள் $N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right)$ $N\left(\mu_2, \sigma_2,^2\right)$ இலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றது. குடும்பம் ஒன்றின் மாதாந்த செலவு ரூபாயில் அமைய எடுக்கப்பட்ட மாதிரி சம்பந்தமான தகவல்கள் வருமாறு.

மாதிரி 1 $n_1 = 42, \overline{x}_1 = 744.85, S_1^2 = 15816.43$

மாதிரி 2 $n_1 = 32, \overline{x}_2 = 516.78, S_2^2 = 26413.61$

சராசரி குடும்ப மாதாந்த செலவு சமமம்பற்றி சோதிக்க. $(\alpha = 0.05)$

தீர்வு: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ எதிர் $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_1^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Z இன் பெறுமதி $= \dfrac{744.85 - 516.78}{\sqrt{\dfrac{158165.43}{42} + \dfrac{26413.61}{32}}}$

$= 3.36.$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$

$3.36 > 1.96$

$\therefore$ H_o நிராகரிக்கப்படும்.

உ-ம் 5: ஒரு பழைய நகரத்திலிருந்து 400 பேரைக் கொண்ட எழுமாற்றுமாதிரி ஒன்றும் புதிய குடியேற்றங்களிலிருந்து 500 பேரைக்கொண்ட எழுமாற்று மாதிரி ஒன்றும் தெரிவு செய்யப்பட்டு T.V களைக் கொண்டுள்ள வீடுகளைப் பற்றி ஆய்வுக்குட்படுத்தப் பட்டது. 400 பேரைத் தெரிவு செய்த பழைய நகரத்தில் 48 பேரும் 500 பேரைத் தெரிவு செய்த புதிய குடியேற்றங்களில் 120 பேரும் T.V வைத்திருப்பவர்களாக காணப்பட்டனர். பழைய நகரத்தில் T.V வைத்திருப்பவர்கள் விகிதமும், புதிய குடியேற்றங்களில் T.V வைத்திருப்பவர்கள் விகிதமும் சமம் என்பதை சோதிக்க $(\alpha = 0.05)$

தீர்வு: $H_0 : \pi_1 = \pi_2$

$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$

$$P_1 = \frac{48}{400} = 0.12$$

$$P_2 = \frac{120}{500} = 0.24$$

$$P = \frac{400P_1 + 500P_2}{400 + 500} = \frac{168}{900} = \frac{14}{75} = 0.19$$

$$Z = \frac{p_1 - P_2}{\sqrt{P(1-P)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim N(0,1)$$

Z இன் பெறுமானம் $= \dfrac{0.12 - 0.24}{\sqrt{0.19x0.81\left(\dfrac{1}{400} + \dfrac{1}{500}\right)}}$

$= -4.8$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1.96$

$-4.8 < -1.96$

$\therefore$ H_o நிராகரிக்கப்படும்.

உ-ம் 6: பெண்கள் திருமணம் செய்யும் வயது பற்றிய ஒரு ஆய்வின் தகவல்கள் கீழ் தரப்படுகின்றன.

வயது வகுப்பு	பெண்களின் எண்ணிக்கை
15-19	03
19-23	43
23-27	62
27-31	38
31-35	24
35-39	14
39-43	11
43-47	05
47-51	02

மேற்படித்தரவு செவ்வன் பரம்பலில் இருந்து எடுக்கப்பட்டதா என்பதை சோதிக்க.

தீர்வு:

வயது வகுப்பு நடுப்பெறுமானம் (x)	பெண்களின் எண்ணிக்கை (f)
17	03
21	43
25	62
29	38
33	24
37	14
41	11
45	05
49	02
	202

மாதிரி இடை $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

$$= \frac{5690}{202}$$

$$= 28.17$$

மாறற்றிறன் $S^2 = \frac{1}{\sum f}\sum f\left(x-\bar{x}\right)^2$

$$= 44.46$$

$$= (6.67)^2$$

H_o: தரவின் பரம்பல் செவ்வன் $N(28.17, 6.67^2)$

$$P(15 < x < 19) = P\left(\frac{15-28.17}{6.67} < Z < \frac{19-28.17}{6.67}\right)$$

$$= P\left(-1.98 < Z < -1.38\right)$$

$$= P(Z < -1.38) - P(Z < -1.98)$$

$$= 0.0838 - 0.0250$$

$$= 0.0588$$

வகுப்பு 15-19 இன் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் $= 0.0588 \times 202$
$= 11.88$
$= 12.$

இதேபோல் எல்லா வகுப்பினதும் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E) கணிக்கப்படும். ஆனால் மொத்த எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் 202 என அமைதல் வேண்டும். மேலும் அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (0) தரப்பட்டுள்ளது.

