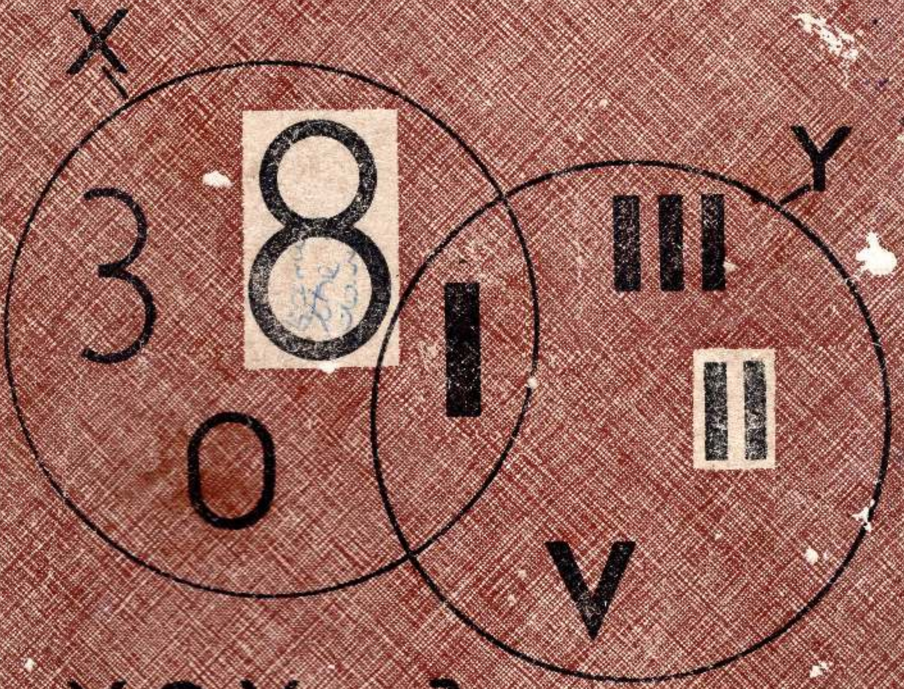
கணிதம்



$X \cap Y = ?$

$X \cup Y = ?$

8 ஆம் வகுப்பு

கணிதம் 8—2

எட்டாம் வகுப்பு

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

முதற் பதிப்பு 1971

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களப் பிரசுரம்

அரசாங்க அச்சகம், இலங்கை.

2—CP 9457—40,000 (70/10)

உள்ளுறை

1 1+1=10?

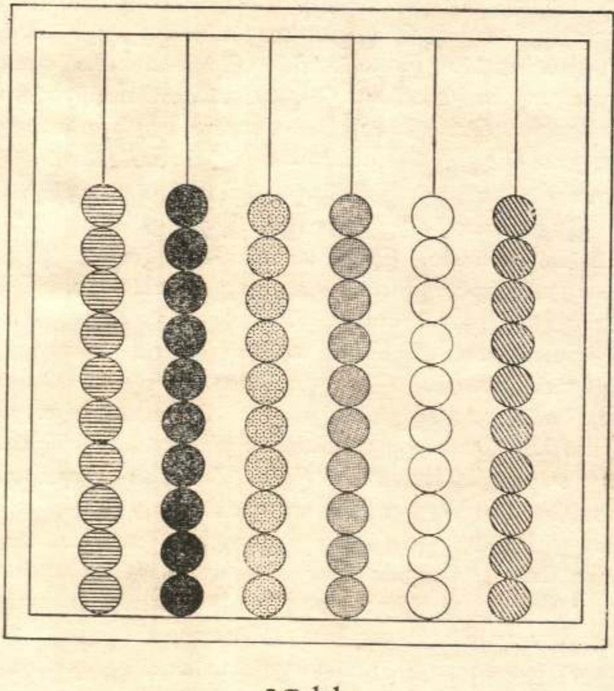
எண்கள் பற்றியும், எண் குறிகள் பற்றியும் பல உண்மைகளை ஆறும், ஏழாம் வகுப்புக்களில் ஆராய்ந்துள்ளோம். "இரண்டு" என்ற பெயர்கொண்ட எண்ணைக் குறிக்குங் குறி "2" என நீங்கள் அறிவீர்கள். இவ்வெண்குறி, இலக்கமென்றும் கூறப்படும். பல்வேறு தேசத்தவர்களும், காலத்துக்குக் காலம் பல்வேறு குறிகளின் தொடைகளால் எண்களைக் குறித்து வந்துள்ளார்கள். சிங்களவர், தமிழர், உரோமர், பபிலோனியர், மாயர் போன்றவர்கள் பிரயோகித்த எண் குறிகள் பற்றி ஆறும் வகுப்பிற் படித்தது உங்களுக்கு நினைவிருத்தல் கூடும். இந்நாட்களில், இந்து—அராபிய எண் குறியீட்டு முறையையே உலகின் பெரும்பான்மையினர் வழக்கத்திற் கொண்டுள்ளனர். இவ்வதிகாரத்தில், எண்கள் பற்றியும் எண்குறிகள் பற்றியும், நாம் மேலுஞ் சில விபரங்களை அறிய முயல்வோம்.

222 என்ற எண் குறி குறிக்கின்ற, எண்ணைக் கருத்திற் கொள்வோம். இந்த எண், "இருநூற்று இருபத்து இரண்டு" என வாசிக்கப்படும். எனவே, இந்த எண்ணிலே, இரண்டு நூறுகளும் இரண்டு பத்துக்களும், இரண்டு ஒன்றுகளும் உள்ளன. இவற்றை எல்லாங் குறித்தற்கு, 2 என்ற ஒரேயொரு இலக்கத்தை மட்டுமே பயன்படுத்தியுள்ளோம். ஆயின், அந்த இலக்கம், மூன்று முறை பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு ஒவ்வோர் இரண்டும், வெவ்வேறு பொருளை, அல்லது பெறுமானத்தைக் கொண்டுள்ளது. ஆரம்ப வகுப்புக்களிலே, இவை பற்றியெல்லாம் நீங்கள் படித்திருப்பீர்கள். 222 என்ற எண்குறியிலே உள்ள "இரண்டு" களின் பெறுமானங்கள், எவ்வகையிலே வேறுபடுகின்றன என உங்களாற் கூற முடியுமா? ஓர் எண்குறியீட்டில், இடத்திற்கேற்ப அதன் இலக்கங்களின் பெறுமானங்கள் வேறுபடுகின்றன என நீங்கள் விளங்கிக்கொள்வீர்கள். ஆகவே, 'இருநூற்று இருபத்து இரண்டு' என்னும் எண் 222 என்னும் எண்குறியாற் குறிக்கப்படுமெனவும், இதில் 2 என்ற ஒரேயொரு இலக்கத்தை மும்முறை பயன்படுத்தியுள்ளோமென்பதையுங் கண்டிருப்பீர்கள்.

எண்குறிகளை எழுதிக் கணித்தல் செய்யும் முறை நடைமுறைக்கு வருமுன், கணித்தல்கள் செய்தற்கு எண்சட்டம் என்னுங் கருவி பிரயோகிக்கப்பட்டது. ஆரம்ப வகுப்புக்களிலே, எண் சட்டத்தைப் பிரயோகித்து நீங்களும் எண்ணுதற்குப் பயின்றிருத்தல் கூடும். எனவே, எணசட்டம் உங்களுக்கு அறிமுகமான ஒன்றே எனலாம்.

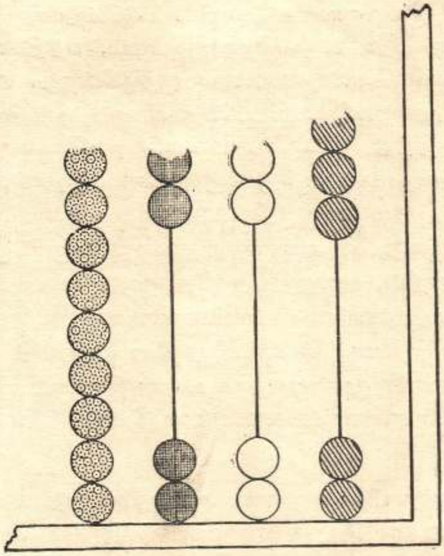
ஆரம்ப வகுப்புக்களில் நீங்கள் பிரயோகித்த கணிதப் பயிற்சிப் புத்தகம் ஒவ்வொன்றினது முன்அட்டையிலும் எண்சட்டத்தின் படத்தை நீங்கள் காணலாம். இக்கருவி இலங்கையிலுள்ள சீனர் களின் கடைகள் சிலவற்றில், இந்நாட்களிலும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. எத்துணை விரைவாக அதை அவர்கள் கணித்தற்குப் பிரயோகிக் கின்றனர் என்பதைப் பார்த்தால், நீங்கள் வியப்படைதல் கூடும்.

எண்சட்டம் என்பது, மணிகள் சிலவற்றைக் கொண்டுள்ள நூல்கள் அல்லது கம்பிகள் இணைக்கப்பட்ட சட்டத்தால் ஆனது. உரு 1—1 இல் உள்ளதுபோல எண்சட்டம் வைக்கப்படும்போது, ஒவ்வொரு நிரலிலும் எத்தனை மணிகள் உள்ளன என உங்களாற் கூற முடியுமா ?



உரு 1-1

ஒவ்வொரு நிரலிலும் ஒவ்வொரு தொகை மணிகளை ஒழுங்கு படுத்துவதன் மூலம், எண்சட்டத்திலே எண்கள் குறிக்கப்படுகின்றன. 222 என்ற எண், எண்சட்டம் ஒன்றிலே குறிக்கப்படும்போது, உரு 1—2 இல் உள்ளதுபோற் காட்டப்படும்.



உரு 1–2

இருநூற்று	இருபத்து	இரண்டு
2	2	2

இவ்வெண்ணிலே உள்ள "இரண்டு" களுள் வலதுபுறத்தேயுள்ளது, இரு ஒன்றுகளைக் குறிக்கிறது. "இரண்டு" களுள் நடுவே உள்ளது, இரண்டு பத்துக்களை அதாவது இருபதைக் குறிக்கிறது. இடதுபுறத்தே உள்ள "இரண்டு", இரண்டு நூறுகளைக் குறிக்கிறது. எனவே, பின்வருஞ் சமன்பாட்டை நாம் எழுதலாம்.

$$222 = 2 \times 100 + 2 \times 10 + 2 \times 1$$

இதில், 100, 10, 1 ஆகியவற்றை, பத்தின் வலுக்களாகவும் நாம் குறிக்கலாம். எனவே,

$$222 = 2 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

எனவே, இலக்கம் ஒன்றின் பெறுமானம், அவ்விலக்கம் உள்ள இடத்துக்கு ஏற்ப வேறுபடுகிறது. முழு எண் ஒன்றிலே, வலது புறத்தே உள்ள இலக்கம், ஒன்றுகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. அதை அடுத்து, இடது புறத்தே உள்ள இலக்கம், பத்துக்களின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. அதற்கடுத்து இடது புறத்தே உள்ள இலக்கம், நூறுகளின் எண்ணிக்கையைக் காட்டுகிறது. இப்பெறுமான

வேறுபாடுகள் இவ்வண்ணங் குறிக்கப்படுகின்றன. முழு எண் ஒன்றிலே, இடது புறமாக ஒவ்வோர் இடமும், பத்தின் நிறையெண் அடுத்துயர்ந்த முழுவெண் வலுவைக் குறிக்கின்றது. எனவே, எமது எண்குறியீட்டு முறையிலே, இடப்பெறுமானம் ஒன்றிருப்பதை நாம் காண்கிறோம். இந்த இடப்பெறுமானம் ஒவ்வொன்றும் பத்தின் நிறையெண் வலுக்களுள் ஒன்றாக அமைவதால், இவ்வெண் குறியீட்டுமுறை, தசம எண் குறியீட்டு முறை எனவும், இந்தத் தசம எண்குறியீட்டு முறையின் அடி, பத்து எனவுங் கூறுகிறோம். எனவே, முழுவெண் ஒன்றில், வலது புறத்தே முதலாக உள்ள இலக்கம், பத்தின் பூச்சியவலுக்களின் எண்ணிக்கையையும், வலது புறமிருந்து இரண்டாவதாக உள்ள இலக்கம் பத்தின் முதலாம் வலுக்களின் எண்ணிக்கையையும், மூன்றாவதாக உள்ள இலக்கம் பத்தின் இரண்டாம் வலுக்களின் எண்ணிக்கையையுமாக இடப்பெறுமானங்கள் குறிக்கப்படுகின்றன.

பத்துத் தவிர்ந்த பிற அடிகளில் அமைந்த, அதாவது, இடப்பெறுமானம் வேறு ஏதாவதொரு எண்ணின் வலுவாக அமைந்த எண் குறியீட்டு முறையேதும் இருக்க முடியுமா? அப்படி வேறு எண் குறியீட்டு முறைகள் இருப்பின், கூட்டல் கழித்தல், பெருக்கல், பிரித்தல் போன்ற அடிப்படைக் கணிதச் செய்கைகளை அம் முறைகளிலுஞ் செய்ய முடியுமா? இவ்வதிகாரத்தை மேலும் படிக்கும் போது, மேலுள்ள வினாக்கள் இரண்டிற்கும் விடை காண்பீர்கள்.

பயிற்சி 1–1

1. கூட்டுக.

(i)

பத்துக்கள்	ஒன்றுகள்
1	2
3	4
2	5

(ii)

சமீ.	மிமீ.
3	2
1	4
2	8

(iii)

அடி	அங்.
2	6
3	9
1	8

(iv)

கலன்	பைந்து
2	6
3	5
1	3

(v)

அந்.	குவா.
1	2
2	3
3	1

2. கழிக்க.

(i)

பெர்.	சங்.
7	3
4	7

(ii)

குரோஸ்	டசின்
9	2
5	6

(iii)

இரு.	அவு.
8	3
5	9

(iv)

கிழமை	நாள்
4	2
2	6

(v)

புசல்	குவா.
9	2
6	3

3. பின்வருங் கூட்டல்கள் சரியாக அமையக்கூடியனவாக நிரல்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஏற்ற தலைப்புக்கள் இடுக.

(i)

....	....
4	2
2	4
5	3
12	3

(ii)

....	....
2	3
2	2
3	4
13	1

(iii)

....	....
2	6
4	3
6	9
13	6

(iv)

...	...
2	7
4	8
1	9
8	8

(v)

....	....
1	9
3	6
	7
7	2

4. பின்வருங் கழித்தல்கள் சரியாக அமையக்கூடியதாக, நிரல்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஏற்ற தலைப்புக்கள் இடுக :—

(i)

....	....
8	4
5	7
2	7

(ii)

....	....
8	2
3	6
4	3

(iii)

....	....
7	3
2	8
4	9

(iv)

....	....
5	5
2	7
2	9

(v)

....	....
8	4
3	7
4	5

மேலேயுள்ள பயிற்சிக்கு விடையளித்தல், இலகுவாக இருந்திருத்தல் கூடும். அவற்றை ஆராய்ந்து மேலுஞ் சில உண்மைகளை அறிய நாம் இப்பொழுது முயல்வோம்.

பயிற்சி 1–1 இல், வினா 1–(iv) ஐ அவதானியுங்கள்

கலன்	பைந்து
2	6
3	5
1	3
7	6

இதில், பைந்து எனப் பெயரிடப்பட்ட நிரலிலே, ஏழிற் கூடியதும் பூச்சியத்திற் குறைந்ததுமான எண் எதுவும் இருத்தல் முடியாது. எனவே, எட்டிலுங் குறைந்த மறையல்லாத எண்களே, இந்நிரலில் இருத்தல் கூடும்.

மேற்படி கூட்டலிலே, கூட்டும்போது அதே விடைபெறக்கூடிய முறையில், நிரல்களின் பெயர்களை மாற்ற முடியுமா? நிரல்களை மைல், பெர்லாங்கு என மாற்றினால், விடை பொருத்தமாக இருக்குமா ? நிரல்களுக்கு இடக்கூடிய வேறு பெயர்கள் ஏதாவது கூற உங்களால் முடியுமா ? நிரல்களை " எட்டுக்கள் " " ஒன்றுகள் " எனப் பெயரிட்டால், விடைபொருந்துமா ?

$$\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 3 \\ \hline 7 & 6 \\ \hline\hline \end{array}$$

மேற்காட்டிய கூட்டல் பற்றி உங்களால் யாதேனுங் கூறமுடியுமா ? எமது வழமையான தசம எண்குறியீட்டுமுறையிலே அக்கூட்டலைச் செய்தோமானால், அதே தொகையைப் பெறுவோமா ? நிரல்கள், எட்டுக்களாகவும் ஒன்றுகள் ஆகவும் இருப்பின், அதே தொகையைப் பெறுவோமா ? எண்களை, ஒன்றுகள், எட்டுக்கள், எட்டின் இரண்டாம் வலுக்கள் என்பன போன்ற முறையில் எழுதுதல் முடியுமா ? அதாவது இலக்கங்களின் இடப்பெறுமானம் எட்டின் வலுக்களாக அமையும் வண்ணம், ஓர் எண்ணை நாம் எழுதமுடியுமா ? மேற்காட்டிய கூட்டலிலே, இலக்கங்களின் இடப்பெறுமானங்கள், எட்டின் வெவ்வேறு வலுக்களாகும். அதிலே உள்ள முதலாவது எண்ணாகிய 26, 2 எட்டுக்களும் 6 ஒன்றுகளுங் கொண்டதாகும். அதாவது,

$$26 = 2 \times 8^1 + 2 \times 8^\circ$$

எனவே, ஓர் எண்ணிலுள்ள இலக்கங்களின் இடப்பெறுமானங்கள், எட்டுக்களின் வலுக்களாகவும் அமையலாமென்பது தெளிவாகிறது. ஓர் எண்ணிலே இலக்கங்களின் இடப்பெறுமானங்கள் எட்டின் வலுக்களாக அமையின், அந்த எண், எட்டை அடியாகக் கொண்டு எழுதப்பட்டது என்போம். பத்துத் தவிர்ந்த பிற அடிகளுக்கமைய எண்கள் எழுதப்படின், மயக்கத்தைத் தவிர்ப்பதற்காக அடியைக் குறிப்பது வழக்கம். அதிலே, எண்ணை அடுத்துச் சற்றுக்கீழாக அடியை எழுத்திலே குறிப்பதுண்டு. எனவே, முன்னைய கூட்டல், பின்வருமாறு அமைதலே பொருத்தமானதாகும்.

$$
\begin{array}{r}
26_{\text{எட்டு}} \\
35_{\text{எட்டு}} \\
13_{\text{எட்டு}} \\
\hline
76_{\text{எட்டு}}
\end{array}
$$

தசம எண்குறியீட்டு முறையிலே பிரயோகிக்கப்படும் இலக்கங்கள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ஆகியவை மட்டுமேயாம். வித்தியாசமான பத்துக் குறியீடுகள் தான் உள்ளன என்பதை அவதானித்தீர்களா? எட்டை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே தேவையான இலக்கங்கள் யாவை? 0, 1, 2, 3, 4 ஆகியன மட்டுமே இலக்கங்களாக உள்ள முறையில், அடி என்னவாக இருக்கலாம்?

எட்டை அடியாகக் கொண்ட எண் குறியீட்டு முறையிலே, பயன்படுத்தும் இலக்கங்கள் 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 என்பனவாகும். தசம எண்குறியீட்டு முறையிலே, ஒன்பதின் பின் "பத்து" உள்ளது. அதை 10 என எழுதுகிறோம். இது, ஒரு "பத்து" மட்டுமே உள்ளது எனவும். "ஒன்று" கள் எதுவுமில்லை எனவுங் குறிக்கின்றது. அதேபோல், எட்டை அடியாகக்கொண்ட முறையிலே, அதிகூடிய எண்பெறுமானத்தையுடைய இலக்கம், 7 ஆகும். 7 எனும் எண்ணை அடுத்துவரும் முழுவெண், $10_{\text{எட்டு}}$ ஆகும். இதைப் பத்து என்று கூறமுடியாது. இதன் பொருள், எட்டுக்களுள் ஒன்றும், ஒன்றுக்கள் பூச்சியமும் என்பதே. இது "ஒன்று, பூச்சியம் அடி எட்டு" என வாசிக்கப்படும். தசம முறையிலே 99 ஐ அடுத்து 100 உள்ளதுபோல், $77_{\text{எட்டு}}$ (எழு எழு அடி எட்டு என வாசிக்க) ஐ அடுத்து, $100_{\text{எட்டு}}$ உள்ளது. (இதை ஒன்று பூச்சியம் பூச்சியம் அடிஎட்டு என வாசிக்க.) $101_{\text{எட்டு}}$ என்பதை "ஒன்று பூச்சியம் ஒன்று அடி எட்டு" என வாசிக்க.

முன்னைய வகுப்புக்களிலே, எண்களை எழுதும்போது, அடிகளைக் குறிப்பிடவேண்டியதேவை இருந்ததா? ஏன்? வழக்கில் உள்ள முறையிலே, எண்கள் எல்லாம் பத்தின் அடியில் அமைந்தவை ஆகும். எனவே, அடி குறிப்பிடப்படா வேளையில், பத்தின் அடிக்கு அமையவே எண் எழுதப்பட்டுள்ளது எனக் கருதுகிறோம். அதனால் (பத்துத் தவிர்ந்த) பிற அடிகளுக்கு அமைய எண்கள் எழுதப்படும் போது, அடியைக் குறிப்பிடவேண்டியது மிகமிக அவசியமாகும். $76_{\text{எட்டு}}$ என ஓர் எண் எழுதப்படும்போது, அவ்வெண் முற்றாக விவரிக்கப்படுகிறது. $28_{\text{எட்டு}}$, $89_{\text{எட்டு}}$ என்னும் எண்கள் பற்றி

நீங்கள் யாது கூற முடியும்? அந்த எண்களை அம் முறையிலே எழுதுதல் சரியா? அடி எட்டாக உள்ள முறையிலே, அதி கூடிய ஓரிலக்க எண் 7 என நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே $28_{\text{எட்டு}}$, $89_{\text{எட்டு}}$ என்பன போன்ற எண்கள் இருக்க முடியாது எனவும் நீங்கள் உணர்வீர்கள்.

இனி, எட்டை அடியாகக் கொண்ட ஓர் எண்ணை, பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்ணுக மாற்றுவது எப்படி எனவும், பத்தை அடியாகக் கொண்ட ஓர் எண்ணை, எட்டை அடியாகக் கொண்ட எண்ணுக மாற்று வது எப்படி எனவும் ஆராய்வோம். எட்டை அடியாகக் கொண்டு எழுதப்பட்ட எண்ணில், இடப்பெறுமானங்கள், எட்டின் வலுக்கள் என நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே, எட்டை அடியாகக் கொண்டு எழுதப்பட்ட $347_{\text{எட்டு}}$ போன்ற ஓர் எண்ணை, பத்தை அடியாகக்கொண்ட எண்ணுக மாற்றுதற்குப் பின்வரும் முறையைக் கையாளலாம்.

உதாரணம் 1

$$\begin{aligned}347_{\text{எட்டு}} &= 3\times 10^2{}_{\text{எட்டு}} + 4\times 10^1{}_{\text{எட்டு}} + 7\times 10^0{}_{\text{எட்டு}}\\ &= 3\times 8^2{}_{\text{பத்து}} + 4\times 8^1{}_{\text{பத்து}} + 7\times 8^0{}_{\text{பத்து}}\\ &= 3\times 64_{\text{பத்து}} + 4\times 8_{\text{பத்து}} + 7\times 1_{\text{பத்து}}\\ &= 231_{\text{பத்து}}\end{aligned}$$

$10_{\text{எட்டு}} = 8_{\text{பத்து}}$ என்றும், $100_{\text{எட்டு}}$ என்பதற்குச் சமமான $10^2{}_{\text{எட்டு}} = 8^2{}_{\text{பத்து}}$ அல்லது $64_{\text{பத்து}}$ என்றும் விளங்குகின்றதா?

இன்னேர் உதாரணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

உதாரணம் 2

$576_{\text{எட்டு}}$ என்ற எண்ணை, பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்ணுக மாற்றுக :—

$$\begin{aligned}576_{\text{எட்டு}} &= (5\times 10^2 + 7\times 10^1 + 6\times 10^0)_{\text{எட்டு}}\\ &= (5\times 8^2 + 7\times 8^1 + 6\times 8^0)_{\text{பத்து}}\\ &= 382_{\text{பத்து}}\end{aligned}$$

இனி, பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்களை, எட்டை அடியாக கொண்ட எண்களாக மாற்ற முயல்வோம். உதாரணமாக, $79_{\text{பத்து}}$, $247_{\text{பத்து}}$ ஆகிய எண்களை மாற்றுவோம்.

உதாரணம் 3

முறை I:

$$
\begin{aligned}
79_{\text{பத்து}} &= (64+8+7)_{\text{பத்து}} \\
&= (1\times 8^2+1\times 8^1+7\times 8^0)_{\text{பத்து}} \\
&= (1\times 10^2+1\times 10^1+7\times 10^0)_{\text{எட்டு}} \\
&= (100+10+7)_{\text{எட்டு}} \\
&= 117_{\text{எட்டு}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ 79_{\text{பத்து}} = 117_{\text{எட்டு}}$$

இதை இன்னொரு முறையிலுஞ் செய்தல் கூடும்.

முறை II:

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 79 \\ \hline
8 & \ \ 9 - 7 \text{ ஒன்றுகள்} \\ \hline
8 & \ \ 1 - 1 \text{ எட்டுக்கள்} \\ \hline
 & \ \ 0 - 1 \text{ எட்டின் இரண்டாம வலு}
\end{array}
$$

$$\therefore\ 79_{\text{பத்து}} = 117_{\text{எட்டு}}$$

உதாரணம் 4

$247_{\text{பத்து}}$ என்ற எண்ணை, எட்டை அடியாகக் கொண்ட எண்ணாக மாற்றுவோம்.

$$
\begin{aligned}
247_{\text{பத்து}} &= (3\times 64+6\times 8+7)_{\text{பத்து}} \\
&= (3\times 10^2+6\times 10+7)_{\text{எட்டு}} \\
&= (300+60+7)_{\text{எட்டு}} \\
&= 367_{\text{எட்டு}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ 247_{\text{பத்து}} = 367_{\text{எட்டு}}$$

முறை II :

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 247 \\ \hline
8 & 30 - 7 \text{ ஒன்றுகள்} \\ \hline
8 & 3 - 6 \text{ எட்டுக்கள்} \\ \hline
 & 0 - 3 \text{ எட்டின் இரண்டாம் வலுக்கள்.}
\end{array}
$$

$$\therefore \; 247_{\text{பத்து}} = 367_{\text{எட்டு}}$$

ஒவ்வோர் உதாரணத்திற்கும் இரண்டு முறைகள் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றுள் இலகுவாகத் தோன்றும் முறையைப் பிரயோகித்து, அடி மாற்றங்களைச் செய்க.

பயிற்சி 1—2

1. பின்வரும் எண்களை, எட்டை அடியாகக் கொண்ட எண்களாக மாற்றுக.

   (i) $327_{\text{பத்து}}$ (ii) $173_{\text{பத்து}}$ (iii) $4962_{\text{பத்து}}$ (iv) $5432_{\text{பத்து}}$

2. பின்வரும் எண்களை, பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்களாக மாற்றுக.

   (i) $34_{\text{எட்டு}}$ (ii) $126_{\text{எட்டு}}$ (iii) $235_{\text{எட்டு}}$ (iv) $2347_{\text{எட்டு}}$

3. ஐந்தை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே தேவைப்படும் இலக்கங்கள் யாவை ?

4. பன்னிரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே, தேவைப்படும் இலக்கங்கள் எத்தனை ? மேலதிகமான இலக்கங்கள் தேவைப்படின், என்ன குறிகளைப் பிரயோகிக்கலாமெனக் கூறுக.

5. பத்தை அடியாகக் கொண்ட ஈரிலக்க எண்கள் நான்கு எழுதுக. அவற்றை, ஐந்தை அடியாகக் கொண்ட எண்களாக மாற்றுக.

எண்களை வெவ்வேறு அடிகளுக்கு அமைய எழுதலாமெனவும் தசம முறையானது இவற்றுள் ஒன்றே எனவும் இப்பொழுது உங்களுக்கு விளங்கி இருக்கும். எண்ணின் அடி குறையக்குறைய, ஒரு குறியீட்டுமுறைக்குத் தேவையான இலக்கங்களின் எண்ணிக்கையுங் குறையும். மிககுறைந்த இலக்கங்கள் பிரயோகிக்கபபடும் எண்குறியீட்டு முறையை நீங்கள் கூறமுடியுமா ?

இரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே தேவைப் படும் இலக்கங்களாவன, 0, 1 ஆகிய இரண்டுமே. அடி பத்தாக இருந்தபோது இப்பெறுமானங்கள் பத்தின் நிறையெண் வலுக்களாக அமைந்ததை நீங்கள் அவதானித்தீர்கள். எட்டை அடியாகக் கொண்ட முறையிலே, இப்பெறுமானம் எட்டின் நிறையெண் வலுக்களாக அமைந்ததையும் அவதானித்திருப்பீர்கள். அதேபோல, இரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே, இப் பெறுமானங்கள் இரண்டின் நிறையெண் வலுக்களாகும். எனவே, பத்தை அடியாகக் கொண்ட ஒன்று, இரண்டு, மூன்று, நான்கு என்பன முறையே $1_{\text{இரண்டு}}$ $10_{\text{இரண்டு}}$ $11_{\text{இரண்டு}}$ $100_{\text{இரண்டு}}$ என இரண்டை அடியாகக் கொண்ட முறையிலே அமையும். பத்தை அடியாகக் கொண்ட எட்டு, ஒன்பது, பத்து ஆகிய எண்களை இரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்குறியீட்டு முறையிலே எப்படி எழுதுவீர் கள் ? இம்முறையிலே, இரண்டு குறிகள் மட்டுமே பிரயோகிக்கப் படுவதாலும், அடி இரண்டாக அமைவதாலும் இது **துவித முறை** எனப்படும். இம்முறையிலே எழுதப்படும் எண்கள் **துவித எண்கள்** என சில சமயங்களிற் கூறப்படும்.

இனி, இரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்கள் சிலவற்றைப் பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்களாகவும், மறுதலையாகவுஞ் சில மாற்றங்களைச் செய்வோம்.

பின்வரும் எண்களை நோக்குக :—

$$1010101_{\text{இரண்டு}} ; 111000101_{\text{இரண்டு}} ; 25_{\text{பத்து}} ; 87_{\text{பத்து}}.$$

உதாரணம் 5

முறை I :

$$\begin{aligned} 1010101_{\text{இரண்டு}} &= (1\times 2^6+0\times 2^5+1\times 2^4+0\times 2^3+1\times 2^2+ \\ &\quad 0\times 2^1+1\times 2^0)_{\text{பத்து}} \\ &= (64+0+16+0+4+0+1)_{\text{பத்து}} \\ &= 85_{\text{பத்து}} \end{aligned}$$

முறை II :

$$
\begin{array}{r}
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1 \\
\times 2 \\
\hline
2 \\
0 \\
\hline
2 \\
\times 2 \\
\hline
4 \\
1 \\
\hline
5 \\
\times 2 \\
\hline
10 \\
0 \\
\hline
10 \\
\times 2 \\
\hline
20 \\
1 \\
\hline
21 \\
\times 2 \\
\hline
42 \\
0 \\
\hline
42 \\
\times 2 \\
\hline
84 \\
1 \\
\hline
85
\end{array}
$$

$$\therefore\ 1010101_{\text{இரண்டு}} = 85_{\text{பத்து}}$$

உதாரணம் 6

முறை :

$$
\begin{aligned}
111000101_{\text{இரண்டு}} &= (1\times 2^8 + 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 0\times 2^4 \\
&\qquad + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0)_{\text{பத்து}} \\
&= (256 + 128 + 64 + 0 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1)_{\text{பத்து}} \\
&= 453_{\text{பத்து}}
\end{aligned}
$$

இதை, முன்பு காட்டிய II ஆவது முறையிலே சரிபார்க்க.

உதாரணம் 7

$$
\begin{aligned}
25_{\text{பத்து}} &= (16+8+1)_{\text{பத்து}} \\
&= (1\times 2^4+1\times 2^3+1\times 2^0)_{\text{பத்து}} \\
&= 11001_{\text{இரண்டு}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ 25_{\text{பத்து}} = 11001_{\text{இரண்டு}}$$

முறை II :

$$
\begin{array}{r|l}
2 & 25 \\ \hline
2 & 12 - 1 — 2^0 \\ \hline
2 & \ \ 6 - 0 — 2^1 \\ \hline
2 & \ \ 3 - 0 — 2^2 \\ \hline
2 & \ \ 1 - 1 — 2^3 \\ \hline
 & \ \ 0 - 1 — 2^4
\end{array}
$$

$$\therefore\ 25_{\text{பத்து}} = 11001_{\text{இரண்டு}}$$

உதாரணம் 8

முறை I :

$$
\begin{aligned}
87_{\text{பத்து}} &= (64+16+4+2+1)_{\text{பத்து}} \\
&= (1\times 2^6+1\times 2^4+1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0)_{\text{பத்து}} \\
&= 1010111_{\text{இரண்டு}}
\end{aligned}
$$

இதையும் மேற்காட்டிய II ஆவது முறையிலே செய்து சரிபார்க்க.

மேலே தரப்பட்ட மாற்றல் முறைகளை நீங்கள் கவனமாகப் படித்து விளங்கியிருந்தால், எந்தவொரு துவித எண்ணையும் தசம எண்ணாக மாற்றவும், தசம எண்ணைத் துவித எண்ணாக மாற்றவுந் தெரிநது கொள்வீர்கள். இதிலே $100_{\text{இரண்டு}}$ என்பதை "ஒன்று பூச்சியம் பூச்சியம் அடி இரண்டு" என வாசிகக; நூறு என்றல்ல. அதேபோல, $11001_{\text{இரண்டு}}$ எனபதை "ஒன்று ஒன்று பூச்சியம் பூசசியம் ஒன்று அடி இரண்டு" என வாசிக்க.

இனி, துவித எண்களிற் சில கூட்டல்கள், கழித்தல்கள் செய்வோம். துவித முறையிலே பிரயோகிக்கப்படும் இலக்கங்கள் 0, 1 ஆகியன மட்டுமே என அறிவோம். 0 ஐ 0 உடன் கூட்டினல் விடை 0, ஆகும். 1 ஐ 0 உடன் கூட்டினல் அல்லது 0 ஐ 1 உடன் கூட்டினல் விடை 1 ஆகும். 1 ஐ 1 உடன் கூட்டினல், விடை $10_{\text{இரண்டு}}$ ஆகும். இவற்றைப் பின்வருங் கூட்டல் அட்டவணை (அட்டவணை 1—1) இல் உள்ளது போலக் காட்டலாம்.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

அட்டவணை 1—1

அட்டவணை 1—1 இலே, ஓரிலக்கத் துவித எண்கள், இடதுபுறத் தேயுள்ள நிரலிலும், முதலாவது வரிசையிலுந் தரப்பட்டுள்ளன. ஓரிலக்க எண்கள் இரண்டைக் கூட்டும்போது, கூட்டுத்தொகை, முதலாம் வரி, இடதுபுற நிரல் ஆகியனதவிர்ந்த மற்றைய அடைப்புக் களிலே தரப்பட்டுள்ளன. அதாவது, இடதுபுற நிரலில் உள்ள ஓர் எண்ணினதும், முதலாவது வரிசையில் உள்ள ஓர் எண்ணினதுங் கூட்டுத்தொகை, அந்நிரலும் அவ்வரிசையும் வெட்டுகிற இடத்தில் அமைகிற அடைப்பிலே தரப்பட்டுள்ளது.