சோதனைப் புள்ளிவிபரம் $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{0} \sim \chi^2_{9-1,0.01}$

இதன் மூலம் H_o சோதிக்கப்படும்.

Note: ஏதாவது வகுப்பின் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் 5 இலும் சிறிதாக அமையும் எனின் அந்த வகுப்பு மேல் அல்லது கீழ் வகுப்புடன் சேர்த்துக் கொள்ளப்படும்.

உ-ம்.

வகுப்பு	எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E)	அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (O)
00-05	5	2
05-10	2	3
10-15	8	6
15-20	6	8

என அமையும் எனில்

திருத்திய அமைப்பு கணிப்புக்கு பயன்படும்.

வகுப்பு	எதிர்பார்க்கப்பட்ட மீடிறன் (E)	அவதானிக்கப்பட்ட மீடிறன் (O)
00-10	7	5
10-15	8	6
15-20	6	8

என அமையும்.

உ-ம் 7: ஒரே வயதும் ஒரே உயரமும் உடையவர்களின் உடல் நிறையை அதிகரிக்கச் செய்வதற்காக 4 வகையான பயிற்சிகள் அளிக்கப்படுகின்றன. பயிற்சியின் பின்னர் அவர்களின் நிறைகள் பின்வருமாறு. நான்கு வகைப் பயிற்சிகளும் சமபலன் அளிக்கின்றதா என சோதிக்க.

பயிற்சிகள்

	T_1	T_2	T_3	T_4
	67.3	74.2	63.1	48.7
	36.9	42.2	32.9	49.0
	63.2	58.6	59.2	62.0
	26.8	36.6	42.4	38.8
	54.8	54.6	34.0	48.2
	64.2	81.8	65.6	-
	81.4	-	-	-
மொத்தம்	394.6	348.0	297.2	246.7

தீர்வு: $H_o: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$n_1 = 7, n_2 = 6, n_3 = 6, n_4 = 5$

$N = n_1+n_2+n_3+n_4$

$= 24.$

மொத்தம் $T = 1286.5$

திருத்தக் கணியம் $C.F = T^2/N$

$= 1286.5^2 / 24$

$= 68961.76$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$SST = \sum x_1^2 + \sum x_2^2 + \sum x_3^2 + \sum x_4^2 - CF$

$= 74357.57 - 68961.76$

$= 5395.81$

மாதிரிகளுக்கிடையிலான வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

$$SSB = \frac{T_1^2}{7} + \frac{T_2^2}{6} + \frac{T_3^2}{6} + \frac{T_4^2}{5} - CF$$

$$= \frac{(394.6)^2}{7} + \frac{(348.0)^2}{6} + \frac{(297.2)^2}{6} + \frac{(246.7)^2}{5} - 68961.76$$

$= 359.89$

வழு வர்கங்களின் கூட்டுத்தொகை.

SSE $= 5395.81 - 359.89$
$= 5035.92$

ANOVA அட்டவணை

மாறற்றிறன்	d.f	s.s	m.s	F விகிதம்
பயிற்சிகள்	3	359.89	119.96	$\frac{119.96}{251.79} = 0.48$
வழு	20	5035.92	251.79	
மொத்தம்	23	5395.81		

F - அட்டவணை பெறுமானம் $F_{3, 20, 0.05} = 3.10$
அட்டவணைப் பெறுமானம் கணிக்கப்பட்ட பெறுமானத்திலும் பெரிது

$\therefore$ H_0 ஏற்றுக்கொள்ளப்படும்.

ie, பயிற்சிகள் சமபலனே அளிக்கின்றன.

மாதிரி வினாக்கள்

(1) ஒரு பண்பு x இன் பெறுமானங்கள் 7, 2, 3, 4, 1 எனும் ஐந்து அலகுகள் உடைய ஒரு குடி ஆகும். பிரதிவைப்பற்ற முறையில் மாதிரி அளவு 2 ஆகவுடைய எல்லா மாதிரிகளையும் எடுத்து, குடி இடையானது மாதிரி இடைகளின் இடைக்கு சமம் என்பதை சரிபார்க்க.

(2) 1, 2, 3, 4, 5, 6 பெறுமானமுடைய 6 அலகுகளைக் கொண்ட குடியைக் கருதுக. பிரதிவைப்பு அற்றமுறையில் 2 பருமன் கொண்ட சாத்தியமான எல்லா மாதிரிகளையும் எழுதி,

(i) மாதிரி இடையானது குடி இடையின் ஒரு கோடாத மதிப்பான் என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(ii) மாதிரி எடுப்புக்கான மாறற்றிறனைக் கணித்து அது மாதிரி இடையின் மாறற்றிறனுக்கு ஒத்திருக்கிறது என்பதை சோதிக்க.

(iii) இந்த மாறற்றிறனானது பிரதிவைப்பு முறை மூலம் மாதிரி எடுத்தலினால் பெறப்படும் மாறற்றிறனிலும் சிறிது எனக் காட்டுக.

(3) (i) $\alpha = 0.05$ இல் $\theta_1 = 5, \quad \theta_2 = 10$ எனின்

(a) $F_{\theta_1, \theta_2, \alpha}$

(b) $F_{\theta_1, \theta_2, 1-\alpha}$ ஆகியவற்றின் பொறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) (a) $t_{18, 0.01}$

(b) $t_{15, 0.05}$

(c) $t_{20, 0.10}$ ஆகியவற்றின் பொறுமானங்களைக் காண்க.

(4) (i) U ஆனது சுயாதீனப்படி 20 ஐ கொண்ட t - பரம்பலில் இருப்பின் $P(U \geq 2.086)$ இன் பெறுமானத்தை காண்க.

(ii) V ஆனது சுயாதீனப்படி 16 ஐ கொண்ட t - பரம்பலில் அமையும் எனின் $P(-2.583 \leq V \leq 2.583)$ இன் பெறுமதியைக் காண்க.

(iii) W ஆனது சுயாதீனப்படிகள் 7, 21 ஐ கொண்ட F - பரம்பலில் ஒழுகுகின்ற மாறி எனின் $P(W \leq 3.66)$ இன் பெறுமதியைக் காண்க

(5) 400 ஆண் மாணவர்களைக் கொண்ட மாதிரியின் சராசரி உயரம் 171.38 cm ஆக காணப்பட்டது. இந்த மாதிரியானது 171.17 cm சராசரி உயரமும் 3.30 cm நியமவிலகலும் கொண்ட அளவுள்ள குடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக இருக்கமுடியுமா? ($\alpha = 0.05$)

(6) 400 பொருள்களைக் கொண்ட மாதிரியானது இடை 4 உம் மாறற்றிறன் 4 உம் கொண்ட செவ்வன் குடியிலிருந்து எடுக்கப்படுகிறது. மாதிரி இடை 4.45 எனின் இது ஒரு எழுமாற்று மாதிரியாக இருக்க முடியுமா?

(7) 1,00,000 டென்னிஸ் பந்துகளைக் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து எழுமாற்றாக 400 தெரிவுசெய்யப்பட்டு பரீட்சிக்கப்பட்டது. அவற்றில் 20 பழுதானவையாகக் காணப்பட்டது. முழுத் தொகுதியிலும் உள்ள பழுதான பந்துகளின் எதிர்பாக்கப்பட்ட அளவின் 95% நம்பிக்கை மட்டத்திலான எல்லையை காண்க.