இனி, அட்டவணை 1—1 ஐப் பயன்படுத்தி

$1011_{\text{இரண்டு}}$ உடன் $1001_{\text{இரண்டு}}$ ஐக் கூட்டுவோம்.

உதாரணம் 9

$$\begin{array}{r} 1011_{\text{இரண்டு}} \\ 1001_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 10100_{\text{இரண்டு}}. \end{array}$$

சாதாரணமாகக் கூட்டல் செய்யும்பொழுது, ஒன்றுகளின் நிரலுடன் (அதாவது வலது புறத்தில்) ஆரம்பித்தல் போன்றே, இதிலும் ஆரம்பிக்கிறோம். $1_{\text{இரண்டு}}$ உடன் $1_{\text{இரண்டு}}$ ஐக் கூட்டும்போது, $10_{\text{இரண்டு}}$ விடையாகும். (அட்டவணை 1—1 ஐப் பார்க்க). இதில், 0 ஐ ஒன்றுகளின் நிரலிலே எழுதி, 1 ஐ, இடது புறத்தே அடுத்துள்ள இடத்துக்குக் கொண்டுசென்று கூட்டி, கூட்டலைத் தொடர்கிறோம். மேலே காட்டிய கூட்டல் முறையை நன்கு விளங்கிக் கொள்க. எண்களைப் பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்களாக மாற்றிச் சரிபார்க்கலாம். உதாரணமாக,

$$1011_{\text{இரண்டு}} = 11_{\text{பத்து}}$$
$$1001_{\text{இரண்டு}} = 9_{\text{பத்து}}$$
$$10100_{\text{இரண்டு}} = 20_{\text{பத்து}}$$

இதிலே $11_{\text{பத்து}} + 9_{\text{பத்து}} = 20_{\text{பத்து}}$ என அறிவோம். ஆகவே, மேற்காட்டிய கூட்டலுஞ் சரியென அறிவோம்.

இனி, $10101_{\text{இரண்டு}}$, $1101_{\text{இரண்டு}}$, $10010_{\text{இரண்டு}}$ ஆகியவற்றைக் கூட்டுவோம்.

உதாரணம் 10

$$\begin{array}{r} 10101_{\text{இரண்டு}} \\ 1101_{\text{இரண்டு}} \\ 10010_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110100_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

கூட்டல் முறையை அவதானித்த பின்னர், அடியைப் பத்தாக மாற்றி அல்லது பிறிதொன்றாக மாற்றிச் சரிபார்க்க.

கழித்தல்கள் இரண்டை இனி நாம் முயற்சிப்போம்.

(i) $11001_{\text{இரண்டு}}$ இல் இருந்து $10011_{\text{இரண்டு}}$ ஐக் கழிக்க.

இவற்றிலே, கழிக்கும் முறையை அவதானிக்க :—

உதாரணம் 11

$$\begin{array}{r} 11001_{\text{இரண்டு}} \\ 10011_{\text{இரண்டு}} \\ \hline 110_{\text{இரண்டு}} \\ \hline \end{array}$$

கடன் எடுத்துக் கழித்தல் முறையில், அல்லது நிரப்புக் கூட்டல் முறையில் இதை நாம் கழிக்கலாம். உங்களுக்குப் பரிச்சயமான முறையில், இதை விளங்கிக்கொள்க. பத்தை அடியாகக் கொண்ட எண்ணாக அல்லது, பிறிதோர் அடியைக்கொண்ட எண்ணாக மாற்றிக் கழித்தலைச் சரிபார்க்க.

உதாரணம் 12

$$
\begin{array}{r}
1001000_{\text{இரண்டு}} \\
100111_{\text{இரண்டு}} \\
\hline
100001_{\text{இரண்டு}}
\end{array}
$$

முதலாவது கழித்தலிலே, 1 ஐ 1 இல் இருந்து கழித்தால், விடை 0. 1 ஐ 0 இலிருந்து கழிப்பதற்கு அடுத்துயர்ந்த இடத்திலிருந்து 1 ஐக் கடன் பெறல் வேண்டும். இப்படிக் கடன் பெறுதல், தசம முறையை ஒத்ததாகும்.

நிரப்புக் கூட்டல் முறையிலே, எண்கள் துவித எண்கள் என்பதை மனதிற் கொண்டு, வழமையான முறையிற் கழித்தலைச் செய்தல் கூடும்.

இனி, நீங்களாகவே இரண்டை அடியாகக் கொண்ட எண்களை எழுதிக் கூட்டல் முறை, கழித்தல் முறை ஆகியனவற்றைப் பயின்று, சரிபார்க்க. இவ்விதமாக, துவித முறை எனப்படும் இந்த எண்கணிதத்திற் கூட்டல், கழித்தல் அனுபவம் பெற்றுக் கொள்க.

பயிற்சி 1—3

1. கூட்டுக :

(i)
$$
\begin{array}{r}
111_{\text{இரண்டு}} \\
101_{\text{இரண்டு}} \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
$$

(ii)
$$
\begin{array}{r}
1101_{\text{இரண்டு}} \\
1001_{\text{இரண்டு}} \\
100_{\text{இரண்டு}} \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
$$

(iii)
$$
\begin{array}{r}
10101_{\text{இரண்டு}} \\
11001_{\text{இரண்டு}} \\
10010_{\text{இரண்டு}} \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
$$

(iv)
$$
\begin{array}{r}
110011_{\text{இரண்டு}} \\
1100110_{\text{இரண்டு}} \\
101101_{\text{இரண்டு}} \\
\hline
\\
\hline\hline
\end{array}
$$

2. கழிக்க :

(i) $10110_{\text{இரண்டு}}$
$1001_{\text{இரண்டு}}$

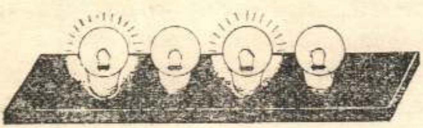
(ii) $111001_{\text{இரண்டு}}$
$10110_{\text{இரண்டு}}$

(iii) $101100_{\text{இரண்டு}}$
$10111_{\text{இரண்டு}}$

(iv) $11110_{\text{இரண்டு}}$
$1001_{\text{இரண்டு}}$

3. மேலே தந்த இரு வினுக்களையும் அவற்றின் விடைகளையுந் தசம எண்களாக மாற்றி, சரிபார்க்க.

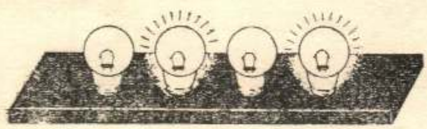
4. துவித எண்களைக் குறிக்க, ஒரு வரிசை மின் குமிழ்களை ஒழுங் கமைத்தல் கூடும். அவற்றுள், ஒளிருங் குமிழ் 1 ஐயும் ஒளிராக்குமிழ் 0 ஐ யுங் குறிக்கின்றன வெனின், 1010 என்பதைப் பின்வருமாறு காட்டலாம்.



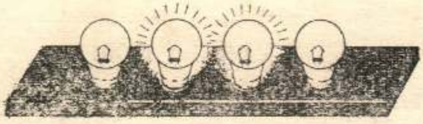
1 0 1 0

பின்வரும் உருவில் (அ), (ஆ) என்பன துவித எண்கள் இரண்டைக் குறிக்கின்றன. அவ்வெண்கள் யாவை ?

(அ)



(ஆ)



(அ), (ஆ) ஆகியவை குறிக்கும் எண்களின் (i) கூட்டுத் தொகையை (ii) வித்தியாசத்தைக் குறிக்கும் மின் குமிழ அமைப்பைப் படம் வரைந்து காட்டுக.

2 கோணங்களையும் நேர்கோட்டுத் துண்டங்களையும் இருசம கூறிடல்

இணைகரங்களின் தொடை, தொடைப் பிரிவுகள், அவற்றின் இயல்புகள் பற்றியெல்லாம் இவ்வாண்டின் முற்பகுதியில் நீங்கள் படித்திருக்கிறீர்கள். இணைகரத் தொடையின் மூலகங்கள் யாவை எனவும், அவற்றின் இயல்புகள் பற்றியும் நினைவுபடுத்த முடிகிறதா? பின்வரும் வினுக்களுக்கு விடையளிப்பதன் மூலம், இதுபற்றி முன்பு படித்ததை எல்லாம் நினைவுக்குக் கொணர்க. (தேவையெனின், கணிதம் 8–1, அதிகாரம் 7 ஐப் பார்க்க.)

பயிற்சி 2—1

1. பின்வருங் கூற்றுக்களைப் பூரணப்படுத்துக:—

(i) இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்களும்............ஆகவுள்ள நாற்பக்கல், இணைகரம் எனப்படும்.

(ii) இணைகரம் ஒன்றிலே .... கோணங்கள் சமமாகவிருக்கும்.

(iii) இணைகரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று ....

(iv) இணைகரமொன்றின் .... அதன் பரப்பளவை இருசமகூறிடும்.

(v) அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமனற்றனவாகவுள்ள சாய்விணைகரம் .... எனப்படும்.

(vi) அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமனாகவுள்ள சாய்விணைகரம் .... எனப்படும்.

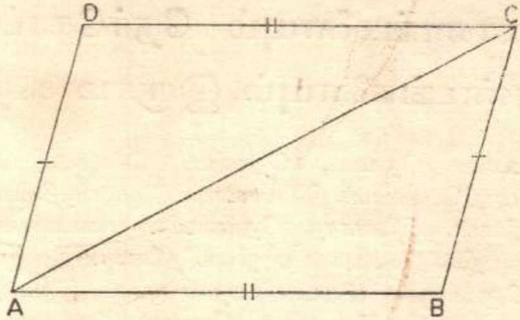
(vii) ....பக்கங்கள் சமனற்றனவாகவுள்ள செங்கோண இணைகரம் செவ்வகம் எனப்படும்.

(viii) அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமனாகவுள்ள.............. சதுரம் எனப்படும்.

(ix) சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள், ஒன்றையொன்று .... இடும்.

(x) சாய்சதுரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள், அதன் உச்சிகளிலுள்ள கோணங்களை............இடும்.

2. ABCD என்ற நாற்பக்கலிலே (உரு 2—1), இருசோடி எதிர்ப் பக்கங்களுஞ் சமனாகும். A, C என்பன நேர்கோட்டுத்துண்டம் ஒன்றால் இணைக்கப்படுகின்றன. பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புவதன் மூலம் ABCD ஓர் இணைகரம் என நிறுவுக.



உரு 2—1

கூற்று	காரணம்
1. AB=	1. தரவு
2. BC=	2. ....
3. AC=	3. ....
4. ∴ △ABC≡△..	4. ....
5. ∴ $B\hat{A}C$=	5. ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த கோணங்கள்
6. $A\hat{C}B$=	6. ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த கோணங்கள்
7. ∴ AB ∥....	7. கூற்று (5) இன்படி
8. BC ∥....	8. கூற்று (6) இன்படி
9. ∴ ABCD ஓர் இணைகரம்	9. ....

அட்டவணை 2—1

3. PQRS ஒரு சாய்சதுரமாகும். P, R நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றால் இணைக்கப்படுகிறது.

(i) PR கோணம் SPQ ஐ எத்தனை கோணங்களாகப் பிரிக்கிறது ?

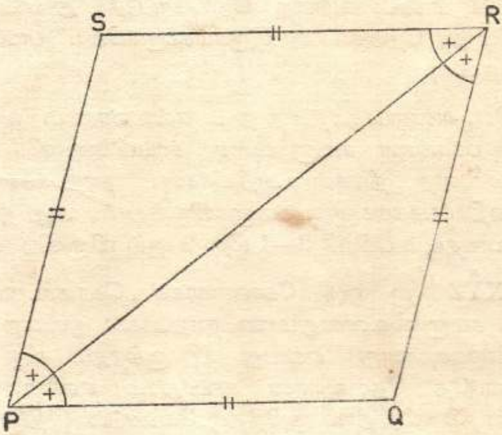
(ii) அக்கோணப் பிரிவுகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பு என்ன ?

கோணமொன்றை இருசம அளவுகளாகப் பிரிக்கும் நேர்கோடு, அக்கோணத்தின் இருசமகூறுக்கி எனப்படுமென்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே, 3 ஆம் வினுவுக்கு நீங்கள் வரைந்த உருவில் PR என்பது $S\hat{P}Q$ இன் இரு சமகூறுக்கியாகும்.

இப்பொழுது $X\hat{Y}Z$ என்று தரப்பட்ட ஒரு கோணத்தின் இருசம கூறுக்கியை எவ்வாறு வரையலாமென உங்களால் விவரிக்க முடியுமா ?

இவ்வினுவுக்குப் பலரும் பலவிதமான விடைகளைக் கூறக்கூடும். சிலர் கோணத்தின் பதிவுச்சுவடு ஒன்றைப் பெற்று, அதை மடிப்பதன் மூலம் இருசமகூறுக்கியைக் காணலாமென்பர். வேறு சிலர், பாகை மானியாற் கோணத்தை அளந்து, அதன் அளவின் அரைப்பங்கைக் குறித்தல் கூடுமென்பர். ஆயினும், வரைகோலையுங் கவராயத்தையும் மட்டும் பயன்படுத்திக் கோணமொன்றை இருசமகூறிடும் முறைகளும் உள்ளன. இப்பொழுது அம்முறைகளுள் ஒன்றினை நாம் ஆராய்வோம். அம்முறை பற்றி வாசித்தற்கு முன்னர், நீங்களாகவே அதனைக் கண்டுகொள்ள முடியுமாவென முயன்று பார்க்க.

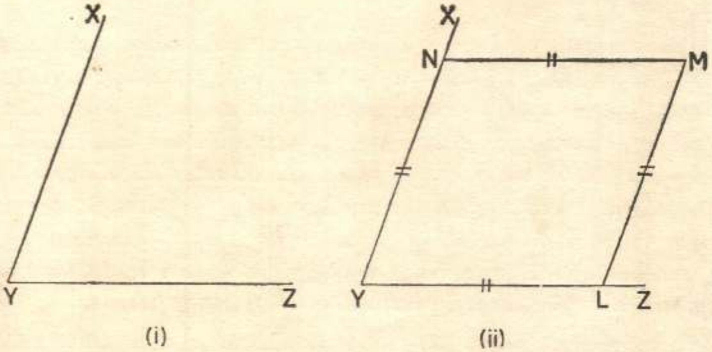
சாய்சதுரமொன்றிலே, அதன் மூலைவிட்டம் உச்சிக் கோணங்களை இரு சமகூறிடுகிறது என்பதை நீங்கள் அறிந்திருக்கிறீர்கள். பயிற்சி 2—1 இல் 3 ஆம் வினுவுக்கு வரைந்த உருவை நீங்கள் அவதானித்தால், பின்வரும் உரு 2—2 போன்று அஃதிருப்பதைக் காண்பீர்கள்.



உரு 2—2

இதிலே, மூலைவிட்டம் PR என்பது $S\hat{P}R$ ஐ இரு கோணங்களாகப் பிரிக்கிறதெனவும், அவ்விரு கோணங்களும் அளவிற் சமமெனவும் நீங்கள் அறிவீர்கள். சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டத்தின் இயல்பைப் பிரயோகித்து, தந்தவொரு கூர்ங்கோணமாகிய $X\hat{Y}Z$ ஐ இருசமகூறிடுதற்கு வழிவகுக்க உங்களால் முடியுமா ?

$X\hat{Y}Z$ ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்டுள்ள சாய்சதுரமொன்று, உரு 2—3 (ii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.



உரு 2—3

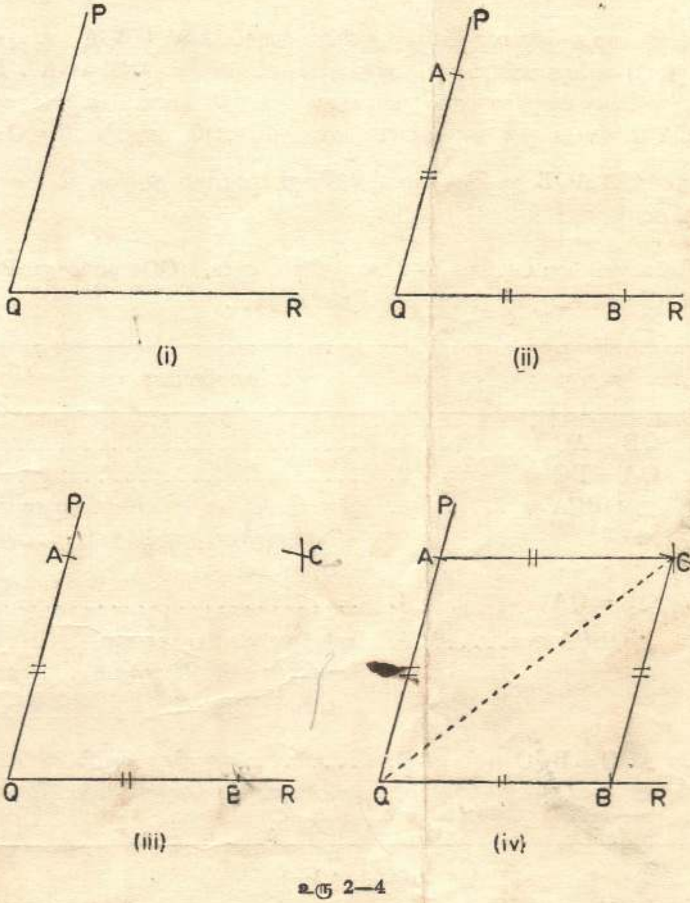
$X\hat{Y}Z$ என்ற அதே கோணந்தான், சாய்சதுரத்தின் கோணங்களுள் ஒன்றான $N\hat{Y}L$ ஆகும் என்பதை நீங்கள் இலகுவிற் கண்டுகொள்ளலாம். Y, M என்பனவற்றை நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றால் இணைக்கும்போது, தேவையான இருசமகூறாக்கியை நாம் பெறுவோமென்பது தெளிவு.

இந்நிலையில், அச்சாய்சதுரத்தை நாம் எவ்வண்ணம் வரையலாம் ? அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமனாகவுள்ள சாய்விணைகரமே சாய்சதுரம் எனப்படுமென்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். நாற்பக்கல் ஒன்றிலே இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமனாகவிருந்தால், அது ஓர் இணைகரமாகும் என்பதையும் பயிற்சி 2—1 இல் 2 ஆம் வினாவிற் கண்டீர்கள்.

எனவே, $X\hat{Y}Z$ ஐ ஒரு கோணமாகக் கொண்டதும், நான்கு பக்கங்களுஞ் சமனாக உள்ளதுமான நாற்பக்கல் ஒன்றை வரைதலே எமது பணியாகவுள்ளது என்பது புலனாகிறது. உரு 2—2 இல் NYLM என்பதே தேவையான சாய்சதுரம் எனின், L, M, N ஆகியவற்றின் நிலைகளை நாம் குறித்தல் வேண்டும். இதிலே YL = YN என நீங்கள் அறிவீர்கள். Y ஐ மையமாகவும், குறித்தவோர்

அளவு ஆரையையுங் கொண்டு YZ, YX ஆகியவற்றை முறையே L, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டுதற்கு இரு விற்கள் முதலிலே வரைதல் வேண்டும். L, N ஆகிய புள்ளிகளை அறிந்தபின், M என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவேண்டும் அல்லவா ? L, N ஆகிய புள்ளிகளை முறையே மையங்களாகக் கொண்டு ஒன்றையொன்று வெட்டும் இரு விற்களை வரைவதன் மூலம், M இன் நிலையத்தைக் குறித்தல் முடியுமா ?

பின்வருஞ் செயல்முறையை உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகங்களிலே செய்துபாருங்கள்.



உரு 2—4

படி 1 : யாதுமொரு கூர்ங்கோணம் வரைக. அதை $P\hat{Q}R$ எனப் பெயரிடுக [உரு 2—4 (i) ஐப் பார்க்க].

படி 2 : Q ஐ மையமாகவும் ஒரேயளவு ஆரையையுங் கொண்டு, PQ, QR ஆகியவற்றை முறையே A, B என்ற புள்ளி களில் வெட்டுமாறு இரு விற்கள் வரைக [உரு 2—4 (ii)].

படி 3 : A, B ஆகிய புள்ளிகளை முறையே மையமாகவும், முன்னைய அளவுள்ள ஆரையையுங்கொண்டு ஒன்றையொன்று C இல் வெட்டும் விற்கள் இரண்டு வரைக. [உரு 2— 4 (iii)]

படி 4 : AC, BC, QC ஆகியவற்றை நேர்கோட்டுத்துண்டங் களால் இணைக்க, [உரு 2—4 (iv)]

இப்பொழுது நீங்கள் வரைந்துள்ள நாற்பக்கல் QBCA ஐ [உரு 2–4 (iv)] அவதானியுங்கள். அதன் பக்கங்களான QB, QA, BC, AC, ஆகியனவற்றின் நீள அளவுகள் பற்றி யாது கூறுவீர்கள்? QBCA என்பது ஒரு சாய்சதுரம் எனவும், QC என்ற நேர்கோட் டுத்துண்டம் $A\hat{Q}B$ ஐ இரு சமகூறிடுகிறது எனவும் நிறுவ உங்களால் முடியுமா?

பின்வரும் அட்டவணை 2–2 ஐ நிரப்பினால், QC என்பது $P\hat{Q}R$ இன் இருசமகூறாக்கி என்பது தெளிவாகும்.

கூற்று	காரணம்
1. $QB = AC$	1. ....
2. $QA = BC$	2. ....
3. ∴ QBCA ஓர்......	3. இரு சோடி எதிர்ப்பக்கங்களும் சம மாகவுள்ள நாற்பக்கல்....எனப் படும்.
4. $QB = QA$	4. ....
5. ∴ QBCA ஒரு......	5. அடுத்துள்ள பக்கங்கள் சமமாக வுள்ள சாய்விணைகரம்....எனப் படும்.
6. $A\hat{Q}C = B\hat{Q}C$	6. .... ஒன்றின் மூலைவிட்டம், அதன் உச்சிக் கோணங்களை இருசம கூறிடும்.

அட்டவணை 2—2

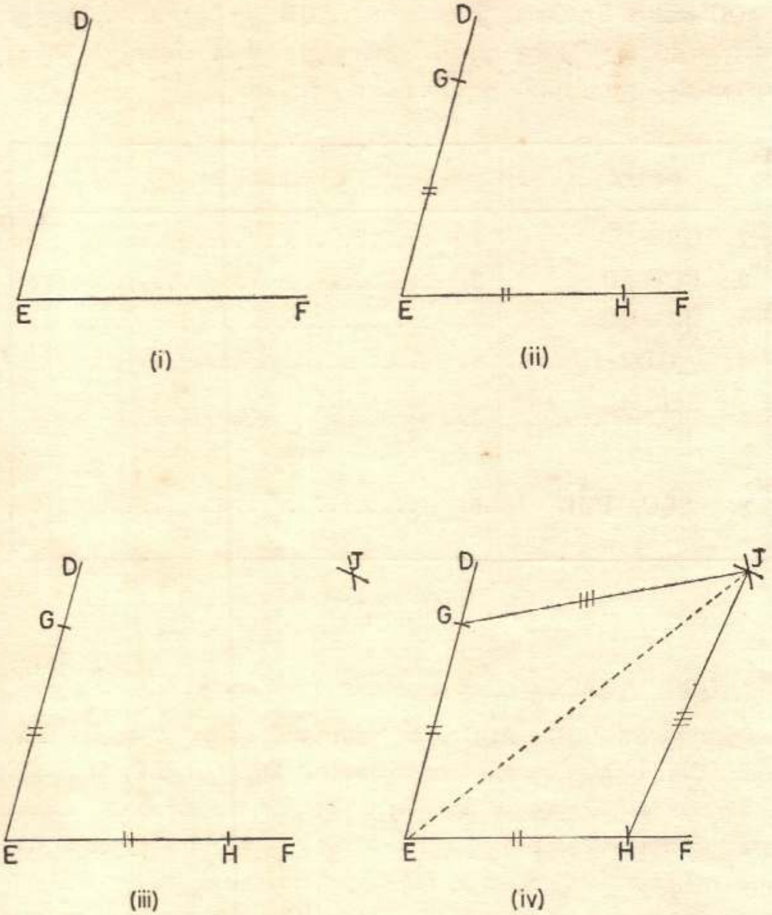
QC என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் $A\hat{Q}B$ ஐ இருசமகூறிடுகிறது என்பதைப் பிறிதொரு முறையிலும் நிறுவலாம். பின்வரும் அட்டவணை 2–3 ஐ நிரப்பி, முடிவை அவதானிக்க.

கூற்று	காரணம்
1. QB = QA	1. ....
2. BC = AC	2. ....
3. QC = QC	3. ....
4. $\triangle QBC \equiv \triangle$....	4. .... ஒருங்கிசைவு விதிப்படி
5. $B\hat{Q}C$ = ...	5. ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த கோணங்கள்.
6. ∴QC, $P\hat{Q}R$ ஐ இருசம கூறிடுகிறது	6. ....

அட்டவணை 2—3

$\triangle QBC$, $\triangle QAC$ ஆகியன ஒருங்கிசை முக்கோணிகளென நிறுவி, அதன் மூலம் $B\hat{Q}C = A\hat{Q}C$ என நாம் அட்டவணை 2–3 இற் காட்டியுள்ளோம். ஒரே ஆரையுள்ள விற்களால் QA, QB, BC, AC, ஆகியவற்றை அமைத்ததால் அவற்றை சமநீள அளவுடையவையாக் கினோம். அட்டவணை 2–3 ஐ ஆராயுங்கால் ஒருங்கிசைவை நிறுவுவதன் மூலம் தேவையான முடிவைப் பெற்றோம் என்பது புலனாகிறது. மேலும் ஒருங்கிசைவை நிறுவுதற்கு, QB = QA, BC = AC ஆக அமைந்தாற் போதுமானது. ஆயின், QBCA இன் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமனற்றவை யாக அமையும் போதும் QBC, QAC என்னும் முக்கோணிகள் ஒருங்கிசைவது தெளிவில்லையா? எனவே, பிறிதோர் கூர்ங்கோணத்தை அவ்வண்ணம் இரு சமகூறிடல் முடியுமாவென ஆராய்வோம். அதற்கான ஒரு முயற்சியின் படிகளை உரு 2–5 தருகிறது.

உரு 2–5 (iv) இலே EJ என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் $D\hat{E}F$ ஐ இருசம கூறிடுகிறதென உங்களால் நிறுவமுடியுமா? $\triangle EHJ$, $\triangle EGJ$ ஆகியன ஒருங்கிசை முக்கோணிகள் என நிறுவி, அதன் மூலம்



உரு 2–5

$H\hat{E}J = G\hat{E}J$ எனக் காட்டுக. இங்கு, EHJG ஒரு சாய்சதுரமல்ல என்பதை அவதானித்தீர்களா? அப்படியானால், அது எத்தகைய உருவமெனக் கூற முடியுமா?

இதுவரை கூர்ங்கோணத்தையே இரு சமகூறிட முயன்றீர்கள், இனி கூர்ங்கோணமல்லாத பிற கோணங்களையும், இதே முறையில் இருசம கூறிட்டுப் பாருங்கள். அப்பொழுது எந்த வகையான கோணத்தையும் இதே முறையில் இருசமகூறிடல் கூடும் என்பதை அறிவீர்கள்.

பயிற்சி 2–2

பின்வரும் அமைப்புக்களை வரைதற்கு வரைகோலுங் கவராயமும் மட்டும் பிரயோகிக்க.

1. யாதுமொரு கூர்ங்கோணம் வரைந்து, அதை இருசமகூறிடுக.
2. யாதுமொரு விரிகோணம் வரைந்து, அதை இருசமகூறிடுக.
3. மூலைமட்டத்தைப் பிரயோகித்து, செங்கோணம் ஒன்று வரைக. அதை இருசமகூறிடுக?
4. (i) AB என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. AB இல் O என்னும் யாதுமொரு புள்ளி இடுக. $A\hat{O}B$ என்ற கோணத்தின் அளவு யாது?

   (ii) O ஐ மையமாகக்கொண்டு, சம ஆரைகளுடன் AB ஐ X, Y ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டும்படி இரு விற்கள் வரைக. X ஐ மையமாகக் கொண்டு வசதியான ஓர் ஆரையுடன் வில் ஒன்று வரைக. பின் Y ஐ மையமாகக் கொண்டு அதே ஆரையுடன் முனையை வில்லை Z இல் வெட்டும் படி இன்னொரு வில் வரைக. OZ ஐ இணைக்க.

   $A\hat{O}Z$, $B\hat{O}Z$ ஆகியவற்றை அளந்து எழுதுக?
5. சமபக்க முக்கோணி ஒன்று வரைந்து அதன் கோணங்களை இரு சம கூறிடுக.
6. வினா 5 ஐப் பிரயோகித்து 60° அளவுடைய கோணமொன்று வரைக.
7. 30° அளவுடைய கோணமொன்று வரைக.
8. PQ என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. அதிலே L, M என்னும் இரு புள்ளிகள் எடுக்க.

   (i) L ஊடாக PQ உக்குச் செங்குத்தாக நேர்கோடு ஒன்று வரைக.

   (ii) M ஊடாக MP உடன் 30° அமைக்கும் இன்னொரு நேர் கோடு வரைக. அவ்விரு நோகோடுகளும் N இற் சந்தித் தால், N இல் அமையுங் கோணத்தை அளந்து எழுதுக.

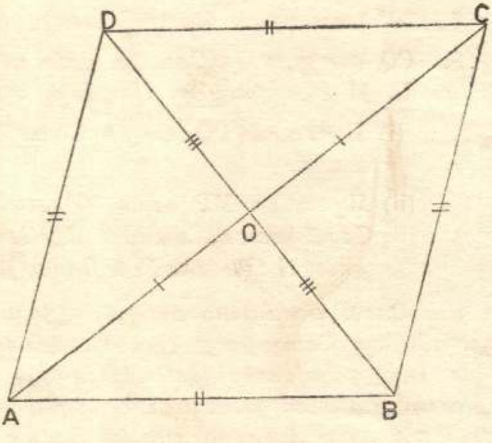
வரைகோல் ஒன்றையும் கவராயத்தையும் கருவிகளாகக் கொண்டு தந்தவொரு கோணத்தை இரு சமகூறிடல் எபபடியென்பதை நீங் கள் படித்துள்ளீர்கள். இக்கேத்திரகணித அமைப்பிலே, கோணம் அளக்கப்படவில்லை என்பதையும் அறிவீர்கள். தந்தவொரு நேர் கோட்டுத் துண்டத்தையும் அளவீடு செய்யாது, இரு சமகூறிடல் முடி யுமா என்பதை இப்பொழுது ஆராய்வோம்.

நேர்கோட்டுத் துண்டமொன்றை இருசமகூறிடல்

யாதுமொரு கேத்திரகணி உருவத்திலே, ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டம் பிறிதொன்றால் இருசமகூறிடப்படுஞ் சந்தர்ப்பம் யாதேனும் உங்களுக்கு நினைவிருக்கிறதா ? கோணத்தை இரு சமகூறிடல் என்றதும், சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டம் நினைவுக்குவரும். அதேபோல, நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை இரு சமகூறிடல் என்றதும், அத்தகைய இருசமகூறிடல் எதும் நினைவுக்கு வருகிறதா ?

முன்குறிப்பிட்ட சாய்சதுரத்தில் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும் என்பதையும் நீங்கள் மறந்திருக்க மாட்டீர்கள். அத்துடன், இணைகரங்களின் மூலைவிட்டங்களும் ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடும் என்பதையும் சிலர் கூறக்கூடும். சாய்சதுரத்தை எடுத்துக்கொண்டால், அதன் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இருசம கூறிடுகையில், அவை செங்குத்தாகவும் அமைகின்றன என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். எனவே, தந்த நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒரு மூலைவிட்டமாக அமையத்தக்கதாக யாதுமொரு சாய்சதுரம் வரைவோமாறல், அச்சாய்சதுரத்தின் மற்றைய மூலைவிட்டம் தந்த நேர் கோட்டுத்துண்டத்தை இரு சமகூறிடுவதுடன், அதற்குச் செங்குத்தாக வும் அமையும் என்பதுந் தெளிவாகும்.

இத்தகைய அமைப்பை நாம் எப்படி வரைதல் கூடுமென்பதை இப்பொழுது ஆராய்வோம். உரு 2—6 இற் காட்டியுள்ள சாய்சதுரம் ABCD ஐப் பாருங்கள். மூலைவிட்டங்கள் AC, BD ஆகியன ஒன்றையொன்று இருசமகூறிடுகின்றன. நாம் இருசமகூறிட வேண்டிய நேர்கோட்டுத் துண்டம் AC எனின், நாம் செய்ய வேண்டியது B, D ஆகியனவற்றின் நிலையங்களைக் குறித்தலாகும். இப்பொழுது, B என்ற புள்ளியை அவதானியுங்கள். A, B, C ஆகிய புள்ளிகளின் நிலையங்களுக்கிடையே எதுந் தொடர்பு தெரிகிறதா? AB, CB ஆகியன சாய்சதுரத்தின் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் ஆகும் எனவே, அவை நீள அளவிற் சமம். A C ஆகியன தரப்பட்டிருக்கின்றன. இந் நிலையில்

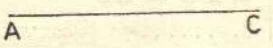


உரு 2–6

B இன் நிலையை உங்களாற் குறிக்க முடியுமா ? அதேபோல, D இன் நிலையைக் குறிக்க முடியுமா ? B, D ஆகியவற்றைக் குறித்துவிட்டால், BD ஐ நேர் கோட்டுத்துண்டத்தால் இணைக்கும்போது, அது AC ஐ இருசம கூறிடும் புள்ளியைப் பெறுவோம்.

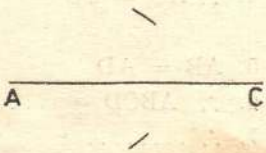
பின்வருஞ் செயல்முறையை முயற்சித்துப் பாருங்கள். அதன் படிமுறைகள் தரப்பட்டுள்ளன.

படி 1 : நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைந்து, அதை AC எனப் பெயரிடுக. [உரு 2—7 (i)]



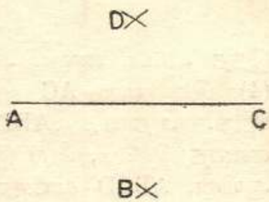
(i)

படி 2 : A ஐ மையமாகவும் ஒரே அளவுள்ள ஆரையுடனும் AC இன் இரு புறமும் இரு விற்கள் வரைக. [உரு 2—7 (ii)]



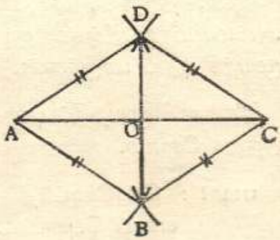
(ii)

படி 3 : C ஐ மையமாகக் கொண்டு முன் வரைந்த அதே ஆரையுடனும் முன்னைய விற்கள் இரண்டையும் வெட்டக் கூடியதாகவும் மேலும் இரு விற்கள் வரைக. [உரு 2—7 (iii)]



(iii)

படி 4 : BD ஐ நேர்கோட்டுத் துண்டத்தால் இணைக்க. AC ஐ BD வெட்டும் புள்ளி O எனின், இருசம கூறிடும் புள்ளி O ஆகும். [உரு 2—7 (iv)]



(iv)

உரு 2-7

3—CP 9457 (70/10)

இப்பொழுது BD என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் AC ஐ இரு சம கூறிடுகிறதென்பதை உய்த்தறி நியாய முறைப்படி உங்களால் நிறுவ முடியுமா ? பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்பி, நிறுவலைப் பெறுக.

கூற்று	காரணம்
1. AB = CD	1. ....
2. BC = AD	2. ....
3. ......ஓர் இணைகரம்	3. இருசோடி எதிர்ப்பக்கங்களுஞ் சமமாகவுள்ள நாற்பக்கல், ஓர் இணைகரமாகும்.
4. ∴ AO = OC	4. இணைகரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று......
5. AB = AD	5. ....
6. ∴ ABCD ஒரு......	6. ....
7. ∴	7. சாய்சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இருசமகூறிடும்.

அட்டவணை 2–4

இந்த அட்டவணையை அவதானிக்கும் போது அதில் உள்ள கூற்று (4) இன் படி AC ஐ BD இருசமகூறிடுகிறதென்பது தெளிவாகிறது. அதாவது, ABCD சாய்சதுரமாகத்தான் இருத்தல் அவசியம் என்பதற்கில்லை , அது இணைகரமாக இருந்தாலே போதுமானதாகும். ஆயின், ABCD சாய்சதுரமாக இருப்பின் BD என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் AC இன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கி என்பது கூற்று (7) இன்படி தெளிவாகிறது.

இனி, தந்த நேர் கோட்டுத்துண்டம் மூலைவிட்டங்களுள் ஒன்றாக அமையுமாறு நீங்கள் ஓர் இணைகரம் வரைதல் முடியுமா என்பதை முயற்சித்துப் பாருங்கள்.

நீங்கள் முயற்சிப்பதற்காக இன்னுமோர் செயல் முறை கீழே தந்துள்ளோம்.

படி 1 : நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைந்து அதைப் PQ எனப் பெயரிடுக.

படி 2 : PQ இன் ஒரு புறத்தே, PQS என்ற இருசமபக்க முக்கோணி ஒன்று வரைக.

படி 3 : **PQ** இன் மறுபுறத்தே, **PQR** என்ற பிறிதோர் இரு சமபக்க முக்கோணி வரைக.

படி 4 : **SR** ஐ நேர்கோட்டுத் துண்டத்தால் இணைக்க. **PQ** ஐ **SR** இருசமகூறிடுகிறதா என ஆராய்க.
PQRS எத்தகைய உருவம் ?

இதுவரை படித்ததிலிருந்து தந்த நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றை இருசமகூறிடுதற்கு இரு வேறு கேத்திரகணித உருவ அமைப்புக்களை நீங்கள் கூறல் கூடும்.

(i) இணைகரம், (ii) பட்டம்

இவைதவிர, வேறுமுறைகளை நீங்கள் கூறமுடியுமா ?

பயிற்சி 2—3

பின்வரும் அமைப்புக்களில், வரைகோலும் கவராயமும் மட்டும் பிரயோகிக்க.

1. (i) AB என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. இணைகரம் ஒன்று வரைவதன் மூலம் AB ஐ O வில் இருசமகூறிடுக.

   (ii) உய்த்தறி நியாய முறைப்படி $AO = OB$ என நிறுவுக.

   (iii) AO, OB ஆகியவற்றை அளந்து எழுதுக.

2. (i) XY என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. பட்டம் ஒன்று வரைவதன் மூலம், XY ஐ M இல் இருசமகூறிடுக.

   (ii) XM, MY ஆகியவற்றை அளக்க.

   (iii) M இல் உள்ள கோணங்களை அளக்க.

   (iv) M இல் உள்ள கோணங்கள் செங்கோணங்களென உய்த்தறி நியாய முறைப்படி நிறுவுக.

3. நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. அமைப்புக் கோடுகள் யாவும் அதன் ஒரு புறத்தே அமையக்கூடியதாக, அக்கோட்டுத் துண்டத்தை இருசம கூறிடுக.

4. (i) XY என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்று வரைக. அதன் செங்குத்து இருசமகூறாக்கியை அமைக்க.

   (ii) இரு சமகூறாக்கியிலே L, M, N எனும் மூன்று புள்ளிகள் குறிக்க.

XL, YL, XM, YM, XN, YN ஆகியவற்றை அளக்க.

(iii) அளவிற் சமனான பக்கச் சோடிகளை எழுதுக.

(iv) செங்குத்து இரு கூறுக்கியிலே Z எனும் யாதுமோர் புள்ளி குறிக்க. உய்த்தறி நியாயப்படி XZ=YZ என நிறுவுக.

5. PQR எனும் முக்கோணி ஒன்று வரைக. PQ, QR என்ற பக்கங்களின் செங்குத்து இருசமகூறுக்கிகளை வரைக. அவை O விற் சந்தித்தால்,

(i) PO, QO, RO ஆகியவற்றை அளக்க.

(ii) RP இன் செங்குத்து இருசமகூறுக்கியை வரைக. அது O வின் ஊடாகச் செல்கிறதா ?

(iii) O ஐ மையமாகவும் OP ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு, வட்டம் ஒன்று வரைக.

6. ஒரே நேர் கோட்டில் அமையாத X, Y, Z என்னும் புள்ளிகள் மூன்று குறிக்க. X, Y, Z ஊடாகச் செல்லும் வட்டம் ஒன்று வரைக.

7. AB ஒரு நேர்கோட்டுத் துண்டமாகும். C என்பது AB இல் உள்ள ஒரு புள்ளி. AB உக்குச் செங்குத்தாக CD என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக.

8. வரைகோல் ஒன்றை மட்டும் கருவியாகக் கொண்டு EF என்னும் நேர்கோட்டுத் துண்டம் ஒன்றை அளக்காது இரு சம கூறிடுக. செய்முறைக்கு நியாயங் காட்டி விளக்குக.

9. $A\hat{B}C$ என்ற கோணம் ஒன்று வரைக. வரைகோலை மட்டுங் கருவியாகப் பிரயோகித்து, அக்கோணத்தை இருசம கூறிடுக. உங்கள் செய்முறைக்கு நியாயங் காட்டி விளக்குக.

10. PQ என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டத்திற்கு வெளியே R என்னும் புள்ளி ஒன்றுள்ளது. PQ உக்குச் செங்குத்தாக RS என்ற நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை வரைக.

3 மடக்கைகள்

பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகள், சில வேளை களிலே அடுக்குக்குறி விதிகளைப் பயன்படுத்திக் கூட்டல், கழித்தல் ஆகிய எளிய செய்கைகளாக மாற்றப்பட்டமை உங்களுக்கு நினை விருத்தல் கூடும். கணிதம் 8–1 இலே, இதுபற்றி நீங்கள் படித் திருக்கிறீர்கள். அடுக்குக்குறி விதிகளையும் அவற்றைப் பிரயோகிக்கும் முறையையும் நினைவுகூருமுகமாகப் பின்வரும் பயிற்சிக்கு விடை யளியுங்கள். தேவை ஏற்படின், கணிதம் 8 – 1 அதிகாரம் 6 ஐ மீட்டுக் கொள்க.

பயிற்சி 3—1

1. பின்வருங் கோவைகளைச் சுருக்கி, அவற்றை வலுக்களாக எழுதுக : (p, q, r, t முதலியவை $\in Z^+$)

(i)	$3^4 \times 3^7$	(ii)	$5^2 \times 5^3 \times 5^5$
(iii)	$p^q \times p^r$	(iv)	$p^{10} \times p^q$
(v)	$3^6 \div 3^2$	(vi)	$7^6 \times 7^2 \div 7^q$
(vii)	$p^r \div p^t$	(viii)	$p^q \times p^r \div p^{-5}$
(ix)	$p^r \times q^r$	(x)	$p^t \times q^t \times r^t$
(xi)	$3^{-2} \times 3^{-5}$	(xii)	$p^{-r} \times p^{-t}$
(xiii)	$p^{1\cdot5} \times p^{2\cdot5}$	(xiv)	$r^{2\cdot5} \div r^{-1\cdot5}$
(xv)	$t^{\frac{1}{2}} \times t^{-2} \times t^{3\frac{1}{2}}$	(xvi)	$\dfrac{r^{100} \times r^{200}}{r^{300}}$

2. பின்வருவனவற்றைச் சுருக்குக :—

(கணிதம் 8 – 1 இலுள்ள அட்டவணைகள் 6 – 5, 6 – 6, 6 – 7 ஆகியவற்றைப் பிரயோகிக்க. அவையின்றேல், அத்தகைய அட்டவணைகளை அமைத்து, அதன் பின் இவ்வினாக்களுக்கு விடையளிக்க முயல்க.)

(i)	$\dfrac{256 \times 32}{1024 \times 4}$	(ii)	$\dfrac{16 \times 32 \times 64}{128 \times 8}$
(iii)	$\dfrac{125 \times 3125}{625}$	(iv)	$\dfrac{32^2 \times 8^2}{256 \times 16}$

(v) $\dfrac{125^2 \times 25}{3125}$ (vi) $\dfrac{125 \times 25}{25^{\frac{3}{4}}}$

(vii) $\dfrac{9 \times 729}{243}$ (viii) $\dfrac{729 \times 6561}{19683}$

(ix) $\dfrac{59049 \times 27^{\frac{1}{3}}}{6561}$ (x) $\dfrac{(125 \times 16)^3}{32^2 \times 15625}$

மேலேயுள்ள பயிற்சிக்கு விடையளிக்கும்போதே, அடுக்குக்குறி விதிகள் பற்றிப் படித்தவற்றுள் அநேகமானவற்றை மீட்டிருப்பீர்கள். அத்துடன், பெருக்கல்கள், வகுத்தல்கள் ஆகியவற்றுட் சிலவற்றை மட்டுமே மேற்கூறிய அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திச் செய்யலாம் என்பதையும் உணர்ந்திருப்பீர்கள். அந்த அட்டவணைகள், 2, 3, 5 ஆகியவற்றின் முழுவெண் வலுக்களை மட்டுங் காட்டுகிறபடியால், அவற்றின் முழுவெண் வலுக்களாகவுள்ள எண்களின் பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவற்றுக்கு மட்டுமே, அந்த அட்டவணைகள் பயன்படுகின்றன. ஆயின், எல்லா எண்களையும் ஒரேயொரு எண்ணின் வெவ்வேறு வலுக்களாக எழுதி, முன்காட்டிய அட்டவணைகள் போன்று அமைத்தால் அந்த அட்டவணையின் உதவியுடன் பெருக்கல்கள் வகுத்தல்கள் எல்லாவற்றையுமே செய்தல் கூடும். வெவ்வேறு எண்களின் வலுக்களாக எழுதப்படும் பல எண்களை நீங்கள் அறிவீர்கள். ஆயின், எல்லா எண்களையும் ஒரே எண்ணின் வெவ்வேறு வலுக்களாக எழுதவிரும்பின், எந்த எண்ணின் வலுக்களாக எழுதுதல் விரும்பத்தக்கது என்பதை நாம் தீர்மானித்தல் வேண்டும். நாம் தசம எண்குறியீட்டு முறையை வழக்கிற் கொண்டுள்ளோம். இம்முறையிலே எண்களை எழுதும்பொழுது பயன்படுத்தும் இலக்கங்களின் இடப்பெறுமானம், பத்தின் வலுக்களாகும். அதனால், எமது தசம எண் குறியீட்டு முறையிலே, **பத்து** ஒரு பிரதான எண்ணாகும். இதனாற்போலும், எல்லா எண்களையும் பத்தின் வலுக்களாக எழுதுதல் வழக்கில் வந்தது. ஓர் எண்ணைப் பத்தின் வலுவாக எழுதும்போது, நாம் எழுதும் அடுக்குக்குறி அவ்வெண்ணினது அடி பத்துக்குரிய **மடக்கை** ஆகும்.

$$1000 = 10^3$$
$$100 = 10^2$$

என்பனவற்றிலே, 3, 2 ஆகிய அடுக்குக்குறிகள் முறையே 1000, 100 ஆகியவற்றின் அடி பத்துக்குரிய மடக்கைகள் ஆகும். 1000 இன் அடி பத்துக்குரிய மடக்கை, 3 ஆகும் என்ற கூற்றை

$$\text{மட}_{10}1000 = 3$$

என எழுதுவோம். அதேபோல, 100 இன் அடி பத்துக்குரிய மடக்கை 2 ஆகும் என்பதை

$மட_{10}\ 100 = 2$

என எழுதுவோம்.

பத்தை அடியாகக் கொண்ட மடக்கைகள், வழமையாகப் **" பொது மடக்கைகள் "** எனப்படுவதுண்டு.

வேறு அடிகளைக் கொண்டும் மடக்கைகள் எழுத முடியுமா ? இதை இப்பொழுது ஆராய்வோம். பத்துத் தவிர்ந்த பிற எண்களின் வலுக்களாகவும் நாம் எண்களை எழுதுதல் முடியும் என நீங்கள் அறிவீர்கள். உதாரணமாக,

$$125 = 5^3$$
$$32 = 2^5$$
$$81 = 3^4$$

போன்றனவற்றைக் குறிப்பிடலாம். இவற்றையும் நாம் மடக்கைக் குறியீட்டு முறையிலே பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$மட_5\ 125 = 3$$
$$மட_2\ 32 = 5$$
$$மட_3\ 81 = 4$$

இவை முறையே பின்வருவனவற்றைக் கருதும்.

" 125 இன் அடி 5 இற்குரிய மடக்கை 3 ஆகும் "
" 32 இன் அடி 2 இற்குரிய மடக்கை 5 ஆகும் "
" 81 இன் அடி 3 இற்குரிய மடக்கை 4 ஆகும் "

$மட_{10}\ 1000 = 3$ என்ற சமன்பாடு ''மட 1000 அடி 10 இற்கு சமன் 3'' என வாசிக்கப்படும்.

எனவே, இவ்வுதாரணங்களிலிருந்து, வெவ்வேறு அடிகளைக் கொண்டு மடக்கைகளை எழுதலாம் என்பது தெளிவாகிறது. பொது மடக்கைகளில், அடி பத்தெனக் கொள்ளப்படுவதால், சில வேளைகளில் அவற்றைக் குறிப்பிடுவதில்லை. ஆயின், வேறு அடிகளைக் கொண்டு மடக்கைகள் எழுதப்பெறின், அடிகளையுங் குறிப்பிட்டாக வேண்டும்.

முதலாம் அதிகாரத்திலே குறிப்பிட்டுள்ள பல்வேறு எண் தொகுதிகளுடன் இதனை ஒப்பிடுக. அங்கு, பத்தை அடியாகக் கொண்டு எண்களை எழுதியபொழுது, அடியை நாம் குறிப்பிடவில்லை. ஆனால், வேறு எண்களை அடியாகக் கொண்டு(துவிதமுறை, அடி எட்டு ஆகியவற்றில்) எண்களை எழுதியபொழுது அவற்றுக்குரிய அடிகளைக் குறித்துக் காட்டினோம்.

இனி, $\{ x : 1 \leq x < 10,\ x \in R \}$ என்ற தொடையிலே, எத்தனை எண்கள் உள்ளன என உங்களாற் கூற முடியுமா ? அதாவது, நீங்கள் அறிந்த எண்களுள், எத்தனை எண்கள் ஒன்றுக்குச் சமனாக

அல்லது பெரிதாகவும், 10 இலுஞ் சிறிதாகவும் உள்ளன எனக் கூறுவீர்களா ? இந்தத் தொடையில் உள்ள முழு எண்களைக் கருத்திற் கொள்வோர், 9 எண்களே உள்ளன எனக் கூறக்கூடும். வேறு சிலர், பெருந்தொகையான எண்கள் உள்ளன என்றுங் கூறக்கூடும். உண்மையில், மேற்கூறிய தொடையிலே, பெருந்தொகை யான எண்கள் உள்ளன. இது பற்றி விபரமாக அதிகாரம் 8 இலே படிப்பீர்கள்.

இந்தத் தொடையில் உள்ள எண்களுட் சிலவற்றை நாம் இப் பொழுது ஆராய்வோம். முதலிலே, இத்தொடையிலுள்ள முழு எண்களையும் இரு தசமதானங்கள் உள்ள தசமபின்னங்களையும் கவனிப்போம். அவையாவன, 1·00, 1·01, 1·02, ... 9·97, 9·98, 9·99 {1·00, 1·01, 1·02, ... 9·97, 9·98, 9·99} என்ற தொடையிலே எத்தனை எண்கள் உள்ளன என உங்களாற் கூற முடியுமா ?

பின்வரும் ஐந்து வினாக்களுக்கும் விடையளிப்பதன் மூலம், முன் கேட்ட வினாவுக்கு விடைகாண முயல்க.

பின்வருந் தொடைகள் ஒவ்வொன்றிலும் எத்தனை எண்கள் உள்ளன ?

(i) {1·00, 1·01, 1·02, ... 1·09}

(ii) {1·10, 1·11, 1·12, ... 1·19}

(iii) {1·00, 1·01, 1·02, ... 1·99}

(iv) {2·00, 2·01, 2·02, ... 2·99}

(v) {1·00, 1·01, 1·02, ... 9·97, 9·98, 9.99}

இந்த வினாக்களுக்குச் சரியான விடைகளைக் கண்டிருந்தால், முன் கூறிய {1·00, 1·01, 1·02, ... 9·97, 9·98, 9·99} என்ற தொடையிலே 900 வெவ்வேறு எண்கள் உள்ளன என நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள்.

கணித விற்பன்னர்கள் இந்த 900 எண்களையும் பத்தின் வலுக்க ளாக அமைத்து, அட்டவணைப்படுத்தித் தந்துள்ளனர். இந்த அட்ட வணை **மடக்கை அட்டவணை** எனப்படும். இத்தகைய அட்டவணை ஒன்று, பக்கங்கள், 182, 183 இலே உள்ளது. இந்த எண்கள் எல்லா வற்றையும் அவற்றுக்கு ஒத்த மடக்கைகளுடன் ஒரே நிரலாகத் தந்தால், அல்லது ஒரே வரிசையாகத் தந்தால், அது மிகவும் நீண்டு, கையாள்வதிற் பல வசதியீனங்களைத் தரும். எனவே, வசதியான ஒரு முறையிலே அவை ஒழுங்குபடுத்தித் தரப்பட்டுள்ளன.

தரப்பட்டுள்ள மடக்கை அட்டவணையைக் கவனமாக ஆராய்ந்து பாருங்கள். அதிலே, இடதுபுற நிரலில் 10 முதல் 99 வரையான எல்லா ஈரிலக்க எண்களும் உள்ளன. மேலே, 0 முதல் 9 வரையான ஓரிலக்க எண்கள் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அட்டவணையின் மிகுதிப் பகுதி, 900 எண்களைக் கொண்டது. அவை ஒவ்வொன்றும் நான்கு இலக்க எண்களாகும்.

1·00, 1·01, 1·02...... 9·98, 9·99 என்ற தொடரியைப் பாருங்கள். இதிலுள்ள ஒவ்வொரு எண்ணும், மூன்று இலக்கங்கள் கொண்ட எண்ணாகும். அவை ஒவ்வொன்றினதும் முதலாவது இலக்கத்தின் வலது புறத்தே, தசமப்புள்ளி உள்ளது. மேலே தந்துள்ள 3 இலக்க எண்கள் எல்லாவற்றையும் தசமப்புள்ளி இல்லாமல் அவ்வட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். முதல் இரு இலக்கங்களையும் இடதுபுற நிரலிலிருந்தும், மூன்றாவது இலக்கத்தை மேல் வரியிலிருந்தும் பெறுவதன் மூலம், மேற்கூறிய மூன்று இலக்க எண்களைப் பெறலாம். அட்டவணையிலே இடதுபுற நிரலும் மேல்வரியுந் தவிர்ந்த ஏனைய பகுதியில் இவ்வெண்கள் பத்தின் வலுக்களாகத் தரப்பட்டுள்ளன. இவ்வலுக்களின் அடுக்குக்குறிகள் அவ்வெண்களின் மடக்கைகளைக் குறிக்கின்றனவென நீங்கள் அறிவீர்கள்.

1,10 ஆகியவற்றைப் பத்தின் வலுக்களாக எழுதுகையில், $1=10^0$ $10=10^1$. இவற்றிலே அடுக்குக்குறிகள் முறையே 0, 1 ஆகும். எனவே, 1 உக்கும் 10 உக்கும் இடைப்பட்ட எண்களின் மடக்கைகள், 0 உக்கும் 1 உக்கும் இடைப்பட்ட எண்களாக அமையும் என அறிய முடிகிறது. அதாவது, அந்த எண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மடக்கைகள், ஒன்றிலுங் குறைந்தவை ஆகும். ஆகவே, மடக்கை அட்டவணையில், மேல்வரியையும் இடது புற நிரலையுந் தவிர்த்த, ஏனைய பகுதியிலே தரப்பட்டுள்ள 900 எண்களுள் ஒவ்வொன்றும், ஒன்றிலுங் குறைந்தவை ஆகும். அவை ஒவ்வொன்றினது இடது புறத்திலும், தசமப் புள்ளி இருத்தல் வேண்டும். ஆனால், அட்டவணையிலே இத்தசமப் புள்ளிகள் குறிக்கப்படவில்லை என்பதை மனதிற் பதித்துக் கொள்க.

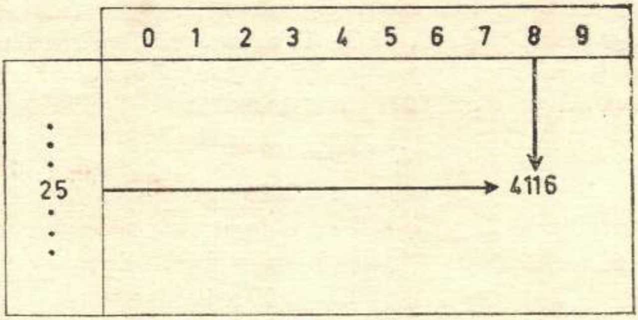
மடக்கை அட்டவணையின் மாதிரி அமைப்புப் பற்றி இதுவரை நீங்கள் விளக்கமாக அறிந்துள்ளீர்கள். இனி, இந்த அட்டவணை எவ்வண்ணம் பயன்படுத்தப்படுகிறதென ஆராய்வோம். பத்தின் வலுவாக எழுதப்பட்டுள்ள ஓர் எண்ணின் அடுக்குக்குறியையே நாம் இந்த அட்டவணையிலிருந்து பெறுகிறோம். மேலும், அந்த எண், பத்திலுங் குறைந்த நேரெண்ணாக இருத்தல் வேண்டுமென்பதையும் நாம் அறிவோம். பக்கங்கள் 182 183 இலே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையின் ஒரு பகுதி, கீழே தரப்பட்டுள்ளது. அதில், மாதிரிக்காக, சில வரிசைகள் மட்டுமே காட்டப்பட்டுள்ளன.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
..										
..										
..										
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
..										
..										
..										
..										
..										
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
..										
..										
..										
..										
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
..										
..										
..										
..										
..										
..										

இங்கு காட்டப்பட்டுள்ள அட்டவணையிலே, இடதுபுற நிரல், மேல் வரிசை, ஆகியவற்றுடன் மேலும் மூன்று வரிசை எண்கள் தரப்பட்டுள்ளன. பின்கூறிய மூன்று வரிசைகளிலே எண்கள் சிலவற்றின் மடக்கைகள் உள என்பதை நீங்கள் இப்பொழுது அறிவீர்கள். இந்த அட்டவணை 30 எண்களையும் அவற்றுக்கு ஒத்த மடக்கைகளையுந் தருகின்றது. அவையாவன : 2·50, 2·51, 2·52,........, 2·59; 4·00, 4·01, 4·02, ...4·09; 6·20, 6·21, 6·22, ...6·29.

மேலே தரப்பட்டுள்ள அட்டவணையுடன், சில எண்களின் மடக்கைகளை அறிய முயல்வோம். உதாரணமாக, 2·58, 4, 25, 62·2 ஆகிய எண்களை எடுப்போம். 2·58 இன் மடக்கையை முதலில் அறிய முயல்வோம்.

2·58 என்ற எண்ணிலே, முதலிரு இலக்கங்களும் முறையே 2, 5 எனக் காண்கிறோம். மூன்றாவது இலக்கம், 8 ஆகும். முதலிரு இலக்கங்களான 2, 5, (25) ஆகியவற்றை இடதுபுற நிரலிலேயும், மூன்றாவது இலக்கமான 8 ஐ, மேல்வரிசையிலும் எடுக்க வேண்டும். 25 உள்ள வரிசையும் 8 உள்ள நிரலும் இடைவெட்டும் இடத்திலே 2·58 இன் மடக்கை உள்ளது. கீழே உள்ள உரு 3–1 மடக்கை பார்க்கும் முறையைத் தெளிவு படுத்துகிறது.



உரு 3–1

முன்கூறிய வரிசையும் நிரலும் இடைவெட்டுமிடத்தில் 4116 உள்ளது. இதன் இடதுபுறத்தே, தசமப்புள்ளி உள்ளது என முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். எனவே இந்த எண் உண்மையில் 0·4116 ஆகும். ஆகவே,

மட $2{\cdot}58 = 0{\cdot}4116$

வேறுமுறையில் இதை எழுதினால்,

$2{\cdot}58 = 10^{0{\cdot}4116}$

இப்பொழுது 258 இன் மடக்கை என்னவென்று உங்களாற் கூற முடியுமா? 1·00 1·01, 1·02........, 9·98. 9·99 என்ற தொடரிலே 258 அடங்கவில்லை என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே, இந்த எண்ணை, இன்னொரு அமைப்புக்கு நாம் மாற்றுதல் வேண்டும். எண்களை எல்லாம் பத்தின் வலுக்களாக நாம் எழுதுகிறோமாகையால், 1 உக்கும் 10 உக்கும் இடைப்பட்ட ஓர் எண்ணினதும் பத்தின் நிறையெண் வலு ஒன்றினதும் பெருக்கமாக இந்த எண்ணை நாம் எழுதுதல் கூடும். 258 ஐ அப்படி எழுதும்போது,

$258 = 2{\cdot}58 \times 10^2$

ஆனால் முன்பு $2{\cdot}58 = 10^{0{\cdot}4116}$ என அறிந்துள்வோம் அல்லவா ?

$$\begin{aligned} \therefore \quad 258 &= 2{\cdot}58 \times 10^2 \\ &= 10^{0{\cdot}4116} \times 10^2 \\ &= 10^{(0{\cdot}4116+2)} \\ &= 10^{2{\cdot}4116} \end{aligned}$$

அல்லது, மட $258 = 2{\cdot}4116$

இனி, மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, 4 ஐப் பத்தின் வலுவாக எழுத முடியுமா எனப் பார்ப்போம். மூன்று இலக்க எண்களுக்கே மடக்கை அட்டவணை அமைக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகையால்,

4 என்ற எண்ணை, 4·00 என எழுதுதல் கூடும். இதன் மடக்கையைக் காண்பது எப்படி? இடது புறத்தே 40 உடன் ஆரம்பிக்கும் வரிசையும், மேலே 0 உள்ள நிரலும் இடைவெட்டுமிடத்திலுள்ள எண்ணைப் பாருங்கள். அந்த எண், 6021 எனக் காண்பீர்கள்.

$$\therefore\ 4{\cdot}00 = 10^{0\cdot6021}$$

$$\text{அதாவது,}\ 4 = 10^{0\cdot6021}$$

$$\text{அல்லது, மட}\ 4 = 0{\cdot}6021$$

இவை போலவே,

$$\begin{aligned} 25 &= 2{\cdot}50 \times 10 \\ &= 10^{0\cdot3979} \times 10^{1} \\ &= 10^{(1+0\cdot3979)} \\ &= 10^{1\cdot3979} \\ \therefore\ 25 &= 10^{1\cdot3979} \\ \text{அல்லது, மட}\ 25 &= 1{\cdot}3979 \\ 62{\cdot}2 &= 6{\cdot}22 \times 10 \\ &= 10^{0\cdot7938} \times 10^{1} \\ &= 10^{1\cdot7938} \\ \text{அதாவது,}\ 62{\cdot}2 &= 10^{1\cdot7938} \\ \text{அல்லது, மட}\ 62{\cdot}2 &= 1{\cdot}7938 \end{aligned}$$

10 இலும் கூடிய ஓர் எண்ணின் மடக்கையைக் காண வேண்டின், முதலில் அதை இரு எண்களின் பெருக்கமாக எழுதுதல் வேண்டுமெனக் கண்டீர்கள். இந்த இரு எண்களுள் ஒன்று, 1 உக்கும் 10 உக்கும் இடைப்பட்டதாகும், மற்றையது 10 இன் யாதுமொரு வலுவாகும். அதே போன்றே 1 இலும் குறைந்த ஓர் எண்ணையும் மாற்றி அமைத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக,

$$25 = 2{\cdot}50 \times 10$$

$$62{\cdot}2 = 6{\cdot}22 \times 10$$

$$258 = 2{\cdot}58 \times 10^{2}$$

$$0{\cdot}3 = 3{\cdot}00 \times 10^{-1}$$

என்பனவற்றை அவதானியுங்கள். எண்களின் இந்த அமைப்பு வழக்கமாக **நியம வடிவம்** எனப்படும்.

பயிற்சி 3—2

1. பின்வருவனவற்றைப் பத்தின் வலுக்களாக எழுதுக :—
   (i) 2·73 (ii) 3·05 (iii) 6·88 (iv) 7·00
2. பின்வருவனவற்றை நியம வடிவத்தில் எழுதுக :—
   (i) 290 (ii) 65·5 (iii) 601 (iv) 0·4

 2·

3. பின்வருவனவற்றைப் பத்தின் வலுக்களாக எழுதுக :—

(i) 30 (ii) 862 (iii) 0·5 (iv) 29·9

மடக்கை அட்டவணையை நன்கு ஆராய்ந்தீர்களானல்,

{1·00, 1·01............9·99} என்ற தொடையிலே உள்ள எண்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் ஒரேயொரு மடக்கை மட்டுமே உள்ளது எனக் காண்பீர்கள். மேலும்,

$$2{\cdot}58 = 10^{0{\cdot}4116}$$
$$25{\cdot}8 = 10^{1{\cdot}4116}$$
$$258 = 10^{2{\cdot}4116}$$

ஆகியன போன்றவற்றையும் நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே, யாது மொரு எண்ணுக்குரிய மடக்கை ஒன்று மட்டுமே உள்ளதெனக் காண்பீர்கள். இதே போன்று, எந்தவொரு மூன்றிலக்க எண்ணையோ அல்லது அதிலுங் குறைந்த இலக்க எண்ணையோ தெரிவு செய தாலும், அட்டவணையின் உதவியுடன் அதன் மடக்கையை அறியலாம். அத்தகைய எண்களுள் ஏதேனும் இரண்டுக்கு ஒரே மடக்கை இடை யாது எனவும் நீங்கள் அறிய முடிகிறது. அதாவது, இத்தகைய (மூன்று அல்லது அதிலுங் குறைந்த இலக்க) எண்களுக்கும் அவற் றின் மடக்கைகளுக்குமிடையே 1—1 ஒத்திருக்கைத் தொடர்பு உண்டு. உண்மையில், சகல எண்களுக்கும் அவற்றின் மடக்கைகளுக்குமிடையே 1—1 ஒத்திருக்கைத் தொடர்பு உண்டு. (இது பற்றி விபரமாகப் பின்னைய வகுப்புக்களிற் படிப்பீர்கள்.) ஆகையால், ஓர் எண்ணின் மடக்கை தரப்பட்டால், அந்த மடக்கைக்கு ஒத்த எண்ணையும் நாம் அறியக்கூடியதாகவிருத்தல் வேண்டும். உதாரணமாக, ஓர் எண்ணின் மடக்கை, 0·4031 எனத் தரப்பட்டுள்ளது எனின், அந்த எண் யாது ? அதைக் காண்பதற்கு, $10^{0{\cdot}4031}$ இன் பெறுமானம் என்ன என அறிதல் வேண்டும். மடக்கை அட்டவணையிலே, தரப்பட்டுள்ள 900 எண்களுள் இந்த மடக்கையைக் காணலாமென அறிவீர்கள். எனவே, முதலில் 0·4031 எங்கே உள்ளது எனக் காண முயல்வோம். (அட்டவணையில் தசமக்குறியின்றி இது 4031 எனவிருக்கும்). இந்த எண்ணை அறிந்ததும், இதைக் கொண்ட வரிசையின் இடதுபுறத்தி லுள்ள இரு இலக்கங்களையும் குறித்துக் கொள்க. இவையே நாம் காண முயலும் எண்ணின் முதலிரு இலக்கங்களுமாகும். (இந்தச் சந்தர்ப்பத்திலே, அவ்விலக்கங்கள் 25) பின், 4031 இன் நிரலில் மேலேயுள்ள இலக்கத்தைப் பார்க்க. (அது 3 எனக் காண்பீர்கள்).

எனவே, $10^{0{\cdot}4031} = 2{\cdot}53$

அதாவது, 0·4031 ஐ மடக்கையாகக் கொண்ட எண் 2·53 ஆகும். மடக்கை தரப்பட்டு, அதற்குரிய எண்ணைக் காணல், **முரண் மடக்கை** அறிதல் எனப்படும்.

இப்பொழுது, 1·3450 இன் முரண் மடக்கையைக் காண முயல்வோம் :

அதாவது, $10^{1\cdot3450}$ உக்குச் சமமான எண்ணைக் காண்போம்.

$$10^{1\cdot3450} = 10^{1+\cdot3450}$$
$$= 10^{1} \times 10^{0\cdot3450}$$

மடக்கை அட்டவணையிலே, 3450 ஐ நோக்குக. அங்குள்ள 900 எண்களுள் இவ்வெண் காணப்படவில்லை. எனவே, அங்குள்ளனவற்றுள் இவ்வெண்ணுக்கு மிகக் கிட்டியதான எண்ணைத் தெரிக. 3450 உக்குக் குறைந்ததும் அதற்கு மிகக் கிட்டியதுமான எண் 3444. 3450 உக்குக் கூடியதும், அதற்கு மிகக் கிட்டியதுமான எண் 3464. இவற்றுள், 3450 உக்கு மிகக் கிட்டியது 3444 ஆகும். எனவே, $10^{0\cdot3450}$ உக்குச் சமமான எண், $10^{0\cdot3444}$ உக்குச் சமனான 2·21 எனக் கொள்ளல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad 10^{1\cdot3450} = 10^{1} \times 10^{0\cdot3450}$$
$$= 10 \times 2\cdot21$$
$$= 22\cdot1$$
$$\therefore \quad 10^{1\cdot3450} = 22\cdot1$$

இதிலே தரப்பட்ட மடக்கை, அட்டவணையிற் காணப்படாததால், அண்ணளவான விடையையே பெற்றோம். அண்ணளவான விடையாயினும், எமது தேவைக்கு அது போதுமானதாகும். செம்மையான விடைகளைப் பெற, மேலுஞ் செம்மையான மடக்கை அட்டவணைகள் உள்ளன. அளவீடுகளைச் செய்யும்போது, பிரயோகிக்குங் கருவிகளின் செம்மைக்கு ஏற்ப விடைகள் அமைவதுபோலவே, பிரயோகிக்கும் மடக்கை அட்டவணையின் செம்மைக்கு ஏற்ப, பெறும் விடைகளும் அமையும்.

பயிற்சி 3–3

1. பின்வருவனவற்றுக்குச் சமமான எண்களை எழுதுக :—

   (i) $10^{0\cdot5647}$ (ii) $10^{2\cdot4771}$ (iii) $10^{1\cdot8980}$

   (iv) $10^{0\cdot4871}$ (v) $10^{0\cdot5}$

2. பின்வருஞ் சமன்பாடுகளை விடுவிக்க :—

   (மாறிகளின் ஆட்சி R)

   (i) $x = 10^{1\cdot6253}$

   (ii) $a = 10^{0\cdot532}$

(iii) $மடx = 0.5935$

(iv) $மடy = 1.3569$

(v) $மட_2 m = 5$

பயிற்சிகள் **3–2, 3–3** ஆகியவற்றுக்கு விடையளித்தபின், மடக்கை அட்டவணை உங்களுக்குப் பரிச்சயப்பட்டிருக்கும். நீங்களாகவே சில எண்களை எழுதி, அவற்றின் மடக்கைகளையும் முரண் மடக்கைகளையும் காண்க. இவ்வண்ணம், மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவதில் அனுபவமும் திறமையும் பெறல் கூடும்.