(8) ஒரு குறித்த நகரில் 1000 குடும்பப்பெண்களை எடுத்து மாதிரி ஆய்வுக்குட்படுத்திய போது 23% ஆனவர்கள் குறித்த ஒரு வகை அமுக்க அடுப்பை (Pressure Cooker) ஐ விரும்புகிறார்கள். அந்த நகரிலுள்ள எல்லாக் குடும்ப பெண்களிலும் குறித்தவகை அமுக்க அடுப்பை விரும்புகின்ற விகிதத்திற்கான 99% பொருளுள்ள எல்லையை காண்க.

(9) 500 பேரைக் கொண்டமாதிரி ஒன்று கொழும்பில் எடுக்கப்பட்ட போது, அவர்களில் 200 பேர் நல்லெண்ணை பாவிப்பதாகக் காணப்பட்டனர். மேலும் இன்னொரு 400 பேரை கொண்ட மாதிரி கண்டியில் எடுக்கப்பட்ட போது, அவர்களில் 200 பேர் நல்லெண்ணை பாவிப்பவர்களாகக் காணப்பட்டனர். நல்லெண்ணை பாவிப்பவர்களின் விகிதத்தில் இரண்டு நகரங்களுக்கும் இடையே வித்தியாசம் இல்லை என்பதை சோதிக்க. ($\alpha = 0.05$)

(10) அறுவைச் சிகிச்சை மூலம் மகப்பேற்றை மேற்கொண்ட 11 தாய்மாரின் இருதய துடிப்பிற்கான சுட்டி அறுவைச் சிகிச்சைக்கு முன்னும் பின்னும் அளக்கப்பட்டது.

நோயாளி இல	அறுவைச் சிகிச்சைக்கு முன்	அறுவைச் சிகிச்சைக்கு பின்
1	0.45	0.60
2	0.54	0.65
3	0.48	0.63
4	0.62	0.78
5	0.48	0.63
6	0.60	0.80
7	0.45	0.69
8	0.46	0.62
9	0.35	0.68
10	0.40	0.50
11	0.44	0.57

அறுவைச் சிகிச்சைக்கு முன்னுள்ள சராசரி இருதய துடிப்பிற்கான சுட்டி, அறுவைச் சிகிச்சைக்கு பின்னுள்ள சராசரி இருதய துடிப்பிற்கான சுட்டியுடன் ஒப்பிடும்போது ஒரு பொருண்மை அதிகரிப்பை கொண்டுள்ளதா இல்லையா என்பதை சோதிக்க. ($\alpha = 0.05$)

(11) 500 பக்கங்களைக் கொண்ட புத்தகமொன்று மேலோட்டமாக பரீட்சிக்கப்பட்ட போது, பக்கம் ஒன்றிற்கான வழுக்களின் எண்ணிக்கைகள் பின்வருமாறு காணப்பட்டது.

வழுக்களின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	275	138	75	7	4	1

χ^2 சோதனையைப் பாவித்து வழுக்களின் எண்ணிக்கை ஒரு புவசோன் பரம்பலில் உள்ளது எனும் சூனியக்கருதுகோளைச் சோதிக்க. ($\alpha = 0.05$)

(12) ஒரு பெரிய உற்பத்தி ஸ்தாபனத்தில் நான்கு வகையான தொழிலாளர்கள் வேலை செய்கிறார்கள். அவர்களுக்கு மூன்று வகையான மேலதிக கொடுப்பனவுகள் வழங்கப்படுகின்றது. கொடுப்பனவு திட்டம் பற்றி தொழிலாளர் கருத்தின் அடிப்படையில் கீழேயுள்ள அட்டவணை தரப்படுகிறது.

தொழிலாளர் வகை	மேலதிக கொடுப்பனவுத் திட்டம்			மொத்தம்
	1ம் வகை	2ம் வகை	3ம் வகை	
கூலியாட்கள்	190	243	197	630
எழுதுவினைஞர்	82	44	44	170
தொழில்நுட்பவியலாளர்	23	78	34	135
அதிகாரிகள்	5	12	8	25
மொத்தம்	300	377	283	960

மேலதிக கொடுப்பனவுத்திட்டம் பற்றிய கருத்து தொழிலாளர் வகையில் சார்ந்துள்ளதா என்பதை 5% பொருண்மைமட்டத்தில் சோதிக்க.