இந்த மடக்கை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி, பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகியவற்றை எப்படிச் செய்தல் கூடுமெனப் பார்ப்போம். **2.5×2.5** என்பதன் பெருக்கத்தை நோக்குக. அட்டவணையின்படி,

$$2.50 = 10^{0.3979}$$

$$\therefore \quad 2.50 \times 2.50 = 10^{0.3979} \times 10^{0.3979}$$
$$= 10^{0.7958}$$
$$= 6.25$$

$$\therefore \quad 2.5 \times 2.5 = 6.25$$

(குறிப்பு : அட்டவணையிலே 0·7958 காணப்படவில்லை என்பதை அவதானிக்க. அதற்கு மிகக் கிட்டியதான 0·7959 ஐ எடுத்துள்ளோம்.

$$10^{0.7959} = 6.25$$

பெருக்கல், வகுத்தல்களிற் சில உதாரணங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. செய்முறையை விளங்கிக்கொள்க.

உதாரணம் 1

சுருக்குக : 2.43×3.87

அட்டவணையின்படி, $2.43 = 10^{0.3856}$

$$3.87 = 10^{0.5877}$$

$$\therefore \quad 2.43 \times 3.87 = 10^{0.3856} \times 10^{0.5877}$$
$$= 10^{0.9733}$$
$$= 9.40$$

உதாரணம் 2

சுருக்குக : 35.2×1.87

$$35.2 \times 1.87 = 10 \times 3.52 \times 1.87$$
$$= 10 \times 10^{0.5465} \times 10^{0.2718}$$
$$= 10 \times 10^{0.8183}$$
$$= 10 \times 6.58$$
$$= 65.8$$

உதாரணம் 3

சுருக்குக : $65{\cdot}8 \times 5{\cdot}32$

$$\begin{aligned} 65{\cdot}8 \times 5{\cdot}32 &= 10 \times 6{\cdot}58 \times 5{\cdot}32 \\ &= 10 \times 10^{0\cdot8182} \times 10^{0\cdot7259} \\ &= 10 \times 10^{1\cdot5441} \\ &= 10 \times 10^{1} \times 10^{0\cdot5441} \\ &= 100 \times 3{\cdot}50 \\ &= 350 \end{aligned}$$

($65{\cdot}8 \times 5{\cdot}32 = 350{\cdot}560$ என்பதைப் பெருக்கல் மூலம் அறிவீர்கள். ஆனால், மடக்கை அட்டவணை பிரயோகித்து நாம் பெறும் விடை 350 ஆகும். இதிலே வழு, 0·016%. இவ்வழு புறக்கணிக்கக்கூடியதாகும் .

உதாரணம் 4

சுருக்குக : $\dfrac{15{\cdot}7 \times 5{\cdot}48}{4{\cdot}72}$

$$\begin{aligned} \frac{15{\cdot}7 \times 5{\cdot}48}{4{\cdot}72} &= \frac{10 \times 1{\cdot}57 \times 5{\cdot}48}{4{\cdot}72} \\ &= \frac{10 \times 10^{0\cdot1959} \times 10^{0\cdot7388}}{10^{0\cdot6739}} \\ &= 10 \times 10^{(0\cdot1959 + 0\cdot7388 - 0\cdot6739)} \\ &= 10 \times 10^{0\cdot2608} \\ &= 10 \times 1{\cdot}82 \\ &= 18{\cdot}2 \end{aligned}$$

உதாரணம் 5

சுருக்குக : $\dfrac{134 \times 0{\cdot}212}{537}$

$$\begin{aligned} \frac{134 \times 0{\cdot}212}{537} &= \frac{100 \times 1{\cdot}34 \times \frac{2\cdot12}{10}}{100 \times 5{\cdot}37} \\ &= \frac{100}{100 \times 10} \times \frac{1{\cdot}34 \times 2{\cdot}12}{5{\cdot}37} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10^{0\cdot1271} \times 10^{0\cdot3263}}{10^{0\cdot7300}} \\ &= \frac{1}{10} \times 10^{(0\cdot4534 - 0\cdot7300)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{10^1}{10} \times 10^{(0.4534 - 0.7300)}$$

$$= \frac{1}{100} \times 10^{(1.4534 - 0.7300)}$$

$$= \frac{1}{100} \times 10^{0.7234}$$

$$= \frac{1}{100} \times 5{\cdot}29$$

$$= 0{\cdot}0529$$

(குறிப்பு: $10^{(0.4534 - 0.7300)} = 10^{-0.2766}$ எனப் பெறுவோம். ஆயின், மடக்கை அட்டவணையிலே, எல்லா எண்களும் நேர் எண்கள் ஆகும். எனவே, நேர்எண் விடை பெறுதற்கு, நாம் $\frac{10}{10}$ ஆல் $10^{(0.4534 - 0.7300)}$ ஐ பெருக்குகிறோம். இப்படிப் பெருக்குதல், விடையின் பெறுமானத்தை மாற்ற மாட்டாது அல்லவா? மேலும், $10 \times 10^{0.4534} = 10^{1.4534}$. $1{\cdot}4534$ இலிருந்து $0{\cdot}7300$ ஐக் கழித்தால் விடையில் நேர் எண் கிடைக்கும்.

உதாரணம் 6

சுருக்குக: $\dfrac{2{\cdot}75 \times 1{\cdot}06}{8{\cdot}69}$

$$\frac{2{\cdot}75 \times 1{\cdot}06}{8{\cdot}69} = \frac{10^{0.4393} \times 10^{0.0253}}{10^{0.9390}}$$

$$= 10^{(0.4646 - 0.9390)}$$

$$= \frac{10}{10} \times 10^{(0.4646 - 0.9390)}$$

$$= \frac{1}{10} \times 10^{(1.4646 - 0.9390)}$$

$$= \frac{1}{10} \times 10^{0.5256}$$

$$= \frac{1}{10} \times 3{\cdot}35$$

$$= 0{\cdot}335$$

இங்கு தரப்பட்ட உதாரணங்களைப் படித்தும், வகுப்பிற் செய்த பயிற்சிகளுடனும், மேற்காட்டிய சுருக்கங்கள் போன்றவற்றைச் செய்யும் திறமை நீங்கள் பெறுதல் கூடும். மடக்கை அட்டவணையைப் பயன் படுத்திப் பின்வரும் பயிற்சியைச் செய்க :

பயிற்சி 3–4

சுருக்குக :

(1) $3{\cdot}59 \times 5{\cdot}21$

(2) $1{\cdot}72 \times 18{\cdot}3$

(3) $\dfrac{15{\cdot}2}{7{\cdot}93}$

(4) $\dfrac{2{\cdot}51 \times 3{\cdot}17}{5{\cdot}59}$

(5) $\dfrac{2{\cdot}37 \times 0{\cdot}431}{12{\cdot}8}$

(6) $\dfrac{3{\cdot}56 \times 5{\cdot}32}{8{\cdot}36}$

(7) $\dfrac{25{\cdot}3 \times 10{\cdot}2}{75{\cdot}7}$

(8) $\dfrac{10{\cdot}7 \times 0{\cdot}57}{4{\cdot}79}$

(9) $\dfrac{7{\cdot}34 \times 2{\cdot}57}{1{\cdot}05 \times 6{\cdot}1}$

(10) $\dfrac{0{\cdot}357 \times 22{\cdot}9}{1{\cdot}23 \times 4{\cdot}73}$

4 வரைபுகள்

தொடர்புகள் சிலவற்றை வரைபுப்படுத்த ஏற்கனவே கற்றுள்ளீர்கள். இதுவரை வரைபுப்படுத்திய தொடர்புகள், வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாகவும், சில சந்தர்ப்பங்களில் மாறிகளின் ஒத்திருக்கை நெறியாகவுந் தரப்பட்டுள்ளன. இந்த வினவை அவதானியுங்கள் :— பின்வருந் தொடர்பை வரைபுப்படுத்துக.

$$\{(x,\ y) : y=2x,\ x\epsilon \mathrm{R},\ y\epsilon \mathrm{R}\}$$

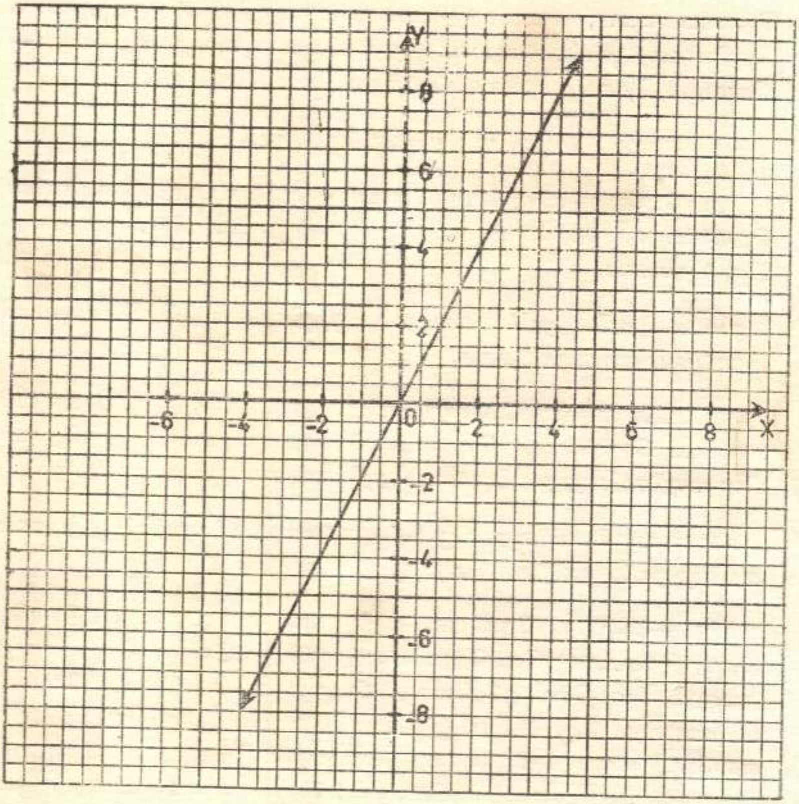
இது போன்ற வினாவிலே தொடர்பு, வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாகக் கூறப்பட்டுள்ளது. இதே வினவைப் பின்வரும் முறையிலுந் தரலாம்.

$y=2x,\ x\epsilon \mathrm{R},\ y\epsilon \mathrm{R}$ என்னும் ஒத்திருக்கை நெறியையுடைய தொடர்பை வரைபுப்படுத்துக.

தரப்பட்டுள்ள வரைபொன்றிற்குரிய தொடர்புக்கு இசைவான வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையைக் காணமுடியுமா ? இத்தொடர்பின் மாறிகளினது ஒத்திருக்கை நெறியைக் காணமுடியுமா ?

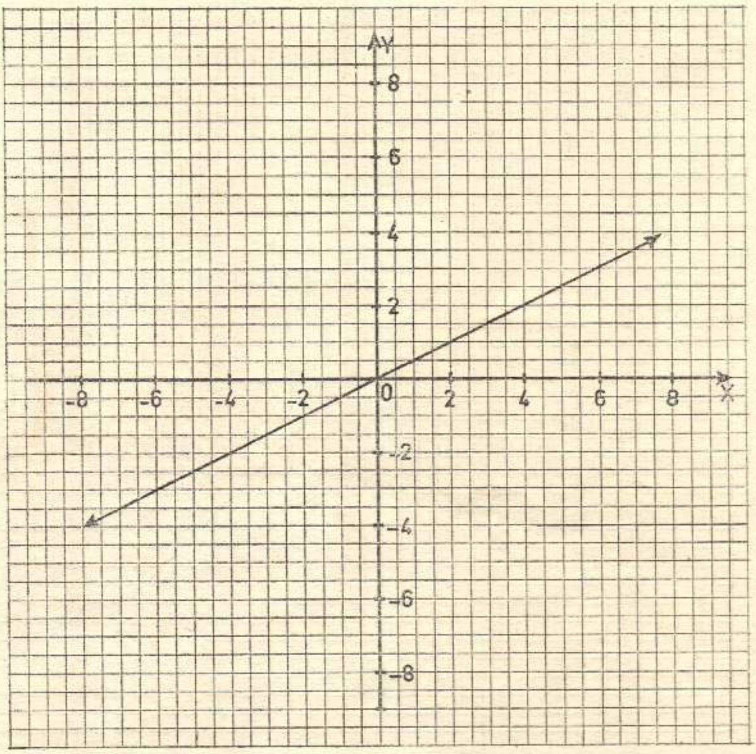
வரைபுகள் சிலவற்றை உரு 4–1 காட்டுகிறது. இவற்றிலிருந்து நாம் அறியமுடியுமானவற்றை அறிதற்கு முயல்வோம்.

உரு 4–1 (i) ஐ நோக்குக. இதிலுள்ள வரைபு, உற்பத்தியாகிய (0, 0) இற்கூடாகச் செல்கிறது. x எடுக்கும் ஒவ்வொரு பெறுமானத்துடனும், y இன் ஒரேயொரு பெறுமானமே சோடி சேர்க்கப்பட்டுள்ளதை, உரு 4–1 (i) இலுள்ள வரைபிலிருந்து காண்பீர்கள். எனவே, உரு 4–1 (i) ஐ வரைபாகக் கொண்ட தொடர்பு, படமாக்கல் ஆகும். $x=1$ ஆயின், $y=2$ ஆகும். $x=2$ ஆயின், y இன் பெறுமானம் யாது ? $y=5$ ஆயின், x இன் பெறுமானம் யாது ? x அதிகரிக்கும்போது, y உம் அதிகரிக்கிறதா ? x குறையும்போது, y அதிகரிக்கிறதா அல்லது குறைகிறதா ? y ஐ x இற் கூற முடியுமா ? அதாவது, x இனதும் y இனதும் ஒத்திருக்கை நெறியைக் கூறுவீர்களா ?



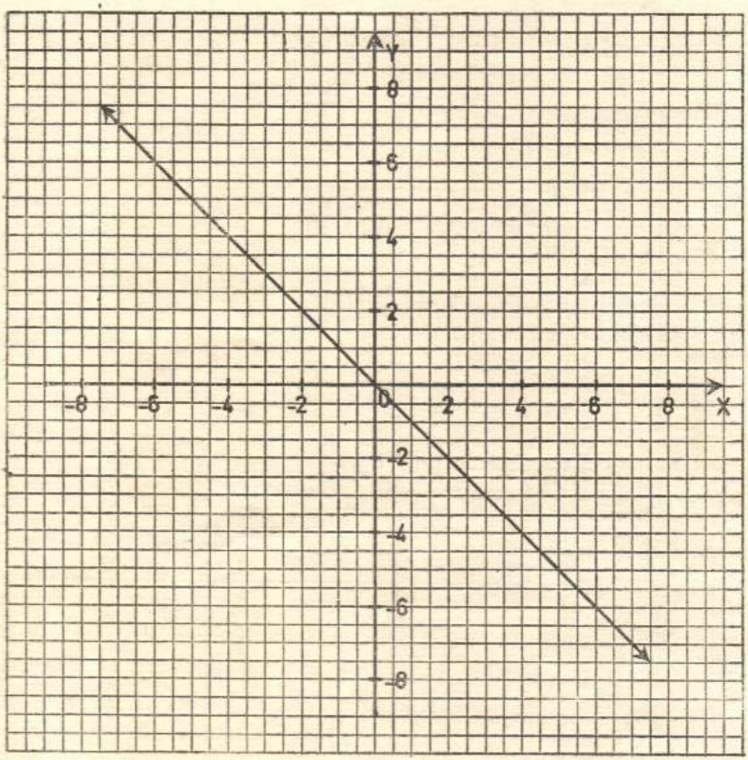
i

உரு 4–1



ii

உரு 4–1



iii

உரு 4-1

வரைபிலே புள்ளிகள் சிலவற்றைத் தெரிக. அட்டவணை 4–1 இற் காட்டியவாறு அப்புள்ளிகளுக்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடிகளை அட்டவணைப்படுத்தல், ஒத்திருக்கை நெறியைக் காண்பதற்குரிய ஒரு முறையாகும். உரு 4–1 (i) இலே தரப்பட்டுள்ள வரைபைப் பயன்படுத்தி அட்டவணை 4–1 ஐப் பூர்த்தியாக்க.

x	-2	$-1{\cdot}5$	-1	0	$1{\cdot}5$	2
y	-4			0		

அட்டவணை 4–1

பூர்த்தியாக்கிய அட்டவணையிலிருந்து ஒத்திருக்கை நெறி $y=2x$ போற் தோன்றுகிறதா ? வரைபிலிருந்து மேலுஞ் சில புள்ளிகள் எடுத்து, அவற்றிற்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடிகள் $y=2x$ என்பதற்கு இசைவானவையாவெனப் பார்க்க. அட்டவணைகள் தயாரித்தோ, வேறு முறையிலோ உரு 4–(i) (ii), (iii) ஆகியவற்றில் உள்ள வரைபுகளுக்குரிய தொடர்புகளின் ஒத்திருக்கை நெறிகளைக் காண்க.

விஞ்ஞானத்திற் போன்றே சிலவேளைகளிற் கணிதத்திலும் இரு கணியங்களுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைப் பரிசோதனை மூலங் காணல் வேண்டும். வட்டம் ஒன்றினது விட்டத்திற்கும் சுற்றளவுக்குமுள்ள தொடர்பைப் பரிசோதனை மூலங் காண்பதற்கு இப்போது முயல்வோம். வட்டத்தின் சுற்றளவு **பரிதி**யெனப் பொதுவாகக் குறிப்பிடப்படும். கட்டிப்பாற்பேணி, மாப்பாற்பேணி, வளையல், கண்ணாடிக் குவளை ஆகியவை போன்ற வட்ட வடிவமான விளிம்புகளையுடைய பொருள்கள் சிலவற்றைச் சேகரிக்க. ஒவ்வொன்றினது விட்டத்தையும் பரிதியையும் அளந்து, அளவீடுகளை அங்குலத்தின் பத்தாங் கூறிலே தருக. கணிதம் 8–1 இல், நாணயம் ஒன்றினது விட்டத்தை அளக்கும் முறை பற்றிக் கற்றுள்ளீர்கள். அதே முறையில், வட்ட வடிவமான விளிம்புகள் கொண்ட வேறு பொருட்களின் விட்டங்களையும் நீங்கள்

அளக்க முடியும். பரிதிகளை அளப்பதற்கு நூற்றுண்டைப் பயன் படுத்துக. அட்டவணை 4–2 இற் காட்டியது போன்று அளவீடுகளை அட்டவணைப்படுத்துக.

நாணயம்	ஒரு சதம்	25 சதம்	50 சதம்	ஒரு ரூபா	2 ரூபா	5 ரூபா
d (அங்.)	0·6	0·7	0·9	1·0	1·2	1·5
c (அங்.)	1·9	2·2	2·8	3·1	3·8	4·7

அட்டவணை 4–2

நாணயங்கள் சிலவற்றின் அளவுகளை அட்டவணை 4–2 காட்டுகிறது. அங்கு, c பரிதியை அங்குலத்திலும், d விட்டத்தை அங்குலத்திலுங் குறிக்கின்றன. அளவீடுகள் அங்குலத்தின் பத்தின் கூறிற்கு அண்ணளவாக எடுக்கப்பட்டுள்ளன. d இற்கும் c இற்குமிடையே ஏதேனுந் தொடர்புண்டா ? நாணயம் ஒவ்வொன்றிற்கும் $\frac{c}{d}$ ஐக் காணுதல் d இற்கும் c இற்குமிடையே தொடர்புண்டா என அறியும் முறைகளுள் ஒன்ருகும். இம்முறை பற்றி நீங்கள் வகுப்பிற் கற்றுள்ளீர்கள்.

d இற்கும் c இற்குமுரிய வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையை அட்டவணை 4–2 கொண்டுள்ளது. (d, c) என்னும் வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையை வரைபுப்படுத்தல் d, c ஆகியவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண இன்னேர் முறையாகும். இம் முறையைப் பற்றி விபரமாக இப்போது கற்போம். இரு கணியங் களுக்கு இடையேயுள்ள தொடர்பை வரைபு முறைப்படி காணுதல், பின்னைய விஞ்ஞான வகுப்புக்களிற் பெரிதும் பயன்படும்.

d, c மாறிகளாகையால், மேற்படி வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையை வரைபுப்படுத்தும்பொழுது, கிடை அச்சை d– அச்சாகவும், நிலைக்குத்து அச்சை c – அச்சாகவுங் கொள்வோம். அட்டவணை 4—2 இலுள்ள அளவீடுகளை நோக்குக. d இன் பெறுமானம் அதிகரிக்கும் போது, c இன் பெறுமானமும் அதிகரிப்பதைக் காண்பீர்கள்.

நாம் c, d ஆகியவற்றுக்குப் பெற்றுள்ள பெறுமானத் தொடையில் d இன் பெறுமானம் 0·6 அங்குலத்திலிருந்து 1·5 அங்குலம் வரை மாறுதலடைகிறது. d இன் பெறுமானங்கள் மறையெண்கள் ஆகலாமா? d இன் பெறுமானம் பூச்சியமாக அமையலாமா?

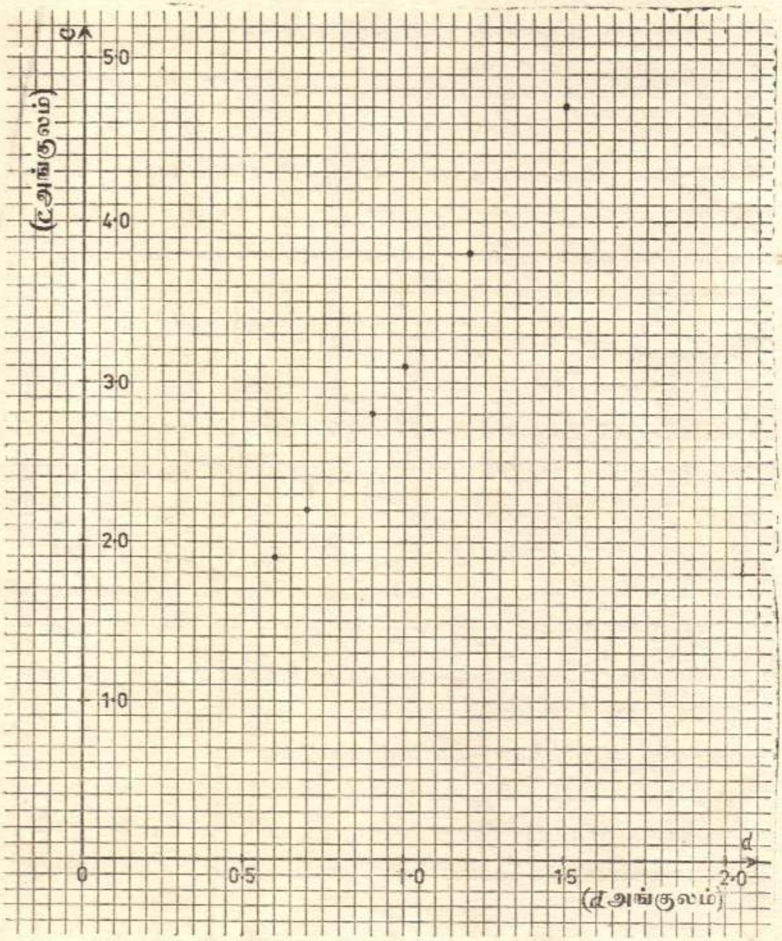
நாம் வரையும் வரைபு முடியுமானவரை பெரிதாகவிருத்தல் நன்று. எனவே, வரைபுகள் வரையும்போது, தாளின் முழுப் பக்கத்தையும் முடியுமானவரை பயன்படுத்துவோம். உரு 4—2 இலே தந்துள்ள வரைபுதாளில் d – அச்சு ஓரமாக ஏறக்குறைய 40 சிறு பிரிவுகள் உள்ளன. இதிற் குறிக்கவேண்டிய மிகப்பெரிய விட்டத்தின் அளவு 1·5. எனவே, 40 சிறு பிரிவுகளை 1·5 அலகுகளாகப் பிரித்தல் வேண்டும். அதாவது, ஒரு அலகை $\frac{40}{1 \cdot 5} \triangleq 27$ பிரிவுகளாற் குறிக்கலாம். இவ்வளவுத் திட்டத்தைத் தேர்ந்தெடுத்தோமானால், $d = 0 \cdot 7$ அலகு என்பது $27 \times 0 \cdot 7 = 18 \cdot 9$ பிரிவுகளாற் குறிக்கப்படும். ஒரு பிரிவின் 0·9 பங்கைத் திருத்தமாகக் குறிக்கமுடியாது என்பது நீங்கள் அறிந்ததே. எனவே, ஓர் அலகைக் குறிப்பதற்கு 25 சிறு பிரிவுகளை எடுத்தால் அது பொருத்தமான அளவுத்திட்டமாகுமா? ஓர் அலகைக் குறிப்பதற்கு 20 சிறு பிரிவுகளை எடுக்கலாமா? 20 சிறு பிரிவுகளை எடுக்கும்போது, 2 சிறு பிரிவுகள் ஓர் அலகின் 0·1 பங்கைக் குறிக்கும். இவ்வளவுத்திட்டத்தில் அலகின் பத்தின் கூறுகள் முழு எண்ணிக்கையுள்ள பிரிவுகளாற் குறிக்கப்படும். c–அச்சு 5 அலகுகளைக் கொண்டுள்ளதாக அமைதல் வேண்டும் என்பது அட்டவணை 4 – 2 இன்படி வெளிப்படை. இதற்குரிய பொருத்தமான அளவுத்திட்டம் ஒன்று கூறமுடியுமா? அட்டவணை 4 – 2 இலுள்ள வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையை உரு 4 – 2 காட்டுகிறது.

d – அச்சு—20 சிறு பிரிவுகள் 1 அலகைக் குறிக்கின்றன.

c—அச்சு—10 சிறு பிரிவுகள் 1 அலகைக் குறிக்கின்றன.

இனி, பொருத்தமான அளவுத்திட்டம் ஒன்றைத் தேர்ந்து, நீங்கள் பெற்றுள்ள வரிசைப்பட்ட சோடிகளுக்குரிய புள்ளித் தொடையை உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத்திற் குறிக்க. உரு 4—2 இற் குறிக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளூடாக நேர்விளிம்பு ஒன்றை வைத்துப் பார்க்க.

அவை ஏறக்குறைய ஒரு நேர்கோட்டில் அமைவதைக் காண்பீர்கள். உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத்திற் குறித்த புள்ளிகளும் நேர்கோடொன்றில் அமைகின்றனவா எனப் பார்க்க.



உரு 4–2

c, d ஆகியன நேர் எண்களாக மட்டுமே அமையலாம். மேலும் அவற்றிற்குரிய கோடு வரையப்படின் உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லுகிறது போலத் தோன்றுகிறபடியால், அப்புள்ளிகளுக்கூடாக நாம் ஒரு கதிர் வரையலாம். இக்கதிரின் முடிவுப்புள்ளி உற்பத்தியாகிய (0,0) ஆகும்.

பயிற்சி 4–1

பின்வருவனவற்றை வரைபுப்படுத்துக.

1. $p=4l$, இங்கு p, l நேர் எண்களாகும்.

2. $y=\frac{2}{3}x$, இங்கு x, $y \in R$

3.

h_1 (சமீ.)	15	20	25	30	35
h_2 (சமீ.)	12	16	20	24	28

அட்டவணை 4–3

h_1, h_2 நேர் எண்களாகும்.

4.

C	-10	–5	0	5	10	15
D	–8	–4	0	4	8	12

அட்டவணை 4–4

C, D $\in$ R

5.

M(மைல்)	0	10	20	30	40	50
K(கிமீ.)	0	16	32	48	64	80

அட்டவணை 4–5

M, K நேர் எண்களாகும்.

6.

m (கிகி.)	0	2	4	6	8	10
l (மிமீ.)	0	0·18	0·36	0·54	0·72	0·90

அட்டவணை 4–6

m, l நேர் எண்களாகும்.

7. பின்வருவனவற்றின் நீளங்களை அங்குலத்திலும் சதமமீற்ற றிலும் அளக்க. அளவீடுகளை அங்குலத்தின் அணித்தான பத்தின் கூறிலும், சதமமீற்றரின் அணித்தான பத்தின் கூறி லும் எடுக்க.

(i) உங்கள் கணிதப் பாடநூல் (ii) உங்கள் பென்சில் (iii) உங்கள் கணிதப் பயிற்சிப் புத்தகம் (iv) தபால் அட்டை (v) தீப்பெட்டி (vi) 10 சத முத்திரை. உங்கள் அளவீடுகளை அட்டவணைப்படுத்தி i – அங்குலம் நிலைக்குத்து அச்சாகவும் c – சதமமீற்றர் கிடை அச்சாகவுங் கொண்டு வரைபுப்படுத்துக.

மேற்படி பயிற்சியின் வினா 1, 2 ஐச் செய்திருந்தீர்களேயானால், அவற்றின் வரைபுகள் உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளாக அல்லது கதிர்களாக அமைவதைக் கண்டிருப்பீர்கள். $y=x$, $y=-2x$ $y=\frac{1}{2}x$. (இங்கு $x\in R$, $y\in R$) போன்ற தொடர்புகளின் வரைபுகள் உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளாக அமைவதைக் கணிதம் 8 – 1 இன் வரைபுகளுக்கான பயிற்சியிலிருந்து அறிந்திருப்பீர்கள். மேலேயுள்ளவை போன்ற சமத்துவக் குறியுள்ள தொடர்புகள் சமன்பாடுகள் எனப்படுவதும் நீங்கள் அறிந்ததே. $y=$(ஏதேனும் ஒரு எண்)$\times x$, $x\in R$, $y\in R$ என்பது போன்ற சமன் பாட்டை வரைபுப்படுத்தினால், அவற்றின் வரைபுகள் உற்பத்தியினூ டாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளாக அமையுமா ? அத்தகைய சமன்பாடு கள் சில வரைந்து பார்க்க. மேற்கூறிய வகைச் சமன்பாடுகள் பொதுவாக $y=kx$ என்ற அமைப்பிற் கூறப்படும். இங்கு k ஓர் எண்ணைக் குறிக்கிறது. இதில் k பொதுவாக **ஒருமை** எனக் குறிப்பிடப் படும். $y=-2x$ எனுஞ் சமன்பாட்டில் x, y என்பன மாறிகளாகும் ; -2 ஒருமையாகும். $y=\frac{2}{3}x$ இல் ஒருமை யாது ? $2x+3y=5$ என்பது போன்ற சமன்பாட்டில் x, y என்பன மாறிகளாகும் ; 2, 3, 5 என்பனவும் ஒருமைகள் என்றே குறிப்பிடப்படும்.

ஆகவே,

$$y=kx,\ x\in R,\ y\in R,\ k \text{ ஓர் ஒருமை.}$$

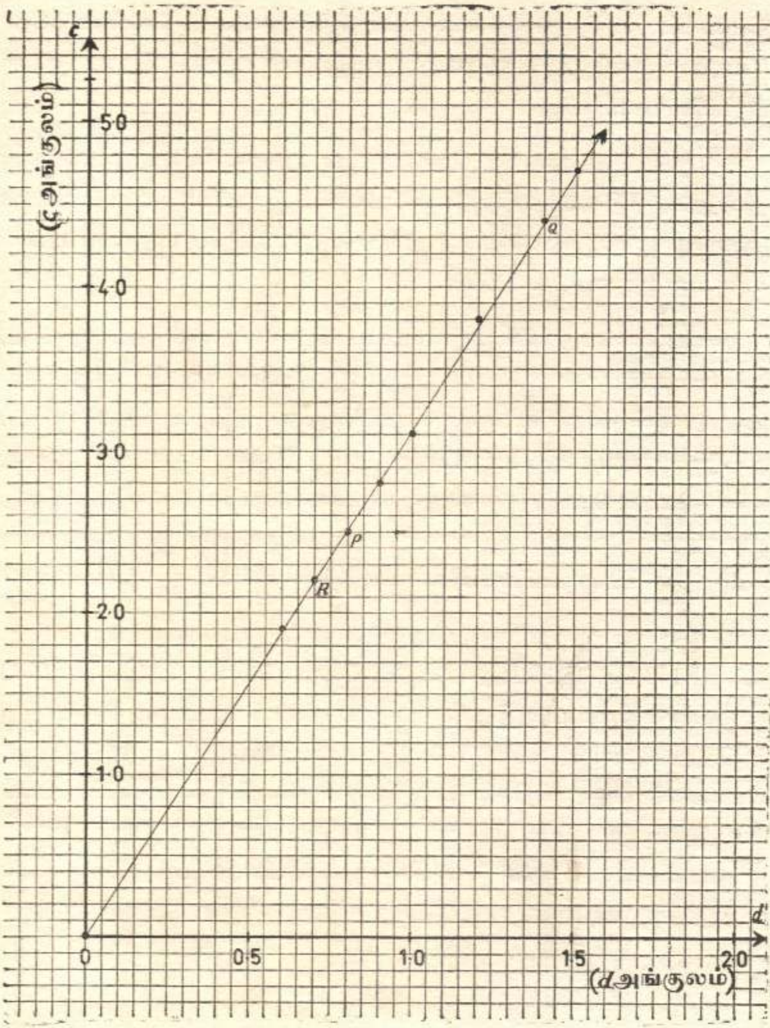
என்பது போன்ற சமன்பாடுகளின் வரைபுகள் உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் நேர்கோடுகளாகுமென அறிந்துள்ளோம். x, y நேர் எண்களாயின், $y=kx$ (k – ஒருமை) போன்ற சமன்பாடுகளின்

வரைபுகள் உற்பத்தியை முடிவுப் புள்ளியாகக் கொண்ட கதிர்களாகு மெனவும் அறிந்துள்ளோம். உற்பத்தியினூடாகச் செல்லும் நேர் கோடுகள் அல்லது கதிர்கள் $y=kx$ போன்ற தொடர்புகளைக் குறிக்கின்றனவா ?

உற்பத்தியினூடாகச் சில நேர்கோடுகள் வரைக. அவை ஒவ்வொன் றினதும் ஒத்திருக்கை நெறியை (உரு 4–1 இலுள்ள வரைபுகளுக்குக் கண்டது போன்று) கண்டு, அவை $y=kx$ என்பது போன்ற அமைப்பை உடையனவா எனப் பரீட்சிக்க.

$y=kx$ என்பது போன்ற சமன்பாட்டின் k என்னும் ஒருமை, $y=kx$ என்பதன் வரைபினது **படித்திறன்** எனவுங் கூறப்படுவ துண்டு. $y=-2x$ என்பதன் வரைபினது படித்திறன் -2 ஆகும். $y=\frac{2}{3}x$ என்பதன் வரைபினது படித்திறன் என்ன ? $y=x$, $y=-\frac{1}{2}x$ என்பன போன்ற சமன்பாடுகளின் வரைபுகளினது படித்திறன்களை நாம் இலகுவாகக் கூறலாம். நேர்கோட்டு வரைபு ஒன்று தரப்பட்டிருப்பின், அதன் படித்திறனை எவ்வாறு காணலாம் ?

c, d ஆகியனவற்றிற்குப் பெற்ற அளவீட்டுத் தொடையை (அட்ட வணை 4–2 ஐ) இப்போது மீண்டும் நோக்குவோம். அட்டவணை 4–2 இலுள்ள வரிசைப்படுத்திய சோடிகளுக்குரிய புள்ளிகளை உரு 4–2 இற் குறித்துள்ளோம். உரு 4–3 இற் காட்டியவாறு அப்புள்ளிகளுக் கூடாகச் செல்லும் கதிரை வரைவோம். இக்கதிர் உற்பத்தியினூடாகச் செல்கிறபடியால் $c=kd$ என நாம் எழுதலாம். இங்கு k ஓர் ஒருமையாகும். $c=kd$ என்பதன் வரைபினது படித்திறனும் k என நீங்கள் அறிந்ததே. இப்போது, இந்த k இன் பெறுமானத்தை அறிதற்கு முயல்வோம்.