(13) 450 பேரைக்கொண்ட மாதிரி ஒன்றில் ஒவ்வொருவரது வயதும் நிறையும் அளக்கப்பட்டது.

	வயது (ஆண்டு)				
	20க்கு குறைவு (<20)	20க்கு கூட 40க்கு குறைவு ($20 -< 40$)	40க்கு கூட 60க்கு குறைவு ($40 -< 60$)	60க்கு கூட (≥ 60)	மொத்தம்
நிறை (Kg) 50க்கு குறைவு (<50)	52	15	15	8	90
50இற்கு கூட 60இற்கு குறைவு ($50-<60$)	35	45	25	25	130
60இற்கு கூட 70இற்கு குறைவு ($60-<70$)	23	25	52	35	135
70இற்கு கூட (≥ 70)	10	20	33	32	95
மொத்தம்	120	105	125	110	450

நிறை வயதில் தங்கியுள்ளதா என்பதை 5% மட்டத்தில் சோதிக்க.

(14) சம மாறற்றிறன் கொண்ட மூன்று செவ்வன்குடிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரிகள் பின்வருமாறு:-

மாதிரி		
I	II	III
10	9	14
12	7	11
9	12	15
16	11	14
13	11	16

குடிகளின் இடைகளின் சமம்பற்றி சோதிக்க. ($\alpha = 0.05$)

(15) மூன்று வகையான வித்துகள் பெறப்பட்டு ஒவ்வொருவகை வித்துகளும் 5 பாத்திகள் வீதம் நடப்பட்டதன் பின்னர் பெறப்பட்ட விளைச்சல் அளவு கீழே தரப்பட்டுள்ளது.

வகை		
A	B	C
20	18	25
21	20	28
23	17	22
16	15	28
20	25	32
100	95	135

வித்துக்களின் வகைகளின் விளைச்சலில் வேறுபாடு இல்லை என்பதை 5% மட்டத்தில் சோதிக்க.

(16) குதிரையின் உணவுக்காக அறிமுகம்செய்யப்பட்ட ஒருவகைப் பச்சைப்புல்லு நான்கு வெவ்வேறு பிரதேசங்களில் (A,B,C,D) பயிரிடப்பட்டு பெறப்பட்ட விளைச்சல் (தொன்/ஏக்கர்) பின்வருமாறு.

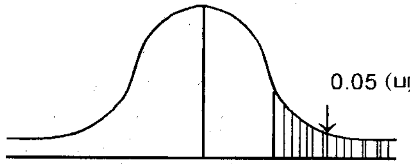
பிரதேசங்கள்			
A	B	C	D
11.1	18.3	17.3	11.7
15.2	21.8	22.5	21.4
17.8	24.8	26.7	25.2
19.9	27.3	29.5	22.6
21.3	29.3	31.1	27.4
21.5	30.8	31.3	29.6
20.5	32.4	30.3	25.7
18.6	32.5	24.4	31.4
15	31.8	-	33.1
9	-	-	17.6
12.5	-	-	-

நான்கு பிரதேசங்களிலும் மேற்குறிப்பிட்ட புல்லின் விளைச்சல்கள் சமம்பற்றி 0.01 மட்டத்தில் சோதிக்க.