உரு 4–3

வரையில் சில புள்ளிகளைத் தேர்ந்து அவற்றிற்குரிய c, d ஆகிய வற்றின் ஆள்கூறுகளைக் காணலாம்.

உதாரணமாக, $P \equiv (0{\cdot}8,\ 2{\cdot}5)$

$$c = kd$$

$$\therefore \quad 2{\cdot}5 = k \times 0{\cdot}8$$

$$\therefore \quad k = \frac{2{\cdot}5}{0{\cdot}8} \simeq 3{\cdot}1$$

$$Q \equiv (1{\cdot}4,\ 4{\cdot}4)$$

$$\therefore \quad k = \frac{(4{\cdot}4)}{(1{\cdot}4)} \simeq 3{\cdot}1$$

R இன் ஆள்கூறுகளை வாசித்து k இன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க. வேறு புள்ளிகளைத் தேர்ந்து k ஐக் கணித்தால், k இன் பெறுமானம் ஏறக்குறைய ஒரேயளவாக இருப்பதை அல்லது சிறிது வேறுபட்டிருப்பதைக் காண்பீர்கள். இச்சிறு வேறுபாடு c, d ஆகியவற்றின் அளவீடுகள் எடுக்கும் போதும், வரைபு வரையும் போதும் ஏற்படக்கூடிய வழுக்களால் ஏற்படும். நாம் **பெற்ற k இன் பெறுமானம் அணித்தானதாகும்.** அளவீடுகள் எடுக்கும் போது ஏற்படும் வழுக்கள் பற்றி ஏற்கனவே கற்றுள்ளீர்கள். வரைபுகள் வரையும் போது ஏற்படும் வழுக்கள் சில பின்வருமாறு :—

(i) பொருத்தமான அளவுத் திட்டம் தேர்ந்திடாமை.

(ii) கிடைத்துள்ள வரைபுத்தாளின் அளவின் வரையறைவு.

(iii) வரைபு திருத்தமாக வரையாமை.

(iv) c, d ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களை வாசிப்பதில் ஏற்படும் இக்கட்டு.

மேற்கூறிய காரணங்களால், இச்சந்தர்ப்பத்தில் k இன் பெறுமானம் 3·1 எனக் கொள்ளலாம். கணிதவல்லுநர் k இற்குப் பெற்றுள்ள பெறுமானம் 3·14 ஆகும். இப்பெறுமானம் கிரேக்க எழுத்தாகிய π (பை) ஆற் தரப்படும். π ஒரு விசேட எண்ணாகும். இதன் பெறுமானம் நூற்றுக் கணக்கான தசமதானங்களுக்குக் கணித அறிஞர்களால் கணிக்கப்பட்டுள்ளது. π இற்கு $3{\cdot}14 \simeq \frac{22}{7}$ என்னும் பெறுமானம் எங்கள் தேவைக்குப் போதுமானது. அதாவது $c = \pi d$; $d = 2r$ என்பது நாம் அறிந்ததே. இங்கு r வட்டத்தின் ஆரையாகும். எனவே, வட்டத்தின் பரிதி

$$c = \pi d = 2\pi r.$$

(d – வட்டத்தின் விட்டம், r – வட்டத்தின் ஆரை)

நீங்கள் வரைந்த வரைபிலிருந்து பெற்ற π இன் பெறுமானம் யாது ?

$y=kx$, k ஓர் ஒருமை ஆக அமையும் வகையில் x, y என்னும் மாறிகள் தொடர்புற்று இருப்பின், y என்பது x இற்கு **நேரடி விகிதசமமானது** என்றும், k **விகிதசம ஒருமை** என்றுங் கூறப்படும். அதாவது, $y=kx, x \in R, y \in R$, என்பதன் வரைபின் படித்திறன் விகிதசம ஒருமை ஆகும்.

$c=\pi d$ (c, d நேர் எண்கள்) ஆக அமையும் வகையில் c, d என்னும் மாறிகள் தொடர்புற்று இருப்பின், c என்பது d இற்கு நேரடி விகிதசமமானது என்றும், π விகிதசம ஒருமை என்றுங் கூறுவோம். c, d நேர் எண்களாகவுள்ள $c=\pi d$ இன் வரைபினது படித்திறன் π ஆகும். d இன் பெறுமானம் இரட்டிப்பின், c இன் பெறுமானமும் இரட்டிக்கும். d இன் பெறுமானம் மும்மடங்காயின், c இன் பெறுமானம் எவ்வண்ணம் மாறுதலடையும் எனக் கூறுவீர்களா ?

உரு 4–3 இலே தரப்பட்டுள்ள வரைபிலிருந்து வேறு என்ன தகவல்களை நாம் அறியலாம் ? 1·4 அங்குல விட்டமுள்ள வட்டத்தின் பரிதி எத்தனை அங்குலம் ? இதனை வரைபிலிருந்து பின்வருமாறு பெறலாம். $d=1{\cdot}4$ என்னும் நேர்கோட்டின் ஓரமாக ஒரு நேர் விளிம்பை வைக்க அல்லது அக்கோட்டை வரைக. அந்நேர்கோடு அல்லது விளிம்பு வரைபைச் சந்திக்கும் புள்ளியிலிருந்து நிலைக்குத்து அச்சுக்குச் செங்குத்தான நேர் கோட்டை (அதாவது கிடையச்சுக்குச் சமாந்தரமான கோட்டை) வரைக. இக்கோடு நிலைக்குத்து அச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளிக்கு ஒத்த பெறுமானத்தை வாசிக்க.

$$\text{அதாவது, } c=4{\cdot}4 \text{ அங்.}$$

5·0 அங். பரிதியாகக் கொண்ட வட்டத்தின் விட்டத்தை உரு 4–3 இலுள்ள வரைபிலிருந்து காண்க.

$c=\pi d$ என்பது நாம் அறிந்ததே. எனவே, விட்டத்தை இதிலிருந்தும் நாம் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

$$c=5{\cdot}0 \text{ அங்.}$$
$$\therefore\ 5=\pi d$$
$$\therefore\ 5=\tfrac{22}{7}\times d$$
$$\therefore\ d=5\times\tfrac{7}{22} \text{ அங்.}$$
$$\therefore\ d=1{\cdot}6 \text{ அங்.}$$
$$\therefore \text{ விட்டம்}=1{\cdot}6 \text{ அங்.}$$

உதாரணம்

துவிச்சக்கரவண்டி ஒன்றின் முன்சில்லின் விட்டம் 22″. 484 அடி தூரஞ் செல்லும் போது அச்சில்லு எத்தனை முறை சுழலும் ?

ஒரு முறை சுழலும்போது சில்லு அதன் பரிதிக்குச் சமமான தூரத்தைச் செல்லும்.

∴ ஒரு முறை சுழலும்போது செல்லுந் தூரம் $= \frac{22}{7} \times 22$ அங்.

$= \frac{22}{7} \times \frac{22}{12}$ அடி

$(\frac{22}{7} \times \frac{22}{12})$ அடி தூரஞ் செல்லச் சுழல்வது $=$ 1 முறை

∴ 484 அடி தூரஞ் செல்லச் சுழல்வது $=$ ...... முறை,

∴ சுழற்சியின் எண்ணிக்கை $=$ 84

பயிற்சி 4–2

1. பயிற்சி 4–1 இல் 1 முதல் 6 வரையுள்ள விஞக்களுக்கு வரைந்த வரைபுகள் ஒவ்வொன்றினதும் படித்திறன்களைக் காண்க.

2. அதே பயிற்சியில் விஞ 4 இற்குரிய வரைபிலிருந்து (i) $D = 20$ ஆகவிருக்கும் பொழுது C இன் பெறுமானத்தைக் காண்க. (ii) $C = 12{\cdot}5$ ஆகவிருக்கும் பொழுது D இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

3. பயிற்சி 4–1 இலே விஞ 5 இற்குரிய வரைபிலிருந்து 12 கிமீ. தூரத்தை மைலிற் காண்க.

4. பின்வரும் அளவுகளை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்களின் பரிதிகளைக் காண்க.
   (i) 3·5 அங். (ii) 14·7 சமீ. (iii) 28 அங்.

5. பின்வரும் அளவுகளைப் பரிதிகளாகக் கொண்ட வட்டங்களின் விட்டங்களைக் காண்க.
   (i) 11·0 சமீ. (ii) 34·1 அங். (iii) 40 அங்.

6. ஒரு வட்டவடிவமான பூம்பாத்தியின் விட்டம் 3 அடி 6 அங். அதன் பரிதியைக் காண்க.

7. 440 யார் நீளமான கம்பி 21 அங். விட்டமுள்ள வட்டவடிவில் பல சுற்றுக்களாக வளைக்கப்பட்டது. அதில் எத்தனை சுற்றுக்கள் உண்டு ?

8. பின்வரும் அளவீடுகள் ஒரு பரிசோதனையிலிருந்து பெறப்பட்டவை. அப்பரிசோதனை நிலைக்குத்தாகத் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள சுருள் வில்லையில் ஏற்படும் நீளவிரிவு (l), அதில் இணைந்துள்ள நிறை (W) இற்கு விகிதசமமாவெனப் பரீட்சிக்கச்

4—CP9457 (70/10)

செய்யப்பட்டதாகும். சுருள்வில்லையின் அடியில் இணைந்துள்ள காட்டியின் மூலம் விரிவுகள் எடுக்கப்பட்டன. l, W நேர் நிறை எண்களெனவும், $W < 8$ எனவுங் கொண்டு, l ஐ நிலைக்குத்து அச்சினும், W ஐ கிடையச்சிலுங் கொண்டு வரைபை வரைக. சுருள் வில்லையின் ஆரம்ப நீளம் 5 சமீ.

W (அவு.)	0	1	2	3	4	5
காட்டியின் அளவீடு	5·0	7·3	9·6	11·8	14·2	16·6
விரிவு (சமீ.)	0				9·2	

அட்டவணை 4–7

(i) வரையின் படித்திறனைக் காண்க.

(ii) இணைக்கப்பட்ட நிறை 7 அவுன்சாயின், விரிவு என்ன ?

(iii) 8 சமீ. விரிவு உண்டாக்கும் நிறை என்ன ?

$2x + y - 3 = 0$ போன்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தொடைகள் பற்றி 7 ஆம் வகுப்பிற் படித்துள்ளீர்கள். $x, y \in R$ ஆயின் தீர்வுத் தொடையின் மூலகங்கள் சிலவற்றைக் கூறுக. தீர்வுத் தொடையின் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் வரிசைப்பட்ட சோடி என உங்களுக்குத் தெரியும். பின்வருவது போன்ற ஓர் அட்டவணை தயாரிக்க.

x	-2	-1	0				
y							

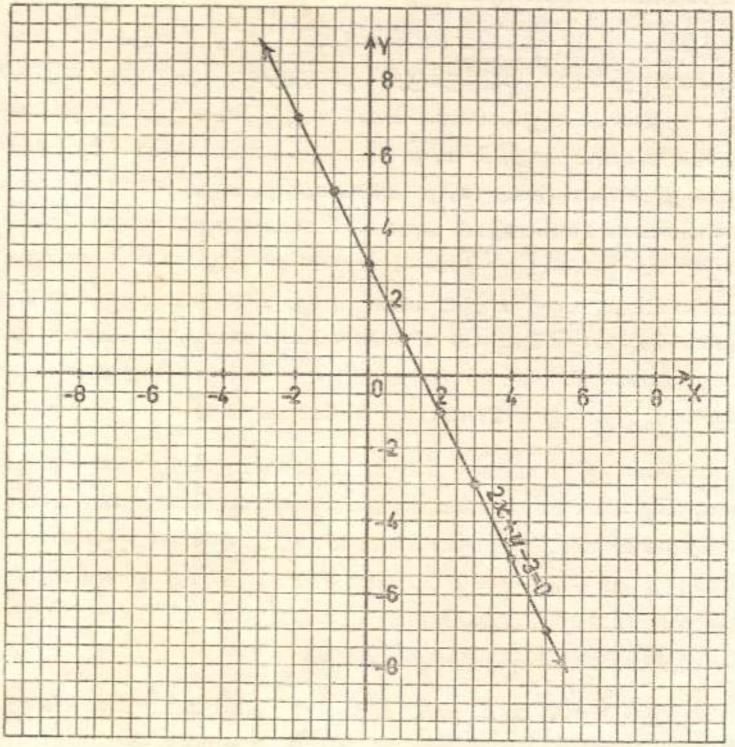
அட்டவணை 4–8

தரப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டுக்கு இசைவான பெறுமானங்கள் மேலே யுள்ள அட்டவணையிலே தரப்பட்டவை மட்டுமல்ல என்பது நீங்கள் அறிந்ததே. தீர்வுத் தொடைக்கு மேலும் பல மூலகங்கள் உள. அதாவது, நீங்கள் அட்டவணையிலே தந்துள்ள பெறுமானத் தொடை தீர்வுத்தொடையின் ஒரு தொடைப்பிரிவேயாகும். தீர்வுத் தொடையின் தொடைப்பிரிவுகளுள் இன்னொன்று கூறுவீர்களா? $x - 3y + 5 = 0$, $x \in R$, $y \in R$ என்பதன் தீர்வுத்தொடையின் தொடைப்பிரிவு ஒன்று கூறுக. குறைந்தது 6 மூலகங்களேனும் அது கொண்டிருத்தல் வேண்டும்.

இதுவரை நாம் நோக்கிய சமன்பாடுகளில் x, y என்னும் மாறிகள் ஒவ்வொன்றினதும் அடுக்குக்குறி ஒன்ருகும். அதாவது, மாறிகள் x, y முதலாம் வலுவானவை எனக் கூறுவோம். இதில் ஒருமைகள் a, b, c எனவும் மாறிகள் x, y எனவுங் கொண்டால் $ax+by+c=0$ போன்ற சமன்பாடுகள் x, y என்பவற்றை மாறிகளாகக் கொண்ட **ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகள்** எனப்படும். ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளில், மாறிகளின் அடுக்குக்குறிகள் 1 ஆகும். $x^2+2y-1=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டில், மாறி x இன் அடுக்குக்குறி 2 ஆகும். ஆனால் மாறி y இன் அடுக்குக்குறி 1 ஆகும். $x^2+2y-1=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை x, y ஆகிய மாறிகளைக் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாடெனக் கூறலாமா ? $x-y^{\frac{1}{2}}+2=0$ பற்றி என்ன கூறலாம்?

மாறிகள் இரண்டைக் கொண்ட ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தொடை, வரிசைப்பட்ட சோடித்தொடையென ஏற்கெனவே அறிந்துள்ளீர்கள். இப்பொழுது, a, b, c ஆகியன ஒருமைகளாக அமைந்த $ax+by+c=0$ போன்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுத்தொடைகளை வரைபுப்படுத்த முயல்வோம். முதலாவதாக a, b, c ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமற்ற நிலையை ஆராய்வோம்.

$2x+y-3=0,\ x\epsilon R, y\epsilon R$ என்னுஞ் சமன்பாட்டையே மீண்டும் நோக்குக. அட்டவணை 4—8 இல் இச்சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தொடையின் தொடைப் பிரிவு ஒன்றுள்ளது. அட்டவணையிலுள்ள வரிசைப் பட்ட சோடிகளுக்குரிய புள்ளிகளை முதலிற் குறிப்போம். அவை நேர்கோட்டுத் துண்டமொன்றில் அமைகின்றனவாவெனப் பரீட்சிக்க. $x, y \in R$ ஆயின், மேற்படி நேர்கோட்டுத் துண்டத்தை நீட்டலாமா ? தீர்வுத்தொடைக்கு எத்தகைய வரைபைப் பெறுவீர்கள் ? இவ்வரைபு, குறித்துள்ள புள்ளிகள் மட்டும்தானு அல்லது, குறித்துள்ள புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோட்டுத்துண்டமா அல்லது, குறித்துள்ள புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லும் நேர்கோடா ? கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் வரிசைப்பட்ட சோடியொன்றைக் குறிக்கிறது. இவ்வரிசைப்பட்ட சோடி ஒவ்வொன்றும் தீர்வுத்தொடையின் மூலகமாகும். $2x+y-3=0,\ x\in R, y\in R$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினது தீர்வுத்தொடையின் வரைபு, உரு 4—4 இற் காட்டியது போன்று ஒரு நேர்கோடாகும்.



உரு 4–4

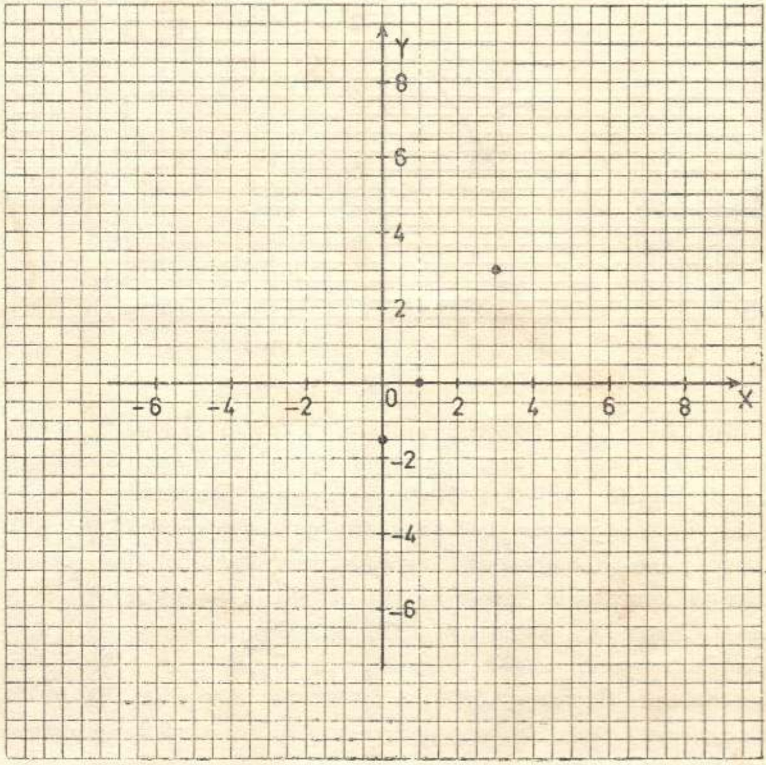
மேலே தரப்பட்ட கோடு உற்பத்தியினூடாகச் செல்கின்றதா ?

$3x - 2y - 3 = 0$, $x\in R$, $y\in R$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினது தீர்வுத் தொடையை வரைபுப்படுத்துக. அப்பொழுது எத்தகைய வரைபைப் பெறுவீர்கள் என அவதானிக்க. அது உற்பத்தியினூடாகச் செல்கின்றதா ? a, b, c ஒருமைகளாகவும், $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ ஆகவும் அமையின், $ax+by+c=0$ $x\in R$, $y\in R$ என்பதன் தீர்வுத் தொடையின் வரைபு ஒரு நேர்கோடாகும்.

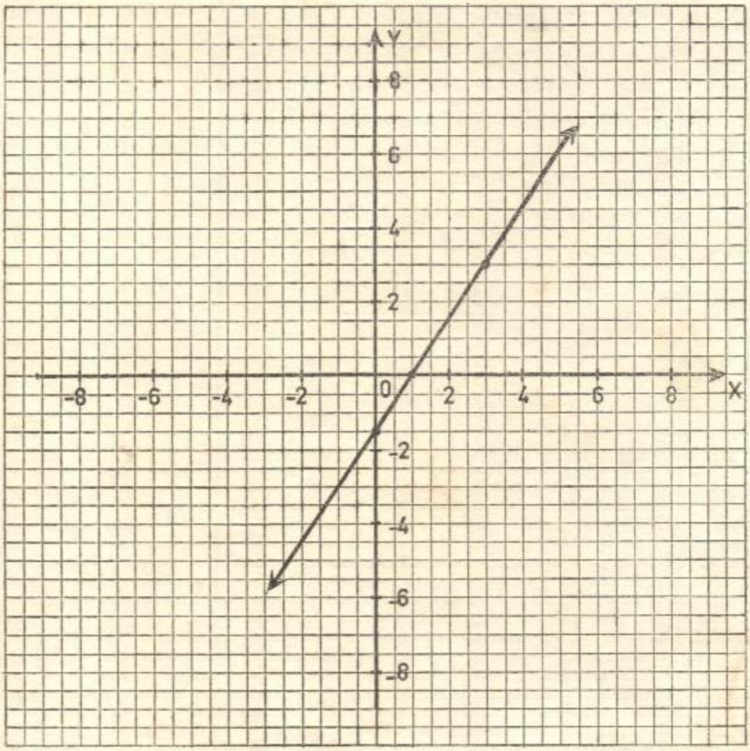
நாம் வரையப்போகும் வரைபு நேர்கோடென எமக்குத் தெரிந்தால், அதை வரைதற்கு நாம் பல புள்ளிகளைக் குறிக்க வேண்டுமா ? (i) 2 புள்ளிகள் (ii) 3 புள்ளிகள் (iii) 4 புள்ளிகள் மட்டும் முறையே உங்கள் அப்பியாசப் புத்தகத்திற் குறித்து நேர்கோடுகள் வரைந்து பார்க்க. $3x - 2y - 3 = 0$ $x\in R$, $y\in R$ என்னுஞ் சமன்பாட்டிற்கு இசைவான வரிசைப்பட்ட சோடிகளுக்குரிய 3 புள்ளித்

தொடையைக் கீழேயுள்ள உரு 4–5 காட்டுகிறது. இப்புள்ளிகளுள் ஏதேனும் இரண்டினூடாக எத்தனை நேர்கோடுகள் வரையலாமென நேர்விளிம்பொன்று வைத்துப் பார்க்க. ஏதேனும் இரு புள்ளிகளினூடாக ஒரு நேர்கோடு வரைந்தீர்களேயானால், அது மூன்றும் புள்ளியினூடாகவுஞ் செல்வதை அவதானிப்பீர்கள்.

x	0	1	3
y	$-1{\cdot}5$	0	3



உரு 4–5



உரு 4-6

உரு 4—6 இல் முதலிரு புள்ளிகளூடாகவும் நேர்கோடு ஒன்று வரையப்பட்டுள்ளது. அது மூன்றும் புள்ளியூடாகவுஞ் செல்கிறது. அதே உருவில் $3x - 2y - 3 = 0$ என்பதற்கு இசைவான வரிசைப் பட்ட சோடிகளுக்குரிய புள்ளிகள் மேலுஞ் சில குறிப்போமாயின், அவை யாவும், முன்னர் வரைந்துள்ள நேர்கோட்டிலே அமை வதைக் காண்போம். இதை உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத்தில் முயன்று பார்க்க. எனவே, நாம் வரையப்போகும் தொடர்பின் வரைபு நேர் கோடென நாம் அறிவோமாயின், அத்தொடர்புக்கு இசைவான வரிசைப்பட்ட சோடிகளுக்குரிய 3 புள்ளிகளை மாத்திரங் குறித்தால் போதுமானதாகும். ஆனால், மூன்றும் புள்ளியைச் சரிபிழை பார்ப்ப தற்காகக் குறித்தல் வழக்கமாகும். மூன்று புள்ளிகளூடாகவும் ஒரு நேர்கோட்டை நாம் வரையலாம்.

இனி $c=0,\ a\neq 0,\ b\neq 0$ ஆகவிருக்கும்பொழுது, $ax+by+c=0$, $x\in R$, $y\in R$ என்பதன் தீர்வுத் தொடையை நாம் நோக்குவோம். $c=0$ ஆகவிருக்கும்பொழுது,

$$ax+by=0 \text{ ஆகும்.}$$

அதாவது,

$$by=-ax$$

$$y=\left(\frac{-a}{b}\right)x$$

இது $y=kx$ என்ற அமைப்புடையது. இத்தகைய சமன்பாடுகளை ஏற்கனவே நோக்கியுள்ளோம். $a=0$ அல்லது, $b=0$ ஆகவும், $c\neq 0$ ஆகவுமிருக்கும்போது, ஒரேயொரு மாறி கொண்ட சமன் பாட்டைப் பெறுவோம். உதாரணமாக, $a=0$ ஆகும்பொழுது $by+c=0$ என்பதைப் பெறுவோம். இதேபோன்று, $a=0$ $b=0$ ஆகவும் அமையுஞ் சந்தர்ப்பங்களைத் தவிர்ந்த $a=0$, $c=0$, $b\neq 0$ போன்ற எத்தகைய சந்தர்ப்பத்தை நோக்கினும், நாம் பெறும் சமன்பாட்டினது தீர்வுத் தொடையின் வரைபு நேர்கோடாகவே அமையும். எனவே, a, b ஆகிய இரண்டும் ஒரேநேரத்தில் பூச்சியம் அற்றனவாகவும் a, b, c ஒருமைகளாகவுங் கொண்ட $ax+by+c=0$, $x\in R$, $y\in R$ எனுஞ் சமன்பாட்டினது தீர்வுத் தொடை, ஒரு நேர்கோடாகுமென நாம் கூறலாம். $a=0$, $b=0$, $c=0$ ஆகவிருக்கும்பொழுது சமன்பாடு உண்டாவென நீங்கள் ஆராய்ந்து பாருங்கள்.

ஒருங்கமை சமன்பாடுகளின் வரைபுமுறைத் தீர்வு

$$x-2y+3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

$$3x+4y-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$$

இங்கு $x\in R$, $y\in R$.

இத்தகைய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதற்கு ஏற்கெனவே கற்றுள்ளீர்கள். இதிலே மாறிகள் இரண்டைக் கொண்டுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடி ஒன்று உள்ளது. இத்தகைய சமன்பாடுகள் பெரும்பாலும் ஒருங்கமை சமன்பாடுகள் எனக் குறிப்பிடப்படும். இப்பொழுது நாம் நோக்கும் **ஒருங்கமை சமன்பாடுகள்,** மாறிகள் இரண்டைக் கொண்டுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாடுகளாகும். வேறுவகை ஒருங்கமை சமன்பாடுகளும் உள. இவற்றுட் சிலவற்றை நீங்கள் மேல் வகுப்புகளிற் படிக்கக்கூடும்.

இப்போது மேற்கூறிய ஒருங்கமை சமன்பாடுகளை வரைபு முறைப்படி தீர்க்க முயல்வோம். $x-2y+3=0$, $x\in R$, $y\in R$ என்பதையோ, $3x+4y-1=0$, $x\in R$, $y\in R$ என்பதையோ தனித்தனியாக எடுத்துத் தீர்வுத் தொடையை வரைபுப்படுத்துதற்கு இவ்வதிகாரத்திலே ஏற்கெனவே கற்றுள்ளீர்கள். முதலிலே, $x-2y+3=0$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை நோக்குவோம். $x-2y+3=0$, $x\in R$, $y\in R$ என்னுஞ் சமன்பாட்டினது தீர்வுத்தொடையின் வரைபு ஒரு நேர்கோடென நீங்கள் அறிவீர்கள். இக்கோட்டை l_1 எனக் குறிப்பிடுவோம். மேற்படி, சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தொடை, l_1 இனுள்ள புள்ளிகள் எல்லாவற்றுக்குமுரிய வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாகும். இவ்வரிசைப் பட்ட சோடிகளின் தொடையை L_1 எனக் குறிப்பிடுவோமாயின், $L_1=\{(x,\ y):\ x-2y+3=0,\ x\in R,\ y\in R\}$ ஆகும்.

அவ்வண்ணமே, $3x+4y-1=0$, $x\in R$, $x\in R$ என்பதன் தீர்வுத் தொடையினது வரைபு l_2 ஆயும், தீர்வுத் தொடை L_2 ஆயும் அமையின்,

$$L_2=\{(x,\ y):\ 3x+4y-1=0,\ x\in R,\ y\in R\} \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே, $x\in R$, $y\in R$ ஆக அமைந்த

$$\left.\begin{aligned} x-2y+3&=0\\ 3x+4y-1&=0 \end{aligned}\right\}$$

ஆகிய சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுத்தொடை L_1, L_2 ஆகிய இரண்டுக்கும் இசைவான வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாகும். அதாவது, அவ்விரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தொடை, L_1, L_2 ஆகியவற்றின் தொடை இடைவெட்டாகும். ஆனால், முதலாவது சமன்பாட்டின் தீர்வுத் தொடை l_1 என்னும் வரைபாலும், இரண்டாவது சமன்பாட்டின் தீர்வுத்தொடை l_2 என்னும் வரைபாலும் குறிக்கப்பட்டுள்ளதை நீங்கள் அறிவீர்கள். l_1, l_2 ஆகிய இரண்டிற்கும் பொதுவான புள்ளிகளுக்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடிகள், அவ்விரு சமன்பாடுகளினதுந் தீர்வுத் தொடையைக் குறிக்கும். அதாவது, அவ்விரு சமன்பாடுகளினதுந் தீர்வுத்தொடை l_1, l_2 என்பவற்றின் இடைவெட்டுப் புள்ளியாற் குறிக்கப்படும். இடைவெட்டுப் புள்ளிக்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடியின் தொடை தீர்வுத்தொடையாகு மெனவுங், கூறலாம்.

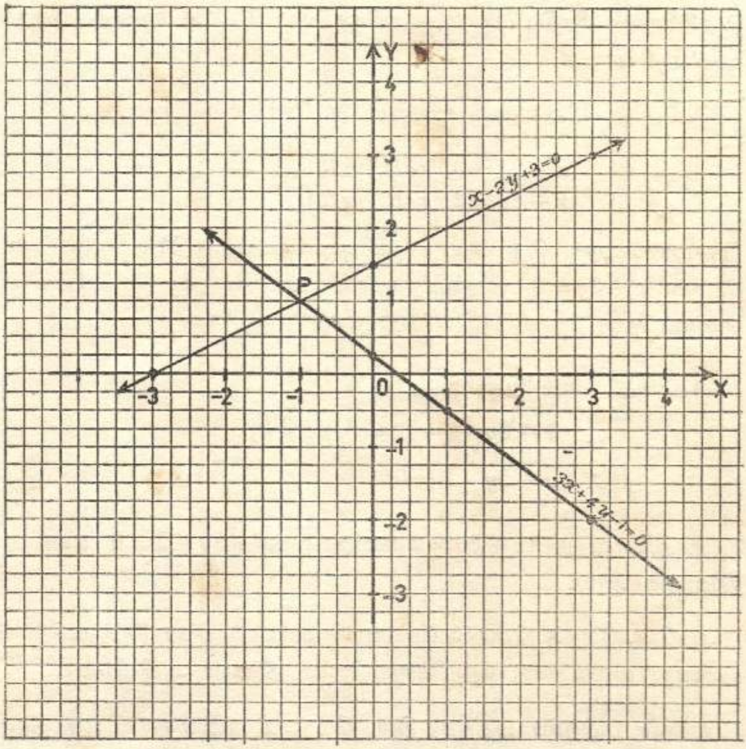
இப்போது மேற்கூறிய சமன்பாடுகள் ஒவ்வொன்றினதுந் தீர்வுத் தொடையின் வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைவோம்.

$x - 2y + 3 = 0$

x	0	-3	3
y	1·5	0	3

$3x + 4y - 1 = 0$

x	0	1	3
y	0·25	$-0·5$	-2



உரு 4-7

இக்கோடுகள் எத்தனை புள்ளிகளில் இடைவெட்டுகின்றன? இடைவெட்டுப்புள்ளியான P ஐக் குறிக்கும் வரிசைப்பட்ட சோடியை எழுதுக.

P இன் ஆள்கூறுகள் என்ன? P இற்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடி P இன் ஆள்கூற்றுச் சோடியே என்பதும் நீங்கள் அறிந்ததே. P இன் ஆள்கூறுகள் $(-1,1)$ ஆகும். எனவே, $\{(-1,1)\}$ என்பது தீர்வுத்தொடையாகும்.

இப்போது $x-2y+3=0$, $3x+4y-1=0$ $(x \in R,\ y \in R)$ என்னுஞ் சமன்பாட்டுச் சோடியின் தீர்வுத்தொடையை $L_1 \cap L_2=\{(-1,1)\}$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $\{(x,\ y):\ x-2y+3=0,\ x \in R,\ y \in R\} \cap$

$$\{(x,\ y):\ 3x+4y-1=0,\ x \in R,\ y \in R\}=\{(-1,\ 1)\}$$

இத்தீர்வை பிரதியீட்டு முறையினாலோ, வேறு முறைகளினாலோ சரிபிழை பார்க்க.

இப்போது, பின்வருஞ் சமன்பாட்டுச் சோடியை நோக்குக.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=3,\ x \in R,\ y \in R \\ 4x+8y=2,\ x \in R,\ y \in R \end{array}\right\}$$

இச்சமன்பாட்டுச் சோடியை வரைபுமுறையிலே தீர்ப்பதற்கு முயல்வோம். $x+3y=3$ என்னுஞ் சமன்பாட்டை $ax+by+c=0$ என்னும் அமைப்பிற்கு மாற்றலாமென்பது நீங்கள் அறிந்ததே.

அதாவது, $x+2y=3$

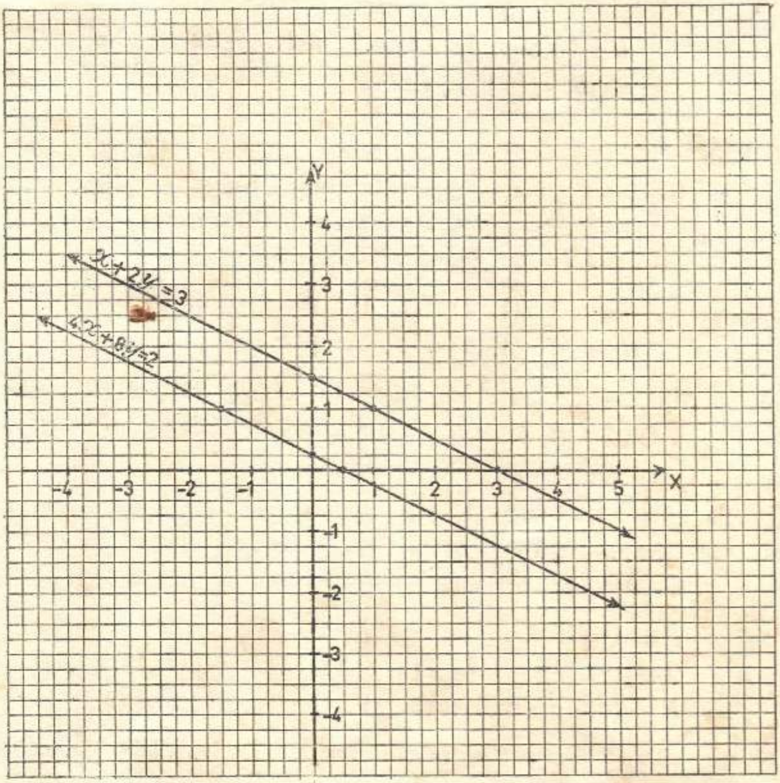
$$\therefore\quad x+2y+(-3)=3+(-3)$$

$$\therefore\quad x+2y-3=0$$

இதேபோன்று, $4x+8y=2$ என்பதை $4x+8y-2=0$ என மாற்றியமைக்கலாம்.

ஆகவே, மேற்கூறியவை போன்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தொடைகளினது வரைபுகள், நேர்கோடுகளென நீங்கள் அறிவீர்கள்.

உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத்தில், மேற்படி சமன்பாடுகளின் தீர்வுத் தொடைகளினது வரைபுகளை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைக. இவ்வரைபுகள் இரண்டிற்கும் பொதுவான புள்ளி யாதேனும் உண்டா? மேற்படி சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு உண்டாயின் அத்தீர்வுத் தொடையைக் காண்க.



உரு 4—8

மேற்கூறிய சமன்பாட்டுச் சோடிகளினது தீர்வுத் தொடையின் வரைபுகளை உரு 4–8 காட்டுகிறது. இக்கோடுகளை எவ்வளவு நீட்டினாலும், பொதுவான புள்ளி ஒன்று அக்கோடுகளுக்கு இருப்பதாகத் தோன்றவில்லை என்பதைக் காண்பீர்கள். நீங்கள் வரைந்த பொழுதும் இத்தகைய கோடுகளைப் பெற்றீர்களா? அவை எத்தகைய கோடுகளாகும்? மூலைமட்டம் ஒன்றின் உதவியுடன் அக்கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள செங்குத்துத் தூரத்தை அளக்க. நீங்கள் படித்த யாதேனும் முறையால் அச்சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க முயல்க. அப்பொழுது மேற்படி கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமெனவும், அவற்றிற்குப் பொதுவான புள்ளி ஒன்றேனுமில்லை எனவுங் காண்பீர்கள். எனவே, மேற்படி சமன்பாடுகளின் தீர்வுத்தொடை வெறுந்தொடையாகும்.

$A=\{(x, y): x+2y=3, x\epsilon\mathrm{R}, y\epsilon\mathrm{R}\}$

$B=\{(x,y): 4x+8y=2, x\epsilon\mathrm{R}, y\epsilon\mathrm{R}\}$ ஆயின்.

$A\cap B=\{ \quad \}$ ஆகும்.

பயிற்சி 4–3

1. (i) பின்வருவனவற்றை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைபுப்படுத்துக. இரு தொடைகளையும் வேறுபடுத்தற்பொருட்டு வெவ்வேறு நிறங்கள் பயன்படுத்துக.

$$A = \{ (1, 2) ; (2, 4) ; (3, 6) ; (4, 8) \}$$
$$B = \{ (1, 2) ; (2, 3) \}$$

(ii) மேற்படி வரைபிலிருந்து (a) $A\cap B$ (b) $A\cup B$ ஆகியவற்றைக் காண்க. உங்கள் விடைகளை வேறுமுறையாற் சரிபிழை பார்க்க.

2. பின்வருவனவற்றை ஒரே ஆள்கூற்றுத் தளத்தில் வரைபுப் படுத்துக. இரு தொடைகளையும் வேறு படுத்தற் பொருட்டு வெவ்வேறு நிறங்கள் பயன்படுத்துக.

$$P=\{(1,2) ; (2, 4) ; (3, 6) ; (4, 8) \}$$
$$Q=\{(-2, 0) ; (-1, 1) ; (0,2) ; (1, 3), (2, 4) ; (3,5) \}$$
$$R=\{(0,6) ; (1, 5) ; (2, 4) ; (3, 3) ; (4, 2) ; (5,1) \}$$

3. வினா 2 இற்கு வரையப்பட்ட வரைபிலிருந்து பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) $P\cap Q$ (ii) $P\cap R$ (iii) $Q\cap R$ (iv) $P\cup Q$

(v) $P\cup R$ (vi) $Q\cup R$ *(vii) $P\cap Q\cap R$.

பின்வரும் ஒருங்கமை சமன்பாட்டுச் சோடிகளின் தீர்வுத் தொடையை (தீர்வு உண்டாயின்) வரைபு முறையாற் காண்க.

4. $2x+3y-18=0, \ 2x-3y+6=0, \ x\epsilon R, \ y\epsilon R$
5. $2x-y-5=0, \ 3x+2y-4=0, \ x\epsilon R, \ y\epsilon R$
6. $x+y-3=0, \ 5x+5y-8=0, \ x\epsilon R, \ y\epsilon R$
7. $2s-3t=4, \ 3s-2t=11, \ s\epsilon R, \ t\epsilon R.$
8. $3p+2q=0, \ 3p+2q=1, \ p\epsilon R, \ q\epsilon R$
9. $3u+4v=1, \ 6u+8v=2, \ u\epsilon R, \ v\epsilon R$
10. $x+y=6, \ 2x+3y=2, \ x\epsilon Z, \ y\epsilon Z$

மாறிகள் இரண்டைக் கொண்டுள்ள ஏகபரிமாணச் சமன்பாட்டுச் சோடியினது தீர்வுத்தொடையின் வரைபு நேர்கோடு ஆகுமென மேலே தரப்பட்டுள்ள பயிற்சிக்குரிய வினாக்களிலிருந்து அறிந்திருப்பீர்கள். இங்கு மாறிகள் ϵR ஆகும். இக்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுதல் கூடும் ; அல்லது ஒன்றுக்கொன்று சமாந்தரமாக அமைதல் கூடும் ; அல்லது அவை ஒரே கோடாக அமைதல் கூடும். மேலேயுள்ள பயிற்சியின் வினா 9 இலிருந்து $6u+8v=2$, $u\epsilon R$, $v\epsilon R$ என்பது $3u+4v=1$ $u\epsilon R$, $v\epsilon R$ என்பதற்குரிய அதே நேர்கோட்டையே குறிக்கிறதென அறிந்திருப்பீர்கள். இச்சமன்பாடுகளை உற்று நோக்கினீர்களேயானால், ஒன்றை மாற்றியமைத்து மற்றதைப் பெறலாமென்பதை உணர்வீர்கள். உதாரணமாக, $6u+8v=2$ஐ 2 ஆல் வகுத்தால் $3u+4v=1$ என்பதைப் பெறுவோம். இச்சமன்பாடுகள் இரண்டனதும் தீர்வுத் தொடை ஒரே தொடையென நீங்கள் அறிவீர்கள். ஆகவே, அவை இரண்டின் வரைபுகளும் ஒரே வரைபாகும்.

இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டினால், தரப்பட்ட சமன்பாடுகள் இரண்டிற்கும் தீர்வுத் தொடை உண்டு. இரு நேர்கோடுகள் ஒரேயொரு புள்ளியிலே வெட்டுமென்பது நாம் அறிந்ததே. சமன்பாடுகள் இரண்டினதும் தீர்வுத்தொடை அக்கோடுகளின் வெட்டுப்புள்ளிக்குரிய வரிசைப்பட்ட சோடியின் தொடையாகும்.

5 பரப்பளவு

பல்கோணிகள் எனப்படும் நேர்கோடுகளாலான உருவங்கள் பற்றி நீங்கள் நன்கு அறிந்திருக்கிறீர்கள். கணிதம் 8—1 இன் இரண்டாம் அதிகாரத்திலே, ஒழுங்கான பல்கோணிகள் பற்றியும் நீங்கள் படித்திருக்கிறீர்கள். கோணங்கள் எல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும், பக்கங்கள் எல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவும் உள்ள பல்கோணியே, ஒழுங்கான பல்கோணி எனப்படும் என்பது, நீங்கள் அறிந்ததே.

n பக்கங்கள் ($n \in Z^+$; $n \geqslant 3$) கொண்ட குவிந்த பல்கோணியின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை என்னவென்று உங்களுக்கு நினைவிருக்கிறதா ?

ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை தெரியுமாயின், அதன் அகக் கோணம் ஒவ்வொன்றினதும் அளவைக் கணிக்க உங்களுக்குத் தெரியுமா ?

பின்வரும் பயிற்சிக்கு விடையளிப்பதன் மூலம், முன்பு படித்தவற்றை நன்கு நினைவு கூர்ந்து கொள்ளுங்கள்.

பயிற்சி 5—1

1. பின்வரும் பல்கோணிகள் ஒவ்வொன்றினதும் அகக் கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகையைக் கணிக்க :—
   (அ) குவிந்த எழுகோணி
   (ஆ) குவிந்த தசகோணி.
2. பின்வரும் பல்கோணிகளின் அகக்கோணம் ஒவ்வொன்றினது அளவையுங் கணிக்க :—
   (அ) ஒழுங்கான ஐங்கோணி
   (ஆ) ஒழுங்கான நவகோணி.
3. குவிந்த பல்கோணிகள் சிலவற்றின் அகக் கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகைகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவை ஒவ்வொன்றும் எத்தனை பக்கங்கள் உடையவை எனக் கணிக்க :—

(அ) 8 செங்கோணங்கள்

(ஆ) 1260°

(இ) 20 செங்கோணங்கள்

(ஈ) 2340°.

4. சில ஒழுங்கான பல்கோணிகளின் அகக் கோண அளவுகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவற்றின் பக்கங்கள் எத்தனை எனக் கணிக்க :

(அ) $1\frac{1}{2}$ செங்கோணங்கள்

(ஆ) 140°

(இ) $1\frac{9}{13}$ செங்கோணங்கள்

(ஈ) 165°

5. (அ) மூன்று (ஆ) நான்கு நேர்கோட்டுத் துண்டங்களால் அடைக்கப்பட்ட ஒழுங்கான உருவங்களின் பெயர்களைத் தருக.

6. ABCD ஒரு சதுரமாகும். அதன் பக்கங்களான AB, BC ஆகியவற்றின் செங்குத்து இரு சமகூறுக்கிகள் O விற் சந்திக்கின்றன. AO = BO = CO = DO என நிறுவுக.

7. MNPQR ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி. $R\hat{M}N, M\hat{N}P$ ஆகியவற்றின் இரு சமகூறுக்கிகளை வரைக. அவை சந்திக்கும் புள்ளி O எனக் கொள்க. OP, OQ, OR ஆகியவற்றை இணைக்க. பின்வருவனவற்றைக் காட்டுக.

(i) $\triangle MON \equiv \triangle NOP$ (ii) OM = ON = OP

(iii) $N\hat{P}Q$ ஐ OP இரு சம கூறிடுகிறது. (iv) $P\hat{Q}R$ ஐ OQ இரு சம கூறிடுகிறது. (v) QRM ஐ OR இரு சம கூறிடுகிறது.

(vi) OM, ON, OP, OQ, OR ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று சமன்.

பயிற்சி 5—1 இல் ஆறும் வினவிலே, AO, BO, CO, DO ஆகியவை நீள அளவிற் சமன் என்பதை நிறுவியிருப்பீர்கள். அதாவது, O என்பது சதுரத்தின் உச்சிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் அதன் உட்புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியாகும். இப்புள்ளி, சதுரத்தின் மையம் எனப்படும். சதுரம் என்பது, நான்கு நேர்கோட்டுத் துண்டங்களால் அமைக்கப்பட்ட ஒழுங்கானவுருவம் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். உண்மையில், சதுரம் மட்டுமல்ல ; மற்றைய ஒழுங்கான நேர்கோட்டுருவங்களும், தத்தம் உச்சிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் அமையும் புள்ளியொன்றைத் தம்முள்ளே கொண்டுள்ளன. ஒழுங்கான பல்கோணியின் உட்புறத்தே அதன் உச்சிகளிலிருந்து சமதூரத்தில்

அமைந்துள்ள புள்ளி, அவ்வொழுங்கான பல்கோணியின் **மையம்** எனப்படும். மேற்படி பயிற்சியின் வினா 7 இலிருந்து ஒழுங்கான ஐங்கோணி MNPQR இன் அகக்கோணங்களின் இருசமகூறுக்கிகள் ஒரே புள்ளியில் (O இற்) சந்திக்கின்றனவெனக் கண்டீர்கள். இப்புள்ளி அந்த ஐங்கோணியின் உச்சிகளிலிருந்து சம தூரத்தில் அமைந்துள்ளது எனவுங் கண்டீர்கள். எனவே O, MNPQR இன் மையமாகும். O விலிருந்து (மையத்திலிருந்து) அதன் பக்கங்களுக்குச் செங்குத்துக்கள் வரைந்தால், அவை அப்பக்கங்களை இரு சம கூறிடுகிறதெனவும், அச்செங்குத்துக்கள் நீள அளவிற் சமமெனவும் காட்ட உங்களால் முடியுமா? இவ்வுண்மைகளை அளவீட்டாற் சரிபார்க்க.

இதுவரை இந்த ஒழுங்கான ஐங்கோணியினது மையம் அமைந்துள்ள இடங் குறித்து நாம் மூன்று உண்மைகளைக் கண்டறிந்தோம் என்பதை நீங்கள் உணர்வீர்கள்.

(1) ஒழுங்கான ஐங்கோணியின் பக்கங்களின் செங்குத்து இரு சம கூறுக்கிகளில் மையம் உள்ளது.

(2) பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் மையத்திலிருந்து சம தூரத்தில் உள்ளன.

(3) ஒழுங்கான ஐங்கோணியின் கோணங்களினது இரு சமகூறுக்கிகளில் இந்த மையம் உள்ளது.

இனி O ஐ மையமாகவும் OM ஐ ஆரையாகவுங் கொண்டு வட்டமொன்று வரைந்தோமாயின், ஐங்கோணியின் மற்றைய உச்சிகளான N, P, Q, R ஆகியவை எங்கே அமையும்? வட்டத்திலா? அதன் உட்புறத்திலா அல்லது அதற்கு வெளிப்புறத்திலா? நீங்கள் கூறும் விடைக்குக் காரணந் தருக.

இதுவரை கண்ட உண்மைகள் எல்லாம் இந்த ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒன்றுக்கு மட்டுந்தான் பொருந்துமா வென ஆராய்தல் இந்நிலையில் பொருத்தமானதாகும். நாம் நிறுவிய உண்மைகளுள் எதாவது, பக்கங்களின் எண்ணிக்கையில், அல்லது நீள அளவிற் பொறுத்துள்ளதா? ஒழுங்கான அறுகோணி அல்லது எழுகோணிக்கும் இவ்வுண்மைகள் பொருந்துமாவெனப் பரீட்சித்துப் பார்க்க. பக்கங்களின் எண்ணிக்கை, அல்லது நீள அளவு யாதாயினும், ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றிலே,

(1) மையம், பக்கங்களின் செங்குத்து இரு சமகூறுக்கிகளில் அமையும்.

(2) மையம் பக்கங்கள் எல்லாவற்றிலும் இருந்து சமதூரத்தில் அமையும்.

(3) மையம், கோணங்களின் இரு சமகூறுக்கிகளில் அமையும்.

பயிற்சி 5–2

1. XYZWUV ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி. O அதன் மையம்.

(i) $X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$, $O\hat{X}Y$, $O\hat{Y}X$ ஆகியவற்றின் அளவுகளைக் கணிக்க.

(ii) $\triangle OXY$, $\triangle OYZ$, $\triangle OZW$, ... ஆகியன ஒவ்வொன்றும் சம பக்க முக்கோணிகள் என நிறுவுக.

2. 1″ ஆரையுள்ள வட்டமொன்று வரைக. உச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் அவ்வட்டத்தில் அமையக் கூடியதாக, ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணி வரைக.

3. 3 சமீ. ஆரை கொண்ட வட்டமொன்று வரைக. உச்சிகள் ஒவ்வொன்றும் அவ்வட்டத்தில் அமையக் கூடியதாகச் சதுரம் ஒன்று வரைக. சதுரத்தின் பக்கத்தை அளந்து எழுதுக.

4. PQRS ஒரு சதுரம். அதன் மூலை விட்டங்கள் T இல் வெட்டுகின்றன. T சதுரத்தின் மையமென நிறுவுக.

5. ஒழுங்கான நவகோணி ஒன்று வரைக. அதன் மையம் O வைக் குறிக்க. நவகோணியினது பக்கமொன்றின் நடுப்புள்ளியூடாகச் செல்லும் வண்ணம், O வை மையமாகக் கொண்டு வட்டமொன்று வரைக.

நவகோணியில் உள்ள வேறு எந்தப் புள்ளிகளூடாக இவ் வட்டஞ் செல்லுமெனக் குறிப்பிடுக.

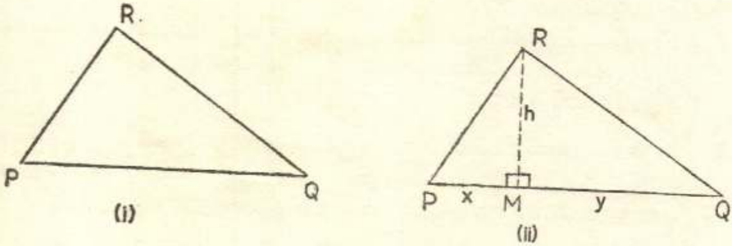
6. சம ஆரையுள்ள வட்டங்கள் இரண்டு வரைக. அவற்றின் பரிதியில் உச்சிகள் அமையக் கூடியதாக ஒன்றில் ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒன்றும், மற்றதில் ஒழுங்கான நவகோணி ஒன்றும் உள் வரைக. ஒழுங்கான எழுகோணி ஒன்றை இவ்வண்ணம் தந்தவொரு வட்டத்தில் உள்வரைவதில் நடைமுறை வசதியீனம் ஏதாவது உண்டா ? இது பற்றி ஆராய்க.

பல்கோணிகள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு

செங்கோண முக்கோணிகள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவுகளைக் கணிப்பதெப்படி என்பதை முன்னைய வகுப்புகளில் நீங்கள் படித்திருக்கிறீர்கள். அது உங்களுக்கு நினைவிருக்கின்றதா ? செங்கோணத்தை

அமைக்கும் இரு பக்கங்களினது நீள அளவுகளையுந் தெரிந்து கொண்டால், செங்கோண முக்கோணி ஒன்று உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணித்தல் கூடுமென்பதை உங்களுட் பலர் அறிவீர்கள். இந்த அறிவைக் கொண்டு, யாதுமொரு முக்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவை நாம் கணிக்க முடியுமா ?

முக்கோணி ஒன்று, செங்கோண முக்கோணியல்லாவிடின், அது கூர்ங்கோண முக்கோணியாகவிருக்கும் அன்றேல், விரிகோண முக்கோணியாகவிருக்கும். முதலில், கூர்ங்கோண முக்கோணி ஒன்றைக் கவனிப்போம். உரு **5–1 (1)** இல், $\hat{PQR}$ ஒரு கூர்ங்கோண முக்கோணியாகும்.

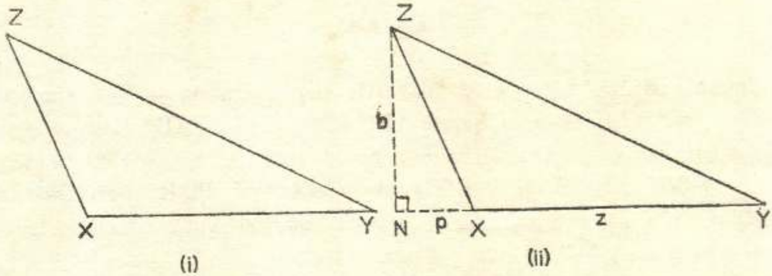


உரு 5–1

$\triangle$**PQR** செங்கோண முக்கோணியல்லாத படியால் முன்பு படித்த முறையில், அது உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணித்தல் முடியாது என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். இப்பொழுது உரு **5–1 (ii)** இல் உள்ளதுபோல PQ உக்குச் செங்குத்தாக RM வரையப்படுகிறது எனக் கொள்க. $\triangle$ PMR, $\triangle$ RMQ என இரு முக்கோணிகளாக $\triangle$ PQR பிரிக்கப்படுகிறது. இந்த இரு முக்கோணிகள் பற்றியும் நீங்கள் யாது கூற முடியும்? அவை இரண்டுஞ் செங்கோண முக்கோணிகளென அவதானித்தீர்களா? $PM = x$ அலகுகள், $MQ = y$ அலகுகள், $RM = h$ அலகுகள் (x, y, h நேரெண்கள்) எனின், $\triangle$ PMR, $\triangle$ RMQ ஆகியன உள்ளடக்கும் பரப்பளவுகளைக் கணிக்க உங்களால் முடியுமா? அவை இரண்டும் செங்கோண முக்கோணிகள். ஆகையால், $\triangle$ PMR உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, x.h$ சதுர அலகுகள் ; $\triangle$ RMQ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\, y.h$ சதுர அலகுகள். எனவே, $\triangle$ PQR உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}yh$ அதாவது, $\frac{1}{2}h\ (x + y)$ சதுர அலகுகள் எனத் தெளிவாகிறது. இதிலே, $(x + y)$ என்பது PQ எனும் பக்கத்தின் நீள அளவாகும். h என்பது, PQ என்ற பக்கத்துக்கு, அதற்கு எதிராகவுள்ள உச்சியி

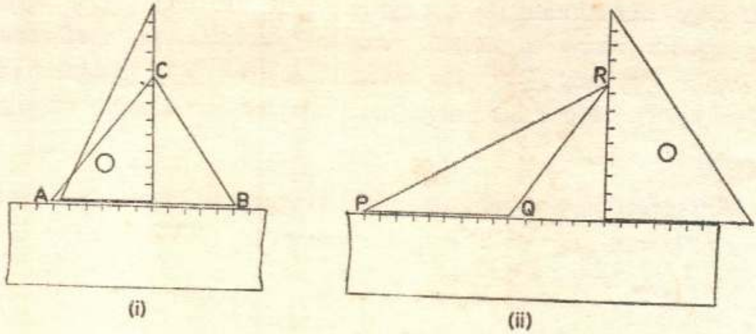
லிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துயரமாகும். h, PQ இற்கு ஒத்த குத்துயரம் எனக் கூறப்படும். எனவே, கூர்ங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தின் நீள அளவும், அதற்கு ஒத்த குத்துயரமுந் தெரிந்தால், அது உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம் என்பது தெளிவு.

விரிகோண முக்கோணிக்கும் இது பொருந்துமாவென நாம் இனி ஆராய்வோம். உரு 5–2(i) இல் உள்ள △ XYZ என்ற விரிகோண முக்கோணியைப் பாருங்கள்.



உரு 5–2

உரு 5–2 (ii) இல் உள்ளபடி, ZN, △ XYZ இன் பக்கம் XY உக்கு ஒத்த குத்துயரமாகும். $XY = z$ அலகுகள், $NX = p$ அலகுகள், $ZN = b$ அலகுகள் எனின், △ NYZ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு யாது? △ NXZ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு யாது? எனவே, △ XYZ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு யாது? இவற்றுக்குச் சரியான விடைகாணின் △ XYZ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}\ z.b$ சதுர அலகுகள் என்பதை அறிவீர்கள். அதாவது, விரிகோண முக்கோணி ஒன்றின் ஒரு பக்கத்தின் நீள அளவும், அதற்கு ஒத்த குத்துயரமுந் தெரிந்தால், அது உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்க முடியும் என்பது தெளிவாகிறது. முக்கோணி ஒன்று உள்ளடக்கும் பரப்பளவானது, அதன் பக்கம் ஒன்றினதும், அதற்கு ஒத்த குத்துயரத்தினதும் அளவுகளின் பெருக்குத்தொகையின் அரைப்பங்கு என்பதை இதுவரை நீங்கள் படித்ததிலிருந்து அறிவீர்கள். தந்தவொரு முக்கோணியிலே, எந்தவொரு பக்கத்தின் நீள அளவையும் நீங்கள் எளிதில் அளந்தறியலாம். அப்பக்கத்துக்கு ஒத்த குத்துயரத்தை எப்படி அளக்கலாம் என்பதைக் கூற முடியுமா? அடிமட்டம் ஒன்றையும் மூலை மட்டம் ஒன்றையும் பயன்படுத்தி இதை அறிதல் முடியுமென்பதை உங்களுட் பலர் மறந்



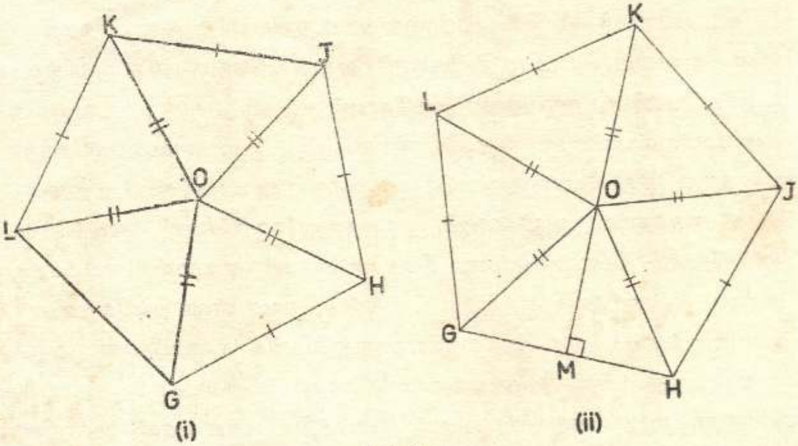
உரு 5–3

திருக்க மாட்டீர்கள். உரு 5–3 (i), (ii) ஆகியனவற்றைப் பாருங்கள். கூர்ங்கோண முக்கோணி ABC யில், பக்கம் AB உக்கு ஒத்த குத்துயரத்தை அளக்க மூலைமட்டத்தை எப்படிப் பிரயோகிப்பதென உரு 5–3(i) காட்டுகிறது. விரிகோண முக்கோணி PQR இல், பக்கம் PQ உக்கு ஒத்த குத்துயரத்தை அளக்க அதைப் பிரயோகிப்பதெப்படி என்பதை உரு 5–3 (ii) காட்டுகிறது.

முக்கோணி ஒன்று உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்க முடியுமெனின், யாதுமொரு பல்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவையுங் கணித்தல் கூடும். பல்கோணியை முக்கோணிகளாகப் பிரிப்பதன் மூலம், இக்கணித்தல் சாத்தியமாகும். பல்கோணி ஒழுங்கானதெனின், இக்கணிப்பு மேலும் எளிதாகிறது. ஏன் என்று தெரியுமா? ஒழுங்கான பல்கோணி ஒன்றின் உச்சிகளை நேர்கோட்டுத் துண்டங்களால் மையத்துடன் இணைத்தால், பல்கோணிக்கு எத்தனை பக்கங்கள் உள்ளனவோ, அத்தனை முக்கோணிகள் கிடைக்கப்பெறும். அந்த முக்கோணிகளைப்பற்றி யாது கூற முடியும்? அவை சமபக்க முக்கோணிகளா? அவை இரு சமபக்க முக்கோணிகளா? அவை ஒருங்கிசை முக்கோணிகளா? எந்த ஒழுங்கான பல்கோணியை எடுத்தாலும், இம்முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும் இரு சமபக்க முக்கோணிகளாக அமையுமெனக் காண்பீர்கள். ஒழுங்கான அறுகோணி எனின், முக்கோணிகள் ஒருங்கிசையும் சமபக்க முக்கோணிகளாக அமைவதைக் காண்பீர்கள்.

இனி, உரு 5–4 (i) இற் காட்டப்பட்டுள்ள ஒழுங்கான ஐங்கோணியைப் பாருங்கள்.

அதில், பக்கம் GH இன் நடுப்புள்ளி M ஆகும். MO ஐ நேர்கோட்டுத் துண்டத்தால் இணைக்கும்போது உண்டாகுங் கோணம்



உரு 5-4

GMO வின் அளவு பற்றி யாது கூறுவீர்கள்? அது செங்கோண மென நிறுவமுடியுமா? பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ள கூற்றுக் களையுங் காரணங்களையும் நிரப்பி, முடிவை அவதானியுங்கள்.

கூற்று	காரணம்
1. △ GOH உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}$GH.OM	1. ....
2. △ GOH இன் பரப்பளவுக்குச் சமனான பரப்பளவை உள்ளடக்கும் பிற முக்கோணிகள்	2. அவை ஒருங்கிசை முக்கோணிகள். ∴ சம பரப்பளவை உள்ளடக்கும்.
3. ஒழுங்கான ஐங்கோணி GHJKL உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $=5.\frac{1}{2}$. GH.OM	3. ....
4. ஐங்கோணி GHJKL இன் சுற்றளவு = 5.GH	4. ....
5. ஐங்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $=\frac{1}{2}\times$ ஐங்கோணியின் சுற்றளவு × மையத்திலிருந்து பக்கமொன்றின் செங்குத்துத் தூரம்.	5. ....

அட்டவணை 5-1

அட்டவணை 5—1 இல் மூன்றாவது கூற்றின்படி, ஒரு பக்கத்தின் நீள அளவும், மையத்திலிருந்து அதன் செங்குத்துத் தூரமுந் தெரியுமெனின், ஒழுங்கான ஐங்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்கலாம் என்பது தெளிவாகிறது. பிற ஒழுங்கான பல்கோணி களுக்கும் இது பொருந்துமாவென ஆராய்ந்து பாருங்கள். உதாரண மாக ஒழுங்கான அறுகோணி, ஒழுங்கான எழுகோணி, ஒழுங்கான எண்கோணி, போன்றவற்றை நீங்களே ஆராய்ந்து பாருங்கள். பக்கங் களின் எண்ணிக்கை எத்தனை யாயினும், ஒழுங்கான பல்கோணிகள் யாவற்றுக்கும் இந்த முடிவு பொருந்துமெனக் காண்பீர்கள். அதா வது, யாதுமொரு ஒழுங்கான பல்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பள வானது, அதன் சுற்றளவினதும் மையத்திலிருந்து பக்கமொன்றின் செங்குத்துத் தூரத்தினதும் அளவுகளின் பெருக்கத்தின் அரைப் பங்காகுமெனக் காண்பீர்கள்.

வட்டங்கள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு

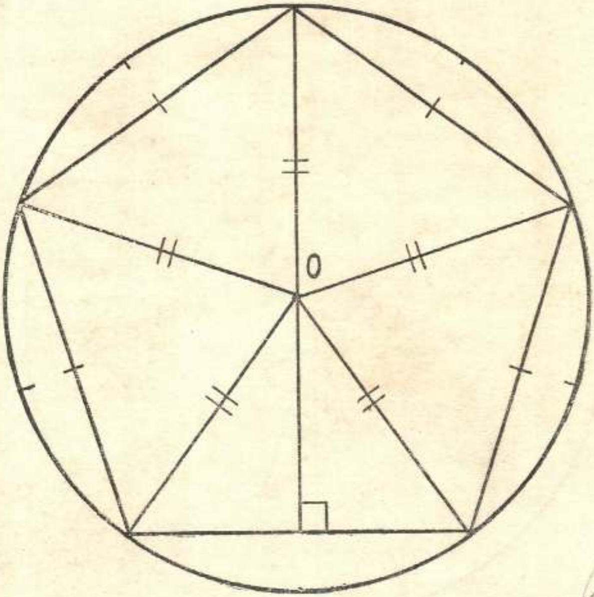
செயல் :

(i) ஒவ்வொன்றும் 1·5" ஆரையுள்ள மூன்று வட்டங்கள் வரைக.

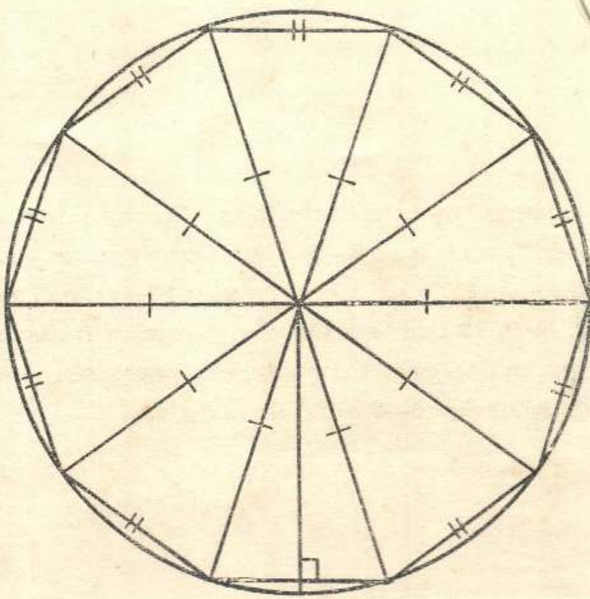
(ii) அவற்றுள் ஒன்றில், உரு. 5—5 (i) இற் காட்டியவாறு, ஒழுங்கான ஐங்கோணி ஒன்றை உள்வரைக.

(iii) இரண்டாவது வட்டத்தில், உரு 5—5 (ii) இற் காட்டிய வாறு, பத்துப் பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணியை உள்வரைக.

(iv) மூன்றாவது வட்டத்தில், உரு 5—5 (iii) இற் காட்டிய வாறு, இருபது பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணியை உள் வரைக.

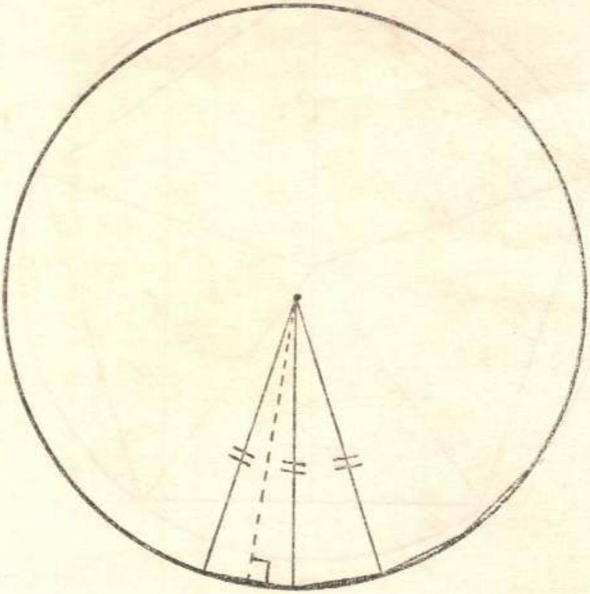


(i)



(ii)

உரு 5-5



(iii)

உரு 5-5

நீங்கள் வரைந்துள்ள உருவங்களிலிருந்து, பொருத்தமான அளவுகளை அளந்து, அட்டவணை 5—2 இற் பொருத்தமான கூடுகளை நிரப்புக. மேலும், 1·5″ ஆரையுள்ள நான்கு வேறு வட்டங்களுள் முறையே 6, 8, 9, 12 பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணிகளை உள்வரைந்து, அவற்றிலும் பொருத்தமான அளவுகளை அளந்து பதிவு செய்து அட்டவணை 5—2 ஐப் பூரணப்படுத்துக.

பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	பக்கமொன்றின் நீள அளவு (அங்குலம்)	சுற்றளவு (அங்குலம்)	மையத்திலிருந்து பக்கமொன்றின் செங்குத்துத் தூரம் (அங்குலம்)	பல்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவு (சது. அங்.)
5				
6				
8				
9				
10				
12				
20				

அட்டவணை 5–2

நீங்கள் வரைந்த வட்டங்கள் யாவும் 1·5″ ஆரைகள் அதாவது, சம நீள அளவுள்ள ஆரைகள் கொண்டவை என்பதை மனதிற் பதித்து, அட்டவணை 5—2 ஐ ஆராய்க. அதன்பின், பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக :—

ஒழுங்கான பல்கோணியினது பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் பொழுது,

(i) மையத்திலிருந்து பக்கங்களின் தூரம் அதிகரிக்கிறதா அல்லது குறைகிறதா ?

(ii) பல்கோணியின் சுற்றளவு அதிகரிக்கிறதா அல்லது குறைகிறதா ?

(iii) பல்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவு அதிகரிக்கிறதா அல்லது குறைகிறதா ?

இந்த வினுக்களுக்கு விடைகாணும்போது, பின்வரும் உண்மைகளை அறிந்திருப்பீர்கள். பல்கோணியினது பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது,

(i) மையத்திலிருந்து பக்கங்களின் செங்குத்துத் தூரமும் அதிகரிக்கிறது.

(ii) பல்கோணியின் சுற்றளவும் அதிகரிக்கிறது.