எழுமாற்று அட்டவணை

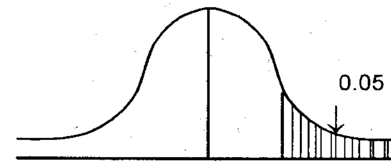
85967	73152	14511	85285	36009	95892	36962	67835	63314	50162
07483	51453	11649	86348	76431	81594	95848	36738	25014	15460
96283	01898	61414	83525	04231	13604	75339	11730	85423	60698
49174	12074	98551	37895	93547	24769	09404	76548	05393	96770
97366	39941	21225	93629	19574	71565	33413	56087	40875	13351
90474	41469	16812	81542	81652	45554	27931	93994	22375	00953
28599	64109	09497	76235	41383	31555	12639	00619	22909	29563
25254	16210	89717	65997	82667	74624	36348	44018	64732	93589
28785	02760	24359	99410	77319	73408	58993	61098	04393	48245
84725	86576	86944	93296	10081	82454	76810	52975	10324	15457
41059	66456	47679	66810	15941	84602	14493	65515	19251	41642
67434	41045	82830	47617	36932	46728	71183	36345	41404	81110
72766	68816	37643	19959	57550	49620	98480	25640	67257	18671
92079	46784	66125	94932	64451	29275	57669	66658	30818	58353
29187	40350	62533	73603	34075	16451	42885	03448	37390	96328
74220	17612	65522	80607	19184	64164	66962	82310	18163	63495
03786	02407	06098	92917	40434	60602	82175	04470	78754	90775
75085	55558	15520	27038	25471	76107	90832	10819	56797	33751
09161	33015	19155	11715	00551	24909	31894	37774	37953	78837
75707	48992	64998	87080	39333	00767	45637	12538	67439	94914
21333	48660	31288	00086	79889	75532	28704	62844	92337	99695
65626	50061	42539	14812	48895	11196	34335	60492	70650	51108
84380	07389	87891	76255	89604	41372	10837	66992	93183	56920
46479	32072	80083	63868	70930	89654	05359	47196	12452	38234
59847	97197	55147	76639	76971	55928	36441	95141	42333	67483
31416	11231	27904	57383	31852	69137	96667	14315	10007	31929
82066	83436	67914	21465	99605	83114	97885	74440	99622	87912
01850	42782	39202	18582	46214	99228	79541	78298	75404	63648
32135	89276	89582	87138	16165	15984	21466	63830	30475	74729
59388	42703	55198	80380	67067	97155	34160	85019	03527	78140
58089	27632	50987	91373	07736	20436	96130	73483	85332	24384
61705	57285	30392	23660	75841	21931	04295	00875	09114	32101
18914	98982	60199	99275	41967	35208	30357	76772	92656	62318
11965	94089	34803	48941	69709	16784	44642	89761	66864	62803
85251	48111	80936	81781	93248	67877	16498	31924	51315	79921
66121	96986	84844	93873	46352	92183	51152	85878	30490	15974
53972	96642	24199	58080	35490	03482	66953	49521	63719	57165
14509	16594	78883	43222	23093	58645	60257	89250	63266	90858
37700	07688	65533	72126	23611	93993	01848	03910	38552	17472
85466	59392	72722	15473	73295	49759	56157	60477	83284	56367
52969	55863	42312	67842	05673	91878	82738	36563	79540	61935
42744	68315	17514	02878	97291	74851	42725	57894	81434	62041
26140	13336	67726	61876	29971	99294	96664	52817	90039	53211
95589	56319	14563	24071	06916	59555	18195	32280	79357	04224
39113	13217	59999	49952	83201	47709	53105	19295	88318	41626
41392	17622	18994	98283	07249	52289	24209	91139	30715	06604
54684	53645	79246	70183	87731	19185	08541	33519	07223	97413
89442	61001	36658	57444	95388	36682	38052	46719	09428	94012
36751	16778	54888	15357	68003	43564	90976	58904	40512	07726
98159	02564	21416	74944	53049	88749	02865	25772	89853	88714

நியம செவ்வன் பரம்பல் அட்டவணை



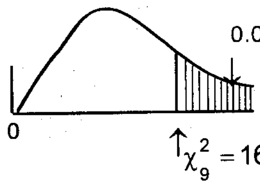
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4403	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3485
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3212	.3176	.3141
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1028	.1010	.0993	.0975
1.3	0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0843	.0828	.0813
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2 5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2 8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009

t பரம்பல் அட்டவணை



சுயாதீனப்படி	வால்களிலுள்ளபரப்பு			
	.10	.05	.02	.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.925
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.452	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.658	1.980	2.358	2.617
Normal Distribution	1.645	1.960	2.326	2.576

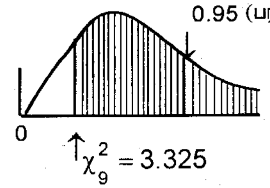
χ^2 பரம்பல் அட்டவணை



(சுயாதீனப்படி 9)

	வலதுவாலின்பரப்பு				
சுயாதீனப்படி	.20	.10	.05	.025	.01
1	1.642	2.706	3.841	5.024	6.635
2	3.219	4.605	5.991	7.378	9.210
3	4.642	6.251	7.815	9.348	11.345
4	5.989	7.779	9.488	11.143	13.277
5	7.289	9.236	11.070	12.833	15.086
6	8.558	10.645	12.592	14.449	16.812
7	9.803	12.017	14.067	16.013	18.475
8	11.030	13.362	15.507	17.535	20.090
9	12.242	14.684	16.919	19.023	21.666
10	13.442	15.987	18.307	20.483	23.209
11	14.631	17.275	19.675	21.920	24.725
12	15.812	18.549	21.026	23.337	26.217
13	16.985	19.812	22.362	24.736	27.688
14	18.151	21.064	23.685	26.119	29.141
15	19.311	22.397	24.996	27.488	30.578
16	20.465	23.542	26.296	28.845	32.000
17	21.615	24.769	27.587	30.191	33.409
18	22.760	25.989	28.869	31.526	34.805
19	23.900	27.204	30.144	32.852	36.191
20	25.038	28.412	31.410	34.170	37.566
21	26.171	29.615	32.671	35.479	38.932
22	27.301	30.813	33.924	36.781	40.289
23	28.429	32.007	35.172	38.076	41.638
24	29.553	33.196	36.415	39.364	42.980
25	30.675	34.382	37.652	40.647	44.314
26	31.795	35.563	38.885	41.923	45.642
27	32.912	36.741	40.113	43.194	46.963
28	34.027	37.916	41.337	44.461	48.278
29	35.139	39.087	42.557	45.722	49.588
30	36.250	40.256	43.773	46.979	50.892

χ^2 பரம்பல் அட்டவணை

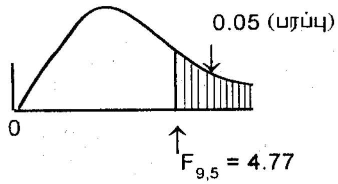


(சுயாதீனப்படி 9)

	வலதுவாலின்பரப்பு				
சுயாதீனப்படி	.99	.975	.95	.90	.800
1	.00016	.00098	.00398	.0158	.0642
2	.0201	.0506	.103	.211	.446
3	.115	.216	.352	.584	1.005
4	.297	.484	.711	1.064	1.649
5	.554	.831	1.145	1.610	2.343
6	.872	1.237	1.635	2.204	3.070
7	1.239	1.690	2.167	2.833	3.822
8	1.646	2.180	2.733	3.490	4.594
9	2.088	2.700	3.325	4.168	5.380
10	2.558	3.247	3.940	4.865	6.179
11	3.053	3.816	4.575	5.578	6.989
12	3.571	4.404	5.226	6.304	7.807
13	4.107	5.009	5.892	7.042	8.634
14	4.660	5.629	6.571	7.790	9.467
15	5.229	6.262	7.261	8.547	10.307
16	5.812	6.908	7.962	9.312	11.152
17	6.408	7.564	8.672	10.085	12.002
18	7.015	8.231	9.390	10.865	12.857
19	7.633	8.907	10.117	11.651	13.716
20	8.260	9.591	10.851	12.443	14.578
21	8.897	10.283	11.591	13.240	15.445
22	9.542	10.982	12.338	14.041	16.314
23	10.196	11.689	13.091	14.848	17.187
24	10.856	12.401	13.848	15.658	18.062
25	11.524	13.120	14.611	16.473	18.940
26	12.198	13.844	15.379	17.292	19.820
27	12.879	14.573	16.151	18.114	20.703
28	13.565	15.308	16.928	18.939	21.588
29	14.256	16.047	17.708	19.768	22.475
30	14.953	16.791	18.493	20.599	23.364

F பரம்பல் அட்டவணை

(வாலின்பரப்பு 0.05)



(சுயாதீனப்படி $\theta_1 = 9, \theta_2 = 5$)

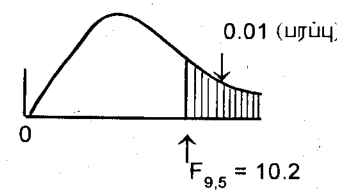
தொகுதியின் சுயாதீனப்படி (θ_1)