இனி, மையத்திலிருந்து பக்கங்களின் செங்குத்துத் தூரத்தைக் குறிப்பாக அவதானியுங்கள். குறித்த ஒரு வட்டத்தில் உள்வரைந்த ஒழுங்கான பல்கோணியை எடுத்துக் கொண்டால், மையத்திலிருந்து பக்கங்களின் செங்குத்துத் தூரம் மிஞ்ச முடியாத நீள அளவு ஏதாவதுண்டா ? இதற்கு விடையை நீங்கள் எளிதிற் கூறிவிடுவீர்கள். வட்டத்தின் ஆரையின் நீள அளவிலும் பார்க்க இச்செங்குத்துத் தூரம் அதிகரிக்க முடியாது என்பது வெளிப்படை. அதாவது, மிகப் பல பக்கங்கள் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கான பல்கோணியை வட்டமொன்றில் உள்வரைந்தால், மையத்திலிருந்து அதன் பக்கங்களின் செங்குத்துத் தூரத்திற்கும் வட்டத்தின் ஆரைக்கும் உள்ள வித்தியாசம் மிகவுஞ் சிறிதாகும். ஆகவே பல்கோணியினது பக்கங்களின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது, இச்செங்குத்துத் தூரம் வட்டத்தின் ஆரைக்கு நீள அளவில் ஏறக்குறையச் சமனுக அமையுமென்பது தெளிவு. இந்நிலையில், அப்பல்கோணியின் சுற்றளவு பற்றி யாது கூறமுடியும் ? அச்சுற்றளவு வட்டத்தின் பரிதிக்கு, அதாவது $2\pi r$ உக்கு ஏறக்குறையச் சமனுக அமையும்.

ஆகவே, மிகப் பல பக்கங்கள் கொண்ட ஒழுங்கான பல்கோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவு, அண்ணளவாக $\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$. இது வட்டம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவுக்கு ஏறக்குறையச் சமனுகும். r ஆரையுள்ள வட்டம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு πr^2 எனக் கணிதவல்லுனர்கள் நிறுவியுள்ளனர். இங்கு $\pi \simeq 3{\cdot}14$ (அல்லது $\simeq \frac{22}{7}$) ஆகும்.

ஆரை r உடைய வட்டத்தின் பரப்பளவு πr^2 என்பதை நிறுவும் முறைகள் இவ்வகுப்புக்கு அப்பாற்பட்டன. அம்முறைகள் பற்றி நீங்கள் மேல் வகுப்புகளிற் படித்தல் கூடும்.

பயிற்சி 5–3

1. $AB = 2''$, $AC = 2{\cdot}5''$, $\hat{A} = 75°$ உள்ள முக்கோணி வரைக. பொருத்தமான அளவீடுகளைச் செய்து, பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக :—

பக்கத்தின் நீள அளவு	ஒத்த குத்துயரம்	$\triangle ABC$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு
$AB = \ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ சது. அங்
$BC = \ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ சது. அங்
$CA = \ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ அங்.	$\ldots\ldots\ldots$ சது அங்.

அட்டவணை 5–3

2. $XY = 8{\cdot}3$ சமீ., $XZ = 9{\cdot}6$ சமீ., $\hat{X} = 120°$ கொண்ட $\triangle XYZ$ வரைக. வி‌ஞ 1 இற் காட்டிய அட்டவணை போன்ற ஒன்றை அமைத்து, இம்முக்கோணியின் பொருத்தமான அளவீடுகளையுங் கணிப்புக்களையுங் கொண்டு அந்த அட்டவணையை நிரப்புக.

3. $PQ = 2{\cdot}5''$, $\hat{P} = 55°$, $PS = 3{\cdot}1''$, $QR = 3{\cdot}3''$, $RS = 2{\cdot}9''$ கொண்ட நாற்பக்கல் **PQRS** ஐ வரைக.

   (i) அந்நாற்பக்கலை **PQR, PRS** என்ற இரு முக்கோணிகளாகப் பிரித்து அதன் பரப்பளவைக் காண்க.

   (ii) அதனுள் **O** என்ற யாதுமொரு புள்ளியைக் குறித்து அப்புள்ளியை நேர்கோட்டுத் துண்டங்களால் உச்சிகளுக்கு இணைத்து, **PQRS** உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்க.

4. மையம் **O** ஆகவும், ஆரை $2''$ ஆகவும் உள்ள வட்டமொன்று வரைக. அதன் விட்டம் ஒன்று வரைந்து **XY** எனப் பெயரிடுக. **XY** உக்குச் செங்குத்தாக இன்னோர் விட்டம் **ZW** வரைக.

   (i) **XZYW** சதுரமென நிறுவுக.

   (ii) $\triangle$ **XOZ** உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்க.

   (iii) **XZYW** உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கணிக்க.

5. வட்டமொன்று வரைந்து, அதன் ஆரை r எனக் கொள்க. அவ்வட்டத்தில் சதுரம் ஒன்று உள் வரைக. அச்சதுரத்தின் பரப்பளவை r இற் கூறுக.

6. 1·2" பக்க அளவுள்ள ஒழுங்கான அறுகோணி ஒன்று வரைக. அதன் உள்ளுருவமாக, வட்டமொன்று வரைக. அறுகோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவில் வட்டம் உள்ளடக்காத பகுதியின் பரப்பளவைக் கணிக்க.

7. உச்சிக்கும் மையத்துக்கும் இடைத்தூரம் 2·5 சமீ. உடையதாக அமையும் வண்ணம் ஒழுங்கான நவகோணி ஒன்று வரைக. (i) அதனுள் வரையக்கூடிய மிகப்பெரிய வட்டத்தை வரைக. (ii) அதன் உச்சிகளூடாகச் செல்லும் வட்டத்தை வரைக. (iii) மேற்படி இரு வட்டங்கள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவின், வித்தியாசத்தைக் கணிக்க.

8. $AB = 7·5$ சமீ., $BC = 5·3$ சமீ., $A\hat{B}C = 50°$ கொண்ட ABCD என்ற இணைகரமொன்று வரைக. ABCD இல் உள் வரையக் கூடிய மிகப் பெரிய வட்டத்தினது விட்டத்தின் நீள அளவென்ன ? அவ்வட்டம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவென்ன ?

உருளைகளின் வளைபரப்பினது பரப்பளவு

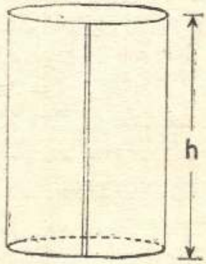
தளப் பரப்புக்களிலே வரையப்படும் நேர்கோட்டுருவங்களும் வட்டங்களும் உள்ளடக்கும் பரப்பளவுகளைக் கணிப்பதெப்படி என நீங்கள் அறிந்துள்ளீர்கள். இனி, இவற்றிலிருந்து சற்று வேறுபட்ட ஓர் உருவத்தைக் கவனிப்போம். உதாரணமாக, மூடிய பால் தகரம் ஒன்றை எடுத்துக் கொள்ளுங்கள். அத்தகைய ஒரு தகரத்தைக் காணாதவர்களே உங்களுள் இல்லை எனலாம். அதில் இரண்டு தளப் பரப்புகள் உள. அத்தளப்பரப்புகள் இரண்டும் வட்டவடிவமுடையன. இவை தவிர, அதில் வளைபரப்பு ஒன்றும் உண்டு. பால் தகரம், மின்சூள் கலம், உலக்கை, இரும்புக்கம்பி, கொத்து போன்ற உருளை வடிவுடைய உருவங்கள் செவ்வட்ட உருளைகளாகும்.

இத்தகைய செவ்வட்ட உருளையின் வளை பரப்பின் பரப்பளவைக் கணிப்பதெப்படி? உங்களால் அதற்கொரு முறை கூற முடியுமா எப்பகுதியும் ஒன்றிலொன்று படியாமலிருக்க வளைவான பரப்பை முற்றாகக் கடதாசியால் மூடுவோமாயின், தேவையான கடதாசியின் பரப்பளவு யாது?

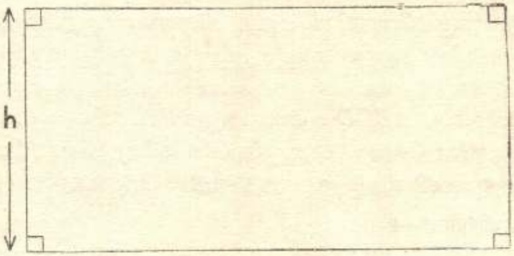
இதற்கு விடையை நீங்கள் உடனடியாகக் கூறமுடியாதிருத்தல் கூடும். பின்வருஞ் செயலை முயற்சித்தபின், விடையைக் கூறமுடியுமா எனப் பாருங்கள் :—

படி 1 : ஒரு பால்மாத் தகரத்தை மேசைமீது நிறுத்துக. அதன் உயரத்தை அளக்க. உயரத்தை h எனக் கொள்க. (உரு 5–6)

படி 2 : சீரான அகலம் h கொண்ட கடதாசித் தாள் ஒன்று வெட்டிக் கொள்க. (உரு 5–7)



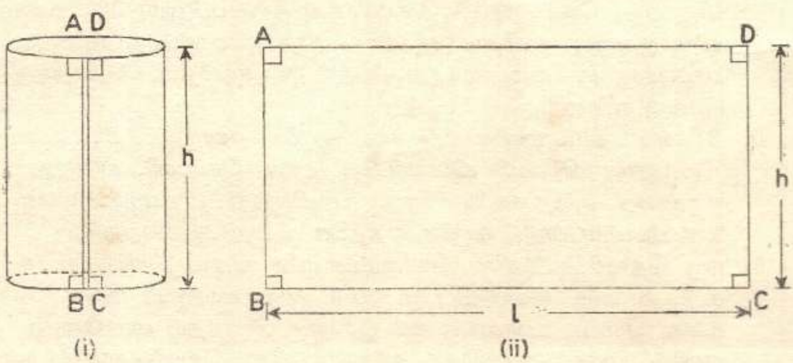
உரு 5–6



உரு 5—7

படி 3 : தகரத்தின் வளைவான பரப்பைச் சுற்றி, இறுக்கமாகக் கடதாசித் தாளைச் சுற்றுக. கடதாசியின் எந்தப் பகுதியும் ஒன்றிலொன்று படியாமல், தகரத்தை மூடத் தேவையான கடதாசித் துண்டைச் செப்பமாக வெட்டி எடுக்க. வெட்டும்பொழுது, வெட்டு நேராகவும், அடுத்துள்ள விளிம்புகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகவும் இருக்குமாறு வெட்டுக. [உரு 5–8 (i)].

படி 4 : நீங்கள் வெட்டிய கடதாசித் துண்டை உரு 5–8 (ii) இற் காட்டியதுபோல விரித்து வைக்க.



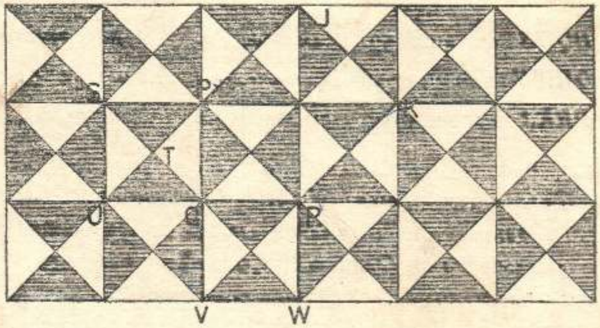
உரு 5—8

வெட்டிய கடதாசித் துண்டின் நேரான விளிம்புகள் AB, CD [உரு 5-8(i)] ஆகியனவற்றை அவதானியுங்கள். கடதாசியை விரித்த வுடன், செவ்வகம் $ABCD$ இன் எதிர்ப்பக்கச் சோடிகளுள் ஒன்றுக AB, CD ஆகியன அமைகின்றன. [உரு 5–8 (ii)]. AB இன் நீள அளவு h என்பது உங்களுக்குத் தெரியும். BC இன் நீள அளவு என்ன? ஆம், அதையும் நீங்கள் எளிதில் அளந்து அறியலாம். அதன் அளவு l என்க. தகரத்தைச் சுற்றிக் கடதாசி இருக்கும்போது, l எந்த அளவைக் குறிக்கிறது? தகரத்தின் அடிப் பரப்பின் சுற்றளவுக்குச் சமனுக அது இருப்பதை நீங்கள் அவதானித் தீர்களா? வட்டமான அடிப்பரப்பின் ஆரை r எனின், $l = 2\pi r$. எனவே, $ABCD$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= l \times h$. அதாவது, $2\pi r \times h$. ஆகவே செவ்வட்ட உருளையின் வளைந்த பரப்பின் பரப்பளவு, அடியின் சுற்றளவினதும் உயரத்தினதும் அளவுகளின் பெருக்கமாகும்.

பயிற்சி 5–4

1. செவ்வட்ட உருளை வடிவில் உள்ள எண்ணெய்த் தகரமொன் றின் உள்விட்டம் 2·8 அடி. அதன் உயரம் 3 அடி. அது அரைப் பங்கு எண்ணெயால் நிரம்பி இருக்கும் வேளை, எண் ணெயுடன் தொட்டிருக்கும் தகரத்தின் பரப்பளவு யாது?
2. ஆரை 3 அடியுள்ள மூடிய செவ்வட்ட உருளைப் பாத்திரமொன்று செய்வதற்குத் தேவையான தகரத்தின் பரப்பளவு 133·32 சது. அடி. இதில் வெட்டுக்களாலும் இணைப்புகளாலும் வீண்போன தகரம் 1% எனின், அப்பாத்திரத்தின் உயரம் என்ன?
3. செவ்வட்டவுருளைத் திண்மம் ஒன்றின் வளைந்த பரப்பின் பரப் பளவு 88 சது. அடி. அதன் உயரம் 2 அடி எனின், (i) அதன் விட்டம் யாது? (ii) அதன் முழு மேற்பரப்பளவு யாது?
4. செவ்வட்டவுருளை வடிவ நீர்த்தொட்டி ஒன்றின் வெளி விட்டம் 7 அடி. அதன் உயரம் 6 அடி. அதன் வளைந்த பரப்புகளுள் உட்புற மிருப்பது, வெளிப்புறமிருக்கும் வளைந்த பரப்பிலும் 5% அள விற் குறைவு எனின், அதன் உட்புற, வெளிப்புற வளைந்த பரப்புகளுக்கு மைபூச, சது. யார் 30 சதவீதம், மொத்தச் செலவு என்ன?
5. 3 அடி விட்டமுள்ள உருக்கு உருளை ஒன்றுல், 22 யார் நீளமுள்ள கிரிக்கட் விளையாட்டுத் தரை செப்பனிடப்படுகிறது. ஒருமுறை அத்தரையின் ஒரு புறமிருந்து மறுபுறம் வரை உருட்டப்படும்போது, உருளை எத்தனை முறை சுழல்கிறது ?
6. ஒரு தொழிற்சாலையின் செவ்வட்டவுருளை வடிவமுள்ள புகைக் கூடு, 8 அடி வெளிவிட்டமும் 63 அடி உயரமும் உள்ளது. 8 சது. யார் பரப்பளவுக்கு மை பூச, ஒரு இருத்தல் மை தேவை எனின், புகைக் கூண்டின் வளை பரப்பின் வெளிப்புறத்திற்கு மைபூச எத்தனை இருத்தல் மை தேவை?

6 பைதகரசின் தேற்றம்



உரு 6—1

ஆலயங்களிலும் பள்ளிகளிலும் சில வீடுகளிலுந் தரையிற் கற்கள் பதிக்கப்பட்டிருப்பதை நீங்கள் கண்டிருத்தல் கூடும். பதிக்கப்படுங் கற்களிலே பலவிதமான வண்ணங்களும் உருவங்களுங்கூட இருப்ப துண்டு. உரு **6–1** இலே சதுரக்கற்கள் பதித்த தரையின் ஒரு பகுதி காட்டப்பட்டுள்ளது. சதுரக்கற்கள் ஒவ்வொன்றும், அவற்றின் மூலை விட்டங்களால் நான்கு செங்கோண முக்கோணிகளாகப் பிரிக்கப் பட்டுள்ளன. இம்முக்கோணிகள் சமபரப்பளவுடையன என்பதையும், இருசமபக்க முக்கோணிகள் என்பதையும் நீங்கள் காண்பீர்கள். மேலும், ஒவ்வொரு சதுரத்திலும் இரு முக்கோணிகள், படத்திற் காட்டியவாறு நிழற்கூறிடப்பட்டுள்ளன.

இப்பொழுது, உரு **6–1** இற் காட்டப்பட்டுள்ள செங்கோண முக் கோணி PQR ஐ நோக்குக. இது, இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணியாகும். இதிலே செங்கோணம் எது என்பதைக் கூறமுடியுமா? சமபக்கங்களையும் உங்களாற் காட்ட முடியுமா? அவை எப்படிச் சமனாகும் என்பதைக் கூற இயலுமா?

இதே உருவில் மூன்று சதுரங்கள் வரையப்பட்டிருப்பதையும் நீங் கள் காண்பீர்கள். அவை முக்கோணி PQR இன் பக்கங்களான PQ, QR, RP ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் முறையே பக்கங்களாகக் கொண்டு வரையப்பட்ட சதுரங்கள். உரு **6–1** இல் PST எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ள முக்கோணியைப் பாருங்கள். பரப்பளவின் அல காக அதன் பரப்பளவைக் கொள்ளுங்கள். அப்பொழுது எத்தனை

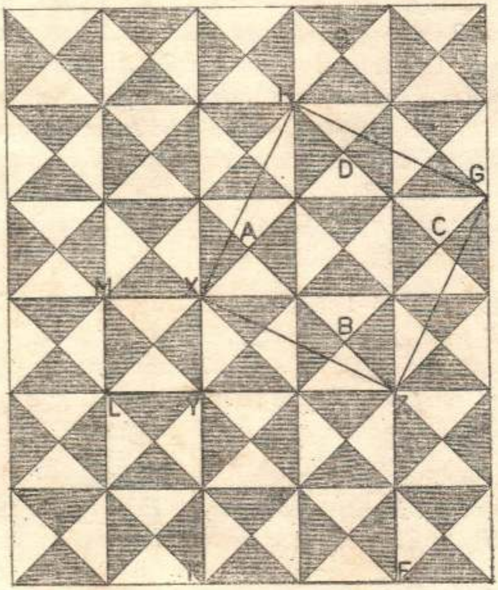
அலகுகள் சேர்ந்து சதுரம் *PQUS* உள்ளடக்கும் பரப்பளவை அமைக்கின்றன? *QRWV* என்ற சதுரம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவில் அதுபோன்ற எத்தனை அலகுகள் உள்ளன? *PRKJ* இல் எத்தனை அலகுகள் உள்ளன ? மேற்கூறிய முக்கோணி *PST* இன் பரப்பளவே, பரப்பளவையின் அலகெனக் கொண்டால் பின்வருங் கூற்றுக்களை நீங்கள் எழுதுதல் கூடும்.

சதுரம் *PQUS* உள்ளடக்கும் பரப்பளவு = 4 அலகுகள்.

சதுரம் *QRWV* உள்ளடக்கும் பரப்பளவு = ... அலகுகள்.

சதுரம் *PRKJ* உள்ளடக்கும் பரப்பளவு = ... அலகுகள்.

இனி, உரு 6–1 இற் காட்டப்பட்டுள்ள அதே அமைப்பில், வேறு அளவான செங்கோண முக்கோணிகளைத் தெரிவு செய்யுங்கள். நீங்கள் தெரிவு செய்யும் முக்கோணியின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் முறையே பக்கங்களாகக் கொண்ட சதுரங்களை வரைந்து, அவை உள்ளடக்கும் பரப்பளவை, முன்பு அலகாகக் கொண்ட அதே அலகிற் காணுங்கள். நீங்கள் தெரிவு செய்யும் முக்கோணிகள் இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோணிகள் ஆயின், இப்பரப்பளவுக் கணிப்பு இலகுவானதாக அமையும்.



உரு 6—2

இப்பொழுது, உரு 6–2 இற் காட்டப்பட்டுள்ள முக்கோணி XYZ ஐப் பாருங்கள். அது, இருசமபக்க முக்கோணியா? அதன் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் ஒரு பக்கமாகக் கொண்ட மூன்று சதுரங்களையும், அதாவது முக்கோணி XYZ இன் பக்கங்களான XY, YZ, ZX ஆகிய ஒவ்வொன்றையும் பக்கங்களாகக் கொண்ட சதுரங்கள் மூன்றையும், பிரித்தறிய உங்களால் முடியுமா? இச்சதுரங்களின் பரப்பளவுகளையும், முன்தெரிவு செய்த அதே அலகிற் கணித்தால் அவை பின்வருமாறு அமையும் :—

சதுரம் $XYLM$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு = 4 அலகுகள்

சதுரம் $YZEF$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு =... அலகுகள்

சதுரம் $XZGH$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு =... அலகுகள்

இங்கு, சதுரம் $XZGH$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவில் உள்ள அலகுகள் எத்தனை என்பதைக் கணிப்பது சற்றுச் சிரமமாக இருக்கலாம். அப்படிச் சிரமம் ஏற்படக் காரணமாக உள்ளது யாதெனக் கூற முடியுமா? அச்சிரமத்தைத் தவிர்ப்பதற்காகச் சதுரம் $XZGH$ நான்கு முக்கோணிகளாகவும், ஒரு சதுரமாகவும் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது, அதில் உள்ள சதுரம் $ABCD$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் கூறமுடியுமா? மேலும், அதிலுள்ள முக்கோணிப் பகுதிகளுள், ஒன்றுன HCG உள்ளடக்கும் பரப்பளவை எப்படிக் கணித்தல் கூடும்? $HCGS$ என்ற செவ்வகத்தைப் பூர்த்தி செய்து, HG என்ற மூலைவிட்டத்தையும் வரைக. $HCGS$ என்ற செவ்வகம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு எத்தனை அலகுகள்? HG என்ற மூலைவிட்டம், செவ்வகத்தின் பரப்பளவை இரு சம கூறிடும் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். எனவே, $\triangle HCG$ இன் பரப்பளவு என்ன? இதிலிருந்து சதுரம் $XZGH$ இன் பரப்பளவைக் கூற முடியுமா?

இதுவரை நீங்கள் பெற்ற முடிபுகளை, அட்டவணை 6–1 இற் காட்டி உள்ளதுபோல எழுதிக்கொள்க. நீங்கள் தெரிவு செய்யும் முக்கோணிகள் சிலவற்றை அடிப்படையாகக் கொண்ட விடைகளால் அட்டவணையின் கோடிட்ட இடங்களை நிரப்பிப் பார்க்க.

5—CP 9457 (70/10)

முக்கோணி	சிறிய சதுரங்கள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு (a)	(b)	பெரிய சதுரம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு (c)
(1) *PQR*	4 அலகுகள்	4 அலகுகள்	8 அலகுகள்
(2) —	—	—	—
(3) —	—	—	—
(4) *XYZ*	4 அலகுகள்	16 அலகுகள்	20 அலகுகள்
(5) —	—	—	—
(6) —	—	—	—

அட்டவணை 6—1

இப்பொழுது நீங்கள் பூர்த்தி செய்துள்ள அட்டவணை 6–1 ஐ ஆராய்ந்து பாருங்கள். நிரல்கள் (*a*), (*b*), (*c*) ஆகியவற்றில் ஒரே வரிசையிலுள்ள அளவுகளிடையே ஏதாவது பொதுவான தொடர்பு காணப்படுகின்றதா? உதாரணமாக, △ *PQR* ஐ எடுத்தால், மூன்று நிரல்களிலும் முறையே 4, 4, 8 அலகுகள் என உள்ளன. △*XYZ* ஐ எடுத்தால், அதற்கொத்த நிரல்களில் 4, 16, 20 அலகுகள் என உள்ளன. இவ்விரண்டு உதாரணங்களிலுமிருந்து, முதலாம் நிரலில் உள்ள அளவும் இரண்டாம் நிரலில் உள்ள அளவுஞ் சேர்ந்து மூன்றும் நிரலில் உள்ள அளவுக்குச் சமம் என்பது அவற்றினிடையேயுள்ள ஒரு தொடர்பாகத் தோன்றுகிறது. அதாவது,

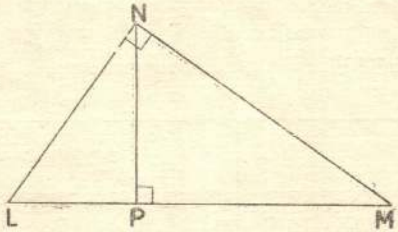
△ *PQR* ஐப் பொறுத்தளவில் 4   4   8

△ *XYZ* ஐப் பொறுத்தளவில் 4   16   20

நீங்கள் தெரிவு செய்த மற்றைய முக்கோணிகளைக் கவனித்தாலும், இதேதொடர்பு ஆங்குமுள்ளதாவெனப் பார்க்க. அப்படியானால், எல்லாச் செங்கோண முக்கோணிகளிலும் இத்தொடர்பு உள்ளதா என்ற வினு எழுகின்றது.

இத்தொடர்பு, எல்லாச் செங்கோண முக்கோணிகளிலும் பொதுவாக உண்டெனில், அதை உய்த்தறி நியாய முறைப்படி நிறுவக்கூடியதாக இருக்கும். உண்மையில், இத்தொடர்பை உய்த்தறி நியாய முறையால் நிறுவ முடியும். அதற்குப் பல முறைகள் உள்ளன. அம்முறைகளுள் ஒன்று, இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் இயல்புகளைப்

பிரயோகிப்பதாம். இயல்பொத்த முக்கோணிகள் பற்றியும் அவற்றின இயல்புகள் பற்றியும் நீங்கள் முன்பு படித்துள்ளீர்கள். பின்வரும பயிற்சியைச் செய்வதன் மூலம், இயல்பொத்த முக்கோணிகள் பற்றிய அறிவைப் புதுப்பித்தபின், தொடர்ந்து அத்தொடர்பை நிறுவ முயல்வோம்.



உரு 6—3

உரு 6–3 இற் காட்டப்பட்டுள்ள ΔLMN, N இற் செங்கோண முடையது. LM உக்குச் செங்குத்தாக NP வரையப்பட்டுள்ளது. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :—

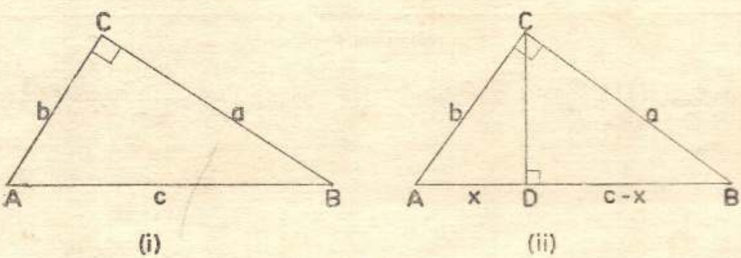
(i) Δ கள் LMN, LNP ஆகியன சமகோண முக்கோணிகள்.

(ii) Δ கள் NMP, LMN ஆகியன சமகோண முக்கோணிகள்.

(iii) Δ கள் LNP, NMP ஆகியவை சமகோண முக்கோணிகள்.

இக் கணக்கின் (i) ஆம், (ii) ஆம் பாகங்களிற் குறிப்பிடப்பட்ட முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு கோணம் செங்கோணம் எனவும், இன்னொரு கோணம் இரண்டுக்கும் பொதுவானது எனவும் நீங்கள் அவதானித்திருப்பீர்கள். எனவே, அவை சமகோணமுடையன வென நிறுவுதல் இலகுவாகும்.

இனி, முக்கியமான பகுதிக்கு வருவோம். அதுதான், முன்பு குறிப்பிட்ட தொடர்பை நிறுவுதல் ஆகும். உரு 6–4 (i) இற் காட்டியுள்ள செங்கோண ΔABC ஐ அவதானியுங்கள். அதிலே கோணம் C, செங்கோணமாகும்.



உரு 6—4

BC $= a$ அலகுகள், AC $= b$ அலகுகள், செம்பக்கம் AB $= c$ அலகுகள் எனின், $a^2 + b^2 = c^2$ (a, b, c நேரெண்கள்) என நாம் நிறுவுதல் வேண்டும்.

இதை நிறுவுதற்கு AB உக்குச் செங்குத்தாக CD ஐ வரைக. AD $= x$ அலகுகள் எனின், DB $= c - x$ அலகுகள். பின்வரும் கூற்றுக்களையும் காரணங்களையும் நீங்கள் எழுதலாம். அட்டவணை 6–2 ஐப் பூரணப்படுத்தி, முடிவை அவதானிக்க.

கூற்று	காரணம்
$\triangle ABC$, $\triangle ADC$ ஆகியவற்றில்	
1. $A\hat{C}B = \ldots = \ldots$	1. ....
2. $C\hat{A}B = C\hat{A}D =$	2. ....
3. .... = ...	3. $\triangle$ களின் மூன்றாவது கோணங்கள் சமன்
4. $\therefore \triangle$கள் ABC, ACD....	4. முன்னைய கூற்றுகளின் படி
5. $\therefore \frac{c}{b} = \frac{\ldots}{x}$	5. இயல்பொத்த $\triangle$ களில், ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம்
6. $\therefore cx = b^2$	6. ....
7. $\triangle$ கள் ABC, CBD இயல்பொத்தவை	7. $A\hat{C}B = C\hat{D}B = 90°$, $A\hat{B}C = D\hat{B}C$
8. $\therefore \frac{c}{a} = \frac{a}{c - x}$	8. இயல்பொத்த $\triangle$ கள் இரண்டில், ஒத்த பக்கங்கள் விகித சமம்
9. $c^2 - cx = a^2$	9. கூற்று (8) இன்படி
10. $c^2 - b^2 = a^2$	10. கூற்று (6) $b^2 = cx$
11. $c^2 = a^2 + b^2$	11. கூற்று (10) இன்படி

அட்டவணை 6—2

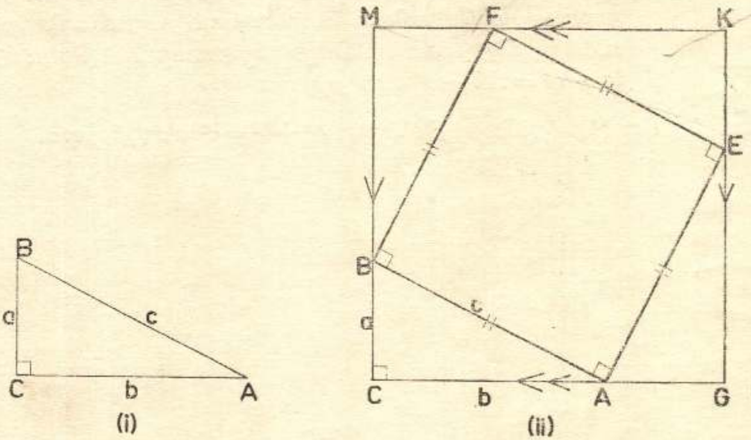
கூற்று (11) இன் படி தேவையான முடிபு பெறப்பட்டதை நீங்கள் காண்கிறீர்கள்.

அதாவது,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

என்ற முடிபை உய்த்தறி நியாய முறைப்படி நிறுவியுள்ளீர்கள்.

வேறு முறைகளிலும் இம்முடிபை நிறுவலாம் என்பதை முன்பே குறிப்பிட்டுள்ளோம். நிறுவலின் பிறிதொரு முறைக்குச் சிலகுறிப்புக்கள் இங்கு தரப்படுகின்றன. அவற்றின் உதவியுடன், நிறுவலைப் பூர்த்தியாக்கிப் பார்க்க.



உரு 6—5

முன்பு நோக்கிய ABC என்னும் அதே முக்கோணியை மீண்டும் பார்ப்போம். அது உரு 6–5 (i) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதிலே, C செங்கோணம் எனவும், AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நீள அளவுகள் முறையே c, a, b அலகுகள் எனவும் நீங்கள் அறிவீர்கள்.

நிறுவ வேண்டிய தொடர்பு என்ன ?

அது தான், ... + ... = c^2 (a, b, c நேரெண்கள்) என்பதாகும். இதை நிறுவுதற்கு, முதலிலே AB ஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்ட சதுரம் ஒன்றை வரைக. [உரு 6–5 (ii)] அது $BAEF$ எனப் பெயரிடப்பட்டுள்ளது. பின், E ஊடாக, KG ஐ BC உக்குச் சமாந்தரமாகவும், F ஊடாக MK ஐ CA உக்குச் சமாந்தரமாகவும் வரைந்து, நாற்பக்கல் $CGKM$ ஐப் பூரணப்படுத்துக. அதன்பின் பின்வரும் படிமுறைகளைத் தொடர்க :—

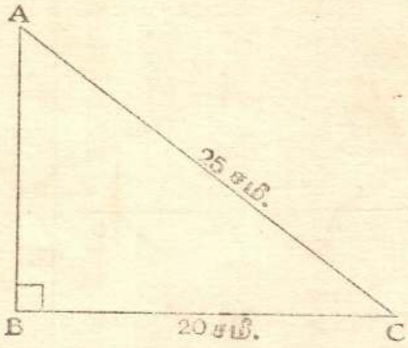
படி 1 : $\hat{G}$, $\hat{K}$, $\hat{M}$ ஆகியன செங்கோணங்கள் என நிறுவுக.

படி 2 : $\triangle$ கள் ABC, EAG, FEK, BFM ஆகியன ஒருங்கிசைவன என நிறுவுக.

படி 3 : $CGKM$ என்பது ஒரு சதுரம் எனவும் அதன் பக்கம் $(a+b)$ அலகுகள் எனவும் நிறுவுக.

படி 4 : சதுரம் $CGKM$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவானது, சதுரம் $ABFE$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவினதும் அதிலுள்ள மற்றைய நான்கு முக்கோணிகள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவினதுங் கூட்டுத் தொகை என்பதை ஆதாரமாகக் கொண்டு, $(a+b)^2=2ab+c^2$ என நிறுவுக.

படி 5 : படி (4) இற் பெற்றதிலிருந்து $a^2+b^2=c^2$ என நிறுவுக.



உரு 6–6

உதாரணம் 1

உரு 6–6 இற் காட்டியுள்ள

$\triangle ABC$ இல், $\hat{B}$ ஒரு செங்கோணம்.

$AC=25$ சமீ., $BC=20$ சமீ. AB ஐக் கணிக்க.

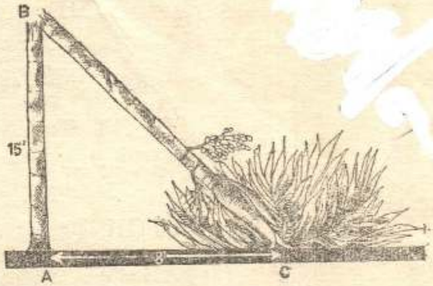
செங்கோண $\triangle ABC$ இல்,

$$AC^2=AB^2+BC^2$$
$$\therefore\ 25^2=AB^2+20^2$$
$$\therefore\ 625=AB^2+400$$
$$\therefore\ AB^2=625-400$$
$$=225$$
$$\therefore\ AB=15 \text{ சமீ.}$$

உதாரணம் 2

நிலைக்குத்தாக நிற்கும் நேரிய கமுக மரம் ஒன்று, தரையிலிருந்து 15 அடி உயரத்தில் முறிந்து, மேல் நுனி தரையில் முட்டிய

நிலையில், உரு 6–7 இற் காட்டியவாறு உள்ளது. அதன் அடியில் இருந்து, 8 அடி தூரத்தில் அதன் மேல் நுனி இப்போது இருப்பின், அம்மரத்தின் உயரமென்ன?