பகுதியின் சுயாதீனப்படி (θ_2)

θ_2 \ θ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

F பரம்பல் அட்டவணை

(வாலின்பரப்பு 0.01)



(சுயாதீனப்படி $\theta_1 = 9, \theta_2 = 5$)

தொகுதியின் சுயாதீனப்படி (θ_1)

பகுதியின் சுயாதீனப்படி (θ_2)

θ_2 \ θ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5043	5625	5764	5859	5928	5982	6023	6056	6106	6157	6109	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	2.88	2.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

$e^{-\lambda}$ இன் பெறுமானங்கள்

(புவசோன் நிகழ்தகவு கணிப்பிற்காக)

λ	$e^{-\lambda}$	λ	$e^{-\lambda}$
0.1	0.90484	5.1	0.00610
0.2	0.81873	5.2	0.00552
0.3	0.74082	5.3	0.00499
0.4	0.67032	5.4	0.00452
0.5	0.60653	5.5	0.00409
0.6	0.54881	5.6	0.00370
0.7	0.49659	5.7	0.00335
0.8	0.44933	5.8	0.00303
0.9	0.40657	5.9	0.00274
1.0	0.36788	6.0	0.00248
1.1	0.33287	6.1	0.00224
1.2	0.30119	6.2	0.00203
1.3	0.27253	6.3	0.00184
1.4	0.24660	6.4	0.00166
1.5	0.22313	6.5	0.00150
1.6	0.20190	6.6	0.00136
1.7	0.18268	6.7	0.00123
1.8	0.16530	6.8	0.00111
1.9	0.14957	6.9	0.00101
2.0	0.13534	7.0	0.00091
2.1	0.12246	7.1	0.00083
2.2	0.11080	7.2	0.00075
2.3	0.10026	7.3	0.00068
2.4	0.09072	7.4	0.00061
2.5	0.08208	7.5	0.00055
2.6	0.07427	7.6	0.00050
2.7	0.06721	7.7	0.00045
2.8	0.06081	7.8	0.00041
2.9	0.05502	7.9	0.00037
3.0	0.04979	8.0	0.00034
3.1	0.04505	8.1	0.00030
3.2	0.04076	8.2	0.00027
3.3	0.03688	8.3	0.00025
3.4	0.03337	8.4	0.00022
3.5	0.03020	8.5	0.00020
3.6	0.02732	8.6	0.00018
3.7	0.02472	8.7	0.00017
3.8	0.02237	8.8	0.00015
3.9	0.02024	8.9	0.00014
4.0	0.01832	9.0	0.00012
4.1	0.01657	9.1	0.00011
4.2	0.01500	9.2	0.00010
4.3	0.05357	9.3	0.00009
4.4	0.01228	9.4	0.00008
4.5	0.01111	9.5	0.00007
4.6	0.01005	9.6	0.00007
4.7	0.00910	9.7	0.00006
4.8	0.00823	9.8	0.00006
4.9	0.00745	9.9	0.00005
5.0	0.00674	10.0	0.00005

References :

1. Statistics
   W. M. Harper

2. Statistics
   R. S. N. Pillai & V. Bagavathi

3. Mathematical Statistics
   J. N. Kapur & H. C. Saxena

4. Statistical Inference
   S. D. Silvey

5. Experimental Design
   Walter T. Federer

6. Sampling Theory and Methods
   M. N. Murthy

7. Sampling Techniques
   William G. Cochran

8. Statistics for Applied Economics and Business
   Richard L. Mills

9. Basic Statistics
   B. L. Agarwal

10. Business Statistics and Statistical Method
    G. L. Thirkettle

11. Business Statistics and Operations Research
    Dr. S. P. Gupta, Dr. P. K. Gupta & Dr. Manmohan

12. வணிகப்புள்ளிவிபரவியல் II
    வணிகக்கல்வித்துறை, தேசிய கல்வி நிறுவனம்

Typesetting & Printing
Admiral Graphics
403 1/1, Galle Road, Colombo - 6.
Telephone : 596765, 596766