உரு 6–7

படத்திற் காட்டியபடி,

$$AB = 15'$$
$$AC = 8'$$
$$B\hat{A}C = 90°$$

என அறிவோம்,

எனவே, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

ஆகையால், $15^2 + 8^2 = BC^2$

$\therefore\ 225 + 64 = BC^2$

$\therefore\ 289 = BC^2$

$BC = 17$ அடி

$\therefore$ மரத்தின் உயரம் $= 15 + 17 = 32$ அடி.

பயிற்சி 6–1

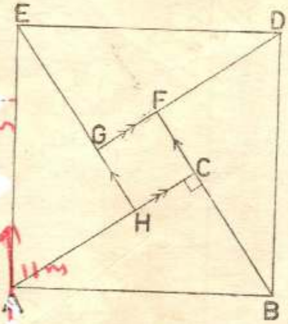
1. $\triangle XYZ$ இல், $X\hat{Y}Z = 90°$

   (அ) $XY = 15$ அங்., $YZ = 8$ அங். எனின், XZ ஐக் கணிக்க.
   (ஆ) $XY = 16$ அங்., $XZ = 20$ அங். எனின், YZ ஐக் கணிக்க.
   (இ) $YZ = 36$ சமீ., $XY = 15$ சமீ. எனின், XZ ஐக் கணிக்க.
   (ஈ) $XZ = 34$ சமீ., $XY = 30$ சமீ. எனின், YZ ஐக் கணிக்க.

2. சாய் சதுரம் ஒன்றின் மூலைவிட்டங்கள் முறையே 12 சமீ., 16 சமீ. நீளமுடையவை. அச்சாய்சதுரத்தின் சுற்றளவைக் கணிக்க.

3. ABCD ஒரு நாற்பக்கல் ஆகும். அதிலே, $AB = 4''$, $BC = 3''$, $DC = 12''$, $A\hat{B}C = A\hat{C}D = 90°$. AD இன் நீள அளவைக் கணிக்க.

4. AB என்ற நேர் கோட்டின் ஒரே பக்கத்திலே, ABDE என்ற சதுரமும், $A\hat{C}B$ என்ற செங்கோண முக்கோணியும் வரையப் பட்டுள்ளன. AC உக்குச் சமாந்தரமாக GD உம், BC உக்குச் சமாந்தரமாக HE உம் வரையப்பட்டு, உரு 6–8 இல் உள்ளது போலப் பூரணப்படுத்தப்படுகிறது.



உரு 6–8

(1) அதிலுள்ள நான்கு முக்கோணிகளும் ஒருங்கிசை முக்கோணிகள் என நிறுவுக.

(2) CFGH ஒரு சதுரம் என நிறுவுக

(3) $AB = c$ அலகுகள், $BC = a$ அலகுகள், $AC = b$ அலகுகள் எனின், $c^2 = a^2 + b^2$ என நிறுவுக.

5. தரையின் மேலே 16 அடி உயரத்திலுள்ள மரக்கிளை ஒன்றிலிருந்து, 13 அடி நீளமான ஊஞ்சல் ஒன்று தொங்குகிறது. ஊஞ்சலாடும் பையன் ஒருவன், தரையில் இருந்து 11 அடி உயரம் ஊஞ்சலிற் செல்லுகையில், ஓய்வு நிலையில் உள்ள நிலையத்திலிருந்து ஊஞ்சல் எத்தனை அடி முன் சென்றிருக்கும் எனக் கணிக்க.

6. 4 அடி நீளமும் 3 அடி அகலமும் உள்ள செவ்வகப் பெட்டி ஒன்றின் உயரம் 6 அடி 8 அங். அதன் உள்ளே முற்றாக வைக்கப் படக் கூடிய நேரான கோல் ஒன்றின் மிகக் கூடிய நீளமென்ன ?

7. செங்கோண முக்கோணி ஒன்று வரைக. அதன் செம்பக்கம் மற்றைய இரு பக்கங்கள் ஆகியன முறையே a, b, c அலகுகள் நீள அளவுடையன எனக் கொள்க. அதன் மூன்று பக்கங்களையும் முறையே விட்டங்களாகக் கொண்ட அரை வட்டங்களை, முக்கோணியின் வெளிப்புறத்தே வரைக அதன் அடிப்படையில் பின்வருவனவற்றுக்கு விடை எழுதுக :–

(i) செம்பக்கத்தை விட்டமாகக் கொண்ட அரை வட்டத்தின் பரப்பளவு.

(ii) இரு குறுகிய பக்கங்களையும் விட்டங்களாகக் கொண்ட அரை வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் பரப்பளவுகள்.

(iii) இரு குறுகிய பக்கங்களையும் விட்டங்களாகக் கொண்ட அரை வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத் தொகை.

(iv) $a^2 = b^2 + c^2$ எனக் கொண்டு, மேற்கூறிய மூன்று அரை வட்டங்களின் பரப்பளவுகளின் இடையேயும் நீங்கள் காணக்கூடிய தொடர்பு யாதுமிருப்பின், அதைக் கூறுக.

8. XYZ எனும் முக்கோணியில், Y ஒரு செங்கோணமாகும். L, XY இன் நடுப்புள்ளி, M, YZ இன் நடுப்புள்ளி எனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $XZ^2 = 4\,LM^2$.

(ii) $XM^2 + LZ^2 = 5\,LM^2$

9. ABCD ஒரு சாய்சதுரமாகும். அதன் மூலை விட்டங்கள் O இற் சந்திக்கின்றன.

(i) AC^2 இன் பெறுமானத்தை OC இல் எழுதுக.

(ii) BD^2 இன் பெறுமானத்தை OD இல் எழுதுக.

(iii) $AC^2 + BD^2 = 4\,AB^2$ என நிறுவுக.

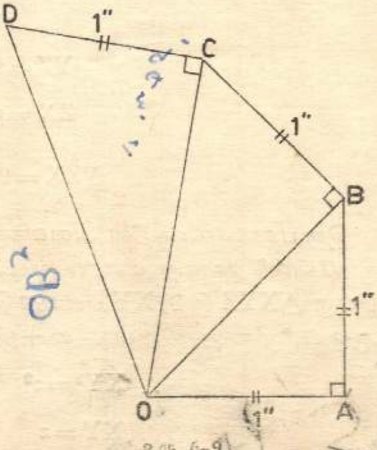
10. உரு 6–9 இல், OAB ஒரு செங்கோண முக்கோணியாகும். அதில் $OA = AB = 1''$, $\hat{A} = 90°$. முக்கோணிகள் OBC, OCD ஆகியன $BC = CD = 1''$ ஆகவும், $O\hat{B}C = O\hat{C}D = 90°$ ஆகவும் இருக்கக் கூடியதாக வரையப்படுகின்றன. பின்வருவனவற்றைக் கணிக்க :—

(i) OB^2 (ii) OC^2

(iii) OD^2 (iv) OD

செங்கோண முக்கோணி ஒன்றிலே, செங்கோணத்தைக் கொண்டுள்ள பக்கங்களின் நீள அளவுகள் a, b அலகுகள் எனவும், செம்பக்கத்தின் நீள அளவு c அலகுகள் எனவுங் கொண்டால், (a, b, c நேரெண்கள்)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

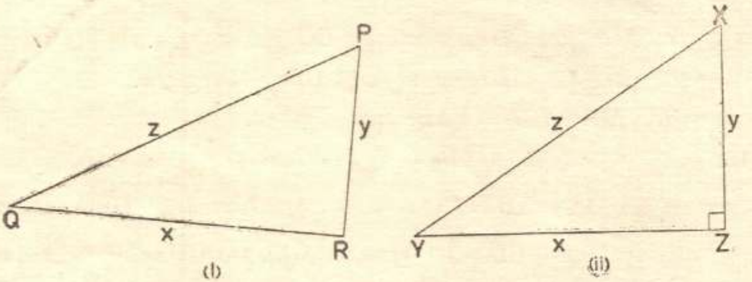


உரு 6–9

என நீங்கள் அறிந்துள்ளீர்கள். இனி, பிறிதொரு முக்கோணியிலே பக்கங்களின் நீள அளவுகள் முறையே x, y, z அலகுகளெனவும்,

x, y, z நேரெண்கள்) அதில் $x^2+y^2=z^2$ எனவுந் தரப்பட்டால் அம்முக்கோணியுஞ் செங்கோண முக்கோணியாகுமா ? அதாவது, தரப்பட்ட ஒரு முக்கோணியான PQR இல், $QR=x$ அலகுகள், $RP=y$ அலகுகள், $PQ=z$ அலகுகள் எனவும், $x^2+y^2=z^2$ எனவுந் தெரிந்து கொண்டால், z அலகுகள் நீள அளவுள்ள பக்கத்துக்கு எதிராகவுள்ள கோணம் செங்கோணமாகுமா என அறிதற்கு முயல்வோம்.

இம்முக்கோணி PQR உரு 6–10 (i) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது. நாம் இப்பொழுது இன்னொரு முக்கோணி XYZ ஐ வரைவோம். உரு 6–10 (ii) இற் காட்டப்பட்டுள்ளது போல, $\triangle XYZ$ இல்



உரு 6–10

$$YZ = x \text{ அலகுகள்}$$

$$ZX = y \text{ அலகுகள்}$$

$$Y\hat{Z}X = 90^\circ$$

இரு பக்கங்களின் நீள அளவுகளும் அடைகோணமும் தரப்பட்டால், முக்கோணி ஒன்றை வரைய முடியும் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். இங்கு $\triangle XYZ$ இல், XY என்பது செம்பக்கமாகையால், $XY^2=x^2+y^2$. ஆனால், முன் தரவின்படி $x^2+y^2=z^2$

$$\therefore XY^2 = z^2$$

$$\therefore XY = z$$

இப்பொழுது, பின்வரும் அட்டவணை 6–3 ஐப் பூரணப்படுத்தி, முடிவை நோக்குக.

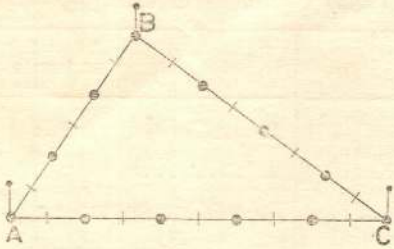
தரப்பட்ட $\triangle$ PQR இலும், நாம் வரைந்துள்ள $\triangle$ XYZ இலும்

கூற்று	காரணம்
1. QR = YZ	1. ஒவ்வொன்றும் x அலகுகள்
2. PR = ...	2. . . . .
3. . . . . . . = ...	3. ஒவ்வொன்றும் z அலகுகள் என நிறுவப்பட்டது.
4. $\triangle PQR \equiv \triangle$	4. ஒருங்கிசைவின் ப.ப.ப. விதி.
5. $Q\hat{R}P$ = ...	5. ஒருங்கிசை $\triangle$ களின் ஒத்த கோணங்கள்
6. $Y\hat{Z}X = 90°$	6. . . . .
7. . . . . . . $= 90°$	7. . . . . .

அட்டவணை 6

அட்டவணை 6–3 இன் (7) ஆவது கூற்றை அவ[illegible]ானியுங்கள். அதன்படி நாம் நிறுவியுள்ளது யாது ? $Q\hat{R}P$ ஒரு செங்கோணம் எனக் காட்டியுள்ளோம். ஆகவே, $\triangle$PQR இல், PQ எனும் பக்கத்துக்கு எதிராக உள்ள கோணமாகிய QRP ஒரு செங்கோணம். தரவின்படி, $\triangle$PQR இல் $PQ^2 = QR^2 + RP^2$ அல்லவா ? எனவே, யாதுமொரு முக்கோணியில் பக்கங்கள் முறையே x, y, z அலகுகள் நீள அளவுடையன எனவும், (x, y, z – நேரெண்கள்) அதில் $z^2 = x^2 + y^2$ எனவுந் தரப்படின், அம்முக்கோணி செங்கோண முக்கோணி என்பதும், z அலகுகள் நீள அளவுடைய பக்கத்திற்கு எதிராக உள்ள கோணம் செங்கோணம் ஆகும் என்பதும் நாம் அறியக் கூடிய இயல்புகளாம்.

இறுதியாக, இச்செங்கோண முக்கோணிகள் பற்றிய சரித்திரப் பின்னணியையுஞ் சிறிது அறிதல் சுவையுள்ளதாகும். செங்கோண முக்கோணிகளின் பக்கங்களுக்கிடையிலான தொடர்பை அறியுமுன்பே, புராதன எகிப்தியர்கள் செங்கோணங்களை அமைத்திருப்பதாகத் தெரிகிறது. சம இடைத்தூரத்தில் பதின்மூன்று முடிச்சுகளிட்ட கயிறு ஒன்றைப் பிரயோகித்து அவர்கள் கோணத்தை அமைத்தனர் என்று கூறப்படுகிறது. மூன்று கட்டைகளின் உதவியுடன், அக்கயிறு முக்கோணி வடிவில் இறுக்கமாகக் கட்டப்பட்டதென்பர். உரு 6–11 அவ்வமைப்பைக் காட்டுகிறது. முதலாவது முடிச்சும் கடைசி முடிச்சும் ஒரே கட்டையிற் பொருத்தப்பட்டன. கட்டைகளின் நிலையங்களை A, B, C ஆகியன குறிக்கின்றன எனக் கொண்டால், AC இற்கு



உரு 6-11

எதிராக உள்ள கோணம் B யையே செங்கோணமென அவர்கள் அறிந்திருந்தனராம். AB, BC, CA ஆகிய பக்கங்களின் நீள அளவுகள் முறையே 3 : 4 : 5 என்ற விகிதத்தில் அமையின், அவற்றுள் இரு குறுகிய அளவுகளுடைய பக்கங்களுங் கொண்டுள்ள கோணம் செங்கோணமாகும் எனப் புராதன எகிப்தியர்கள் அறிந்திருந்தனர் போலத் தோன்றுகிறது.

எகிப்தியர் மட்டுமல்ல ; இந்தியர்களும் இத்தகைய இயல்பொன்றை முற்காலத்திலேயே அறிந்திருந்தனர் போலும். செங்கோண முக்கோணியின் பக்கங்களின் நீள அளவுகளின் விகிதமாக 3 : 4 : 5 மட்டுமல்ல ; அதன் மடங்குகளும் ; மற்றும் 5 : 12 : 13 ; 8 : 15 : 17 ; 12 : 35 : 37 போன்ற வேறு விகிதங்களும் அவற்றின் மடங்குகளும் உள என்பதையும், அன்று இந்தியர்கள் தெரிந்து பயன்படுத்தியதாக அறியமுடிகிறது. ஆயினும், எகிப்தியர்களோ இந்தியர்களோ இவ்வளவுகளுக்கிடையிலான தொடர்பென்ன என்பதை அறிந்திருந்தனரா இல்லையாவென நாம் உறுதியாகக் கூறமுடியாது. அதாவது, செம்பக்கத்தை ஒருபக்கமாகக் கொண்ட சதுரம் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு, மற்றைய இரு பக்கங்களையும், பக்கங்களாகக் கொண்ட சதுரங்கள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவுகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனாகும் என்பதை அவர்கள் அறிந்திருந்ததாகத் தெரியவில்லை.

செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் பக்கமாகக்கொண்டு வரையப்படுஞ் சதுரங்களின் பரப்பளவுகளுக்கிடையிலான தொடர்பைக்கண்டறிந்து நிறுவிய பெருமை கிரேக்க கணித மேதையான பைதகரசுக்கே உண்டு. கி.மு. 6 ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த பைதகரசின் பெயர், இது தொடர்பாக இன்றும் வாழ்கிறது.

பயிற்சி 6—2

1. பின்வருந் தொடைகளுள், எவை செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் மூன்று பக்கங்களாக அமையுமெனக் காண்க. ஓர் உதாரணம் செய்து காட்டப்பட்டுள்ளது.

(i) $\{2, 4, 5\}$

இவற்றுள் நீள அளவு மிகக் கூடிய பக்கத்தில் வரையப்படுஞ் சதுரத்தின் பரப்பளவு $= 5^2 = 25$ அலகுகள்.

$$2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$$

$\therefore (2^2 + 4^2)$ இன் பெறுமானம் 5^2 இன் பெறுமானத்துக்குச் சமனன்று.

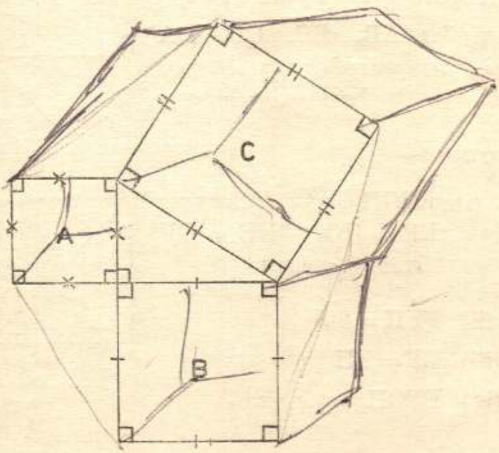
$\therefore$ $\{2, 4, 5\}$ என்ற தொடை, செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் பக்கங்களின் நீள அளவுகள் ஆகா.

(ii) $\{6, 8, 10\}$ (iii) $\{8, 12, 16\}$

(iv) $\{10, 24, 26\}$ (v) $\{15, 20, 25\}$

(vi) $\{8, 16, 17\}$ (vii) $\{12, 18, 23\}$

2. A, B, C என்ற மூன்று சதுரங்கள் உள்ளன. அவை ஒன்வொன்றினதும் ஒவ்வொரு பக்கம் சேர்ந்து, செங்கோண முக்கோணி ஒன்றை அமைக்கக் கூடியதாக உரு 6—12 இற் காட்டியவாறு வைக்கப்படுகின்றன. இந்த நிபந்தனைக் கமைய, பின்வரும் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக.



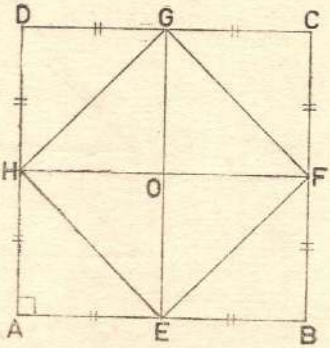
உரு 6–12

சதுரங்கள் உள்ளடக்கும் பரப்பளவு		
A	B	C
10 சது. அங்.	15 சது. அங்.	....
23 சது. அங்.	....	64 சது. அங்.
....	11 சது. அங்.	103 சது. அங்.
a சது. அங்.	b சது. அங்.	....

அட்டவணை 6- 4

3. 25 சது. அங்., 16 சது. அங். பரப்பளவுகளுள்ள இரு சதுரங்கள் தரப்படுகின்றன. இவை இரண்டுடனும், வேறொரு சதுரத்தைப் பயன்படுத்தி ஒவ்வொன்றினதும் ஒரு பக்கஞ் சேர்ந்து செங்கோண முக்கோணி ஒன்றை அமைக்கக்கூடியதாக இருவேறு முறைகளில் ஒழுங்குபடுத்தல் வேண்டும். இரு சந்தர்ப்பங்களிலும், மூன்றுஞ் சதுரத்தின் பரப்பளவு யாதாக அமைதல் வேண்டுமெனக் காண்க.

4. ABCD ஒரு சதுரம் ஆகும். E, F, G, H என்பன முறையே AB, BC, CD, DA ஆகிய பக்கங்களின் நடுப்புள்ளிகள். பின்வருவனவற்றை நிறுவுக :—



உரு 6–13

(i) EFGH ஓர் இணைகரம் (EF = HG, HE = GF என நிறுவுக.)

(ii) $F\hat{E}H = 90°$

(iii) EF = EH

(iv) EFGH ஒரு சதுரம்.

(v) EFGH இன் பரப்பளவு $= \frac{1}{2} \times$ ABCD இன் பரப்பளவு.

7 திரிகோணகணித விகிதங்கள்

இயல்பொத்த முக்கோணிகள் பற்றியும் அவற்றின் இயல்புகள் சில வற்றைப் பற்றியும் முன்பு நீங்கள் படித்துள்ளீர்கள். இயல்பொத்த முக்கோணிகளினது ஒத்த பக்கங்களின் நீள அளவுகள் விகிதசமமென நீங்கள் அறிவீர்கள். அளவிடைவரைவுகளுக்கும் மற்றும் பைதகரசின் தேற்றத்தை நிறுவுதற்கும் இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் இயல்பு களைப் பயன்படுத்தினோம். நீங்கள் முன்னர் கற்ற விடயங்களை மீட்கும் நோக்கமாகப் பின்வரும் பயிற்சி அமைந்துள்ளது. மேலும், பல புது விடயங்களை விருத்தியாக்குதற்கும் இப்பயிற்சி உதவியாகவிருக்கும்.

பயிற்சி 7–1

1. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ ஆகியவற்றில் $\hat{A}=\hat{A}_1$, $\hat{B}=\hat{B}_1$ ஆயின், பின்வரும் இடைவெளிகளை நிரப்புக.

   (i) $AB : AC : \ldots\ldots = A_1B_1 : \ldots\ldots : B_1C_1$

   (ii) $AB : A_1B_1 = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

   (iii) $\dfrac{AB}{AC} = \ldots\ldots\ldots$ (iv) $\dfrac{AC}{BC} = \ldots\ldots\ldots$

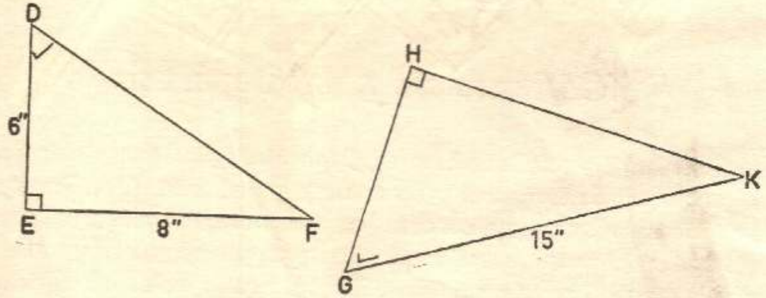
   (v) $\dfrac{AB}{BC} = \ldots\ldots\ldots$

2. $\triangle PQR$, $\triangle P_1Q_1R_1$ இயல்பொத்த முக்கோணிகள். $PQ : P_1Q_1 = 2 : 3$; $PQ = 3$ அங்., $QR = 4$ அங். ஆயின், P_1Q_1, Q_1R_1 என்பனவற்றின் நீள அளவுகளைக் காண்க.

3. $\triangle KLM$, $\triangle XYZ$ என்பனவற்றில் $\hat{K}=\hat{X}$, $\hat{L}=\hat{Y}$, $\dfrac{KL}{LM}=\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{LM}{KM}=\dfrac{4}{5}$ ஆயின், (i) $\dfrac{XY}{YZ}$, $\dfrac{YZ}{XZ}$ ஆகியவற்றைக் காண்க. (ii) $KL = 6$ அங். எனக் கொண்டு LM, KM ஆகியவற்றின் நீள அளவுகளைக் காண்க. (iii) $XZ = 15$ அங். எனக் கொண்டு, XY, YZ ஆகியவற்றின் நீள அளவுகளைக் காண்க.

4. முக்கோணி வடிவுள்ள பூம்பாத்தி ஒன்றினது அளவிடை வரைவின் பக்கங்களினது நீள அளவுகள் 1·8", 3·0", 2·5" எனக் காட்டப்பட்டுள்ளன. 1 அங்குலம் 10 அடியைக் குறிக்கின், அப்பூம்பாத்தியின் மிக நீண்ட பக்கத்தின் நீள அளவு என்ன? அதன் சுற்றளவு என்ன?

5.



உரு 7–1

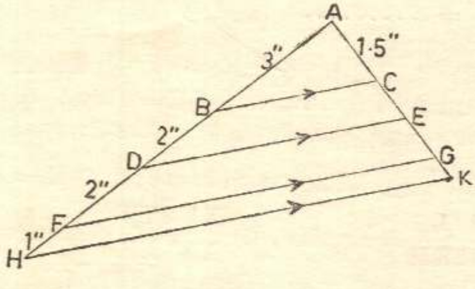
(i) $\triangle$ **DEF** உம், $\triangle$ **GHK** உம் இயல்பொத்தனவா ?

(ii) $\triangle$ **DEF** இல், **DF** இன் நீள அளவைக் காண்க.

(iii) **DF : GK** ஐக் கணிக்க.

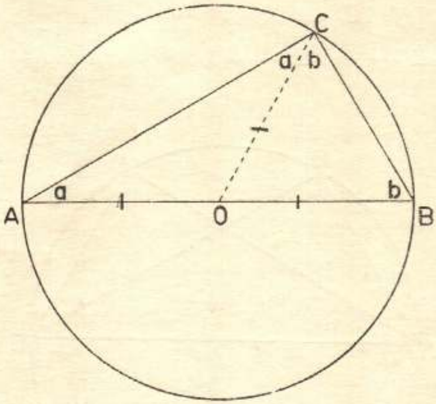
(iv) **GH, HK** ஆகியவற்றின் நீள அளவுகளைக் காண்க.

6. உரு 7–2 இலுள்ள இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் தொடையைக் கூறுக. AB : AC என்பதற்குச் சமனான விகிதங்களை எழுதுக. (i) EG (ii) GK (iii) KC என்பனவற்றின் நீள அளவுகளைக் காண்க.



உரு 7–2

7. உரு 7–3 இல் AOB, O வை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். C வட்டத்தின் எதாவதொரு புள்ளி ஆயின், அட்டவணை 7–1 இலுள்ள இடை வெளிகளை நிரப்புதல் மூலம் அரைவட்டத்தில் அமையுங் கோணம் செங்கோணமென நிறுவுக.

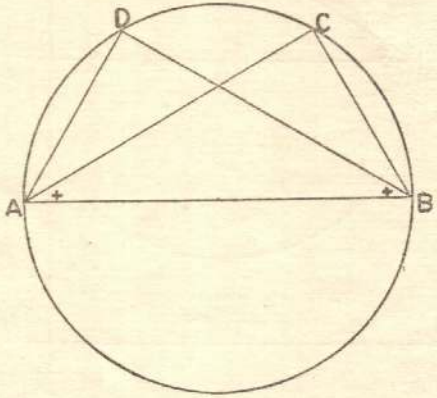


உரு 7–3

கூற்று	காரணம்
$\triangle$ AOC இல்	
1. $OA = OC$	1. வட்டத்தின் ஆரைகள்
2. $A\hat{C}O = \ldots\ldots = a$ அலகுகள்	2. ....
$\triangle$ BOC இல்	
3. $OB = \ldots\ldots\ldots$	3. ....
4. $B\hat{C}O = \ldots\ldots = b$ அலகுகள்	4. $\triangle$ இன் சம பக்கங்களுக்கு எதிராகவுள்ள கோணங்கள்
5. $A\hat{C}O + B\hat{C}O = \ldots + \ldots = (a+b)\ldots$ அலகுகள்	5. ....
6. $O\hat{A}C + \ldots\ldots + \ldots + \ldots\ldots = 2(a+b) = 180°$	6. ....
7. $\therefore A\hat{C}O + B\hat{C}O = 90°$	7. ....
8. $A\hat{C}B = 90°$	8. ....

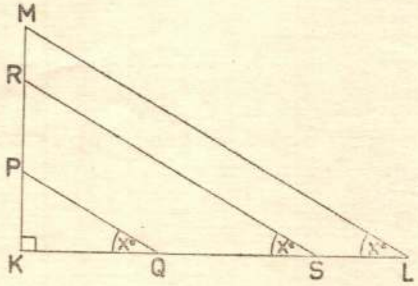
அட்டவணை 7–1

8. உரு 7-4 இல் AB வட்டத்தின் ஒரு விட்டமாகும். CAB = DBA ஆயின், △ ADB, △ BCA இயல்பொத்த முக்கோணிகளென நிறுவுக.



உரு 7-4

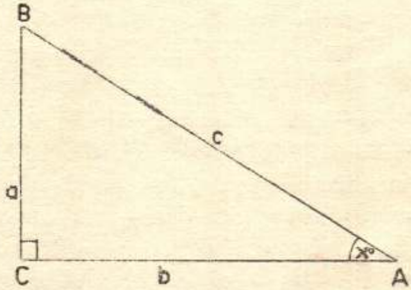
கோணமொன்றின் சைன்



உரு 7-5

மேலேயுள்ள உருவை நோக்குக. அதில் மூன்று செங்கோண முக்கோணிகளைக் கொண்ட தொடை ஒன்றைக் காண்கிறீர்கள். அம் மூன்று முக்கோணிகளினதும் கோணங்களைப் பற்றி என்ன கூற முடியும்? △ PKQ, △ RKS, △ MKL ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று இயல்பொத்தனவென அறிவீர்கள். இயல்பொத்த முக்கோணிகளினது ஒத்த பக்கங்களின் நீள அளவுகள் விகித சமமெனவும் அறிவீர்கள்.

$\frac{KP}{PQ}$ இற்குச் சமனான விகிதங்கள் எனவ ? $\frac{KP}{PQ}=\frac{KR}{RS}=\frac{KM}{ML}$ என் பதும் உங்களுக்குத் தெரியும். $\triangle PKQ$, $\triangle RKS$, $\triangle MKL$, என்பன வற்றில் KP, KR, KM என்னும் பக்கங்கள் முறையே $K\hat{Q}P$, $K\hat{S}R$ $K\hat{L}M$ எனும் கோணங்களுக்கு எதிராகவுள்ள பக்கங்கள் என்பதை நீங்கள் அவதானித்திருப்பீர்கள். $K\hat{Q}P$, $K\hat{S}R$, $K\hat{L}M$ ஆகிய கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் அளவை $x°$ எனக் கொள்வோம். (இங்கு $x>0$, $x<90$) PQ, RS, ML எனும் பக்கங்களை நோக்கினல், அவை முறையே மேற்குறிப்பிட்ட மூன்று முக்கோணி களினது செங்கோணங்களுக்கு எதிராகவுள்ள பக்கங்களாகுமென அறிவீர்கள். $\hat{C}=90°$, $\hat{A}=x°$ (இங்கு $0<x<90$) ஆக அமையும் வண்ணம் ACB என்னும் செங்கோண முக்கோணி ஒன்று வரைந் தால், $\frac{BC}{AB}$ என்னும் விகிதம் $\frac{KP}{PQ}$ என்பதற்குச் சமனுக அமையுமா ?



உரு 7–6

ஒரு கோணம் 90° ஆகவும், இன்னென்று $x°$ ஆகவும் அமையத் தக்கதாக எத்தனை முக்கோணிகள் வரைந்தாலும், அவை எல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று இயல்பொத்தனவாக அமையுமென அறிவீர்கள். அத்துடன் உரு 7–6 இலுள்ள செங்கோண முக்கோணி ABC இல், AB செம்பக்கமெனவும், BC, $\hat{A}$ இற்கு எதிராகவுள்ள பக்க மெனவும் அறிவீர்கள். மூன்றும் பக்கம் AC, $\hat{A}$ ஐ **அடுத்துள்ள பக்கம்** எனக் குறிப்பிடப்படும். அதே முக்கோணியில் $\hat{B}$ ஐ அடுத் துள்ள பக்கம் எது ? செம்பக்கம் AB, செங்கோணம் C இற்கு எதிராகவுள்ள பக்கமாகும். BC, AC ஆகிய இரண்டும் $\hat{C}$ ஐ

அமைக்கும் பக்கங்களெனப் பொதுவாகக் குறிப்பிடப்படும். இவ்வியல் பொத்த முக்கோணிகளில் x° அளவுள்ள கோணத்திற்கு எதிராக வுள்ள பக்கத்தினது நீள அளவினதும், செம்பக்கத்தின் நீள அளவினதும் விகிதம் ஓர் ஒருமையாகும். இந்த விகிதம் x° இன் **சைன்** எனப்படும். எனவே, உரு 7–6 இலுள்ள செங்கோண முக்கோணி ACB இல், x° இன் சைன் $\frac{a}{c}$ ஆகும். பொதுவாக x° இன் சைன் என்பது, சைன் x° எனக் குறிப்பிடப்படும். "சைன் x°" ஐச் சுருக்கமாக "சை x°" எனவுங் குறிப்பிடுவர். அதாவது சைன் $x^\circ = \frac{a}{c}$. எந்தவொரு செங்கோண முக்கோணியிலும், அதன் கூர்ங் கோணமொன்றினது அளவின் சைன்

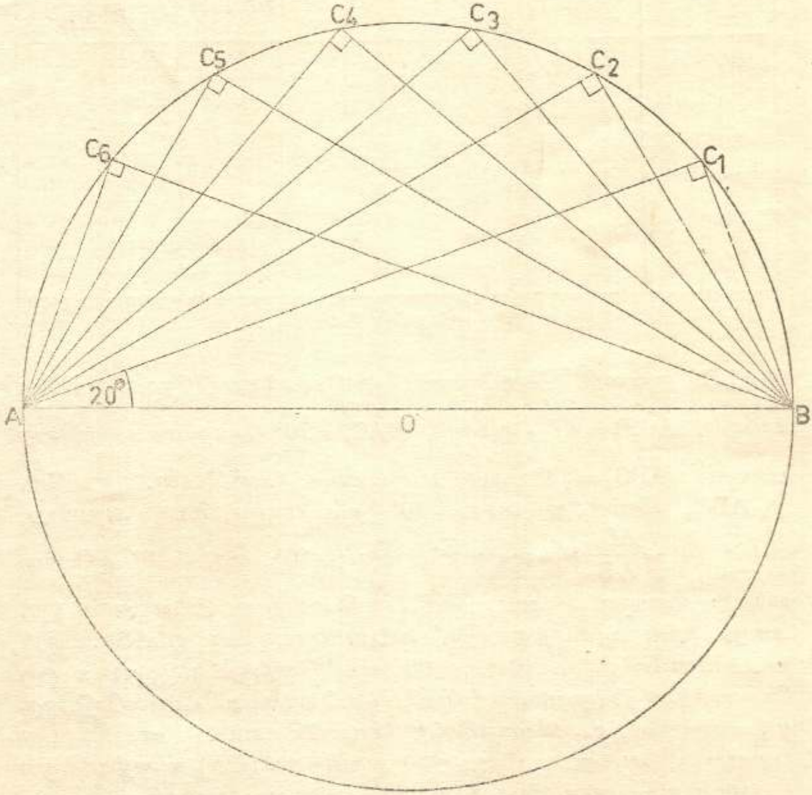
$$= \frac{\text{அக்கோணத்திற்கு எதிராகவுள்ள பக்கத்தின் நீள அளவு}}{\text{செம்பக்கத்தின் நீள அளவு}}$$

இந்த விகிதத்தைப் பற்றி மேலுஞ் சில விடயங்கள் அறிதற்கு முயல்வோம். எத்துணை பெரிய செங்கோண முக்கோணியை நாம் தேர்ந்தாலும், ஒரு குறித்த அளவுள்ள கோணத்தின் சைன் ஒருமை விகிதமொன்றாக அமையுமென்பது உரு 7–5 இலுள்ள முக்கோணிகளிலிருந்து நன்கு தெளிவாகிறது.

இனி, x இன் பெறுமானம் $(o < x < 90)$ அதிகரிக்கும்போது, சைன் x° எவ்வாறு மாற்றமடைகிறதெனப் பார்ப்போம். இதற்கு x இன் பெறுமானங்கள் வேறுபடும் வண்ணம், செங்கோண முக்கோணிகள் வரைதல் உதவியாகும். பயிற்சி 7–1 இன் வினா 7 இலிருந்து, அரை வட்டத்தில் அமையுங் கோணம், செங்கோண மென அறிந்திருப்பீர்கள். ஆகவே, இவ்வியல்பைச் செங்கோண முக்கோணிகள் வரைதற்குப் பயன்படுத்துவோம்.

உரு 7–7 இல் AB உடன் 20° அமைக்கும் வகையில் AC_1, வரையப்பட்டுள்ளது. அதே போன்று AC_2, AC_3 ஆகியன AB உடன் 30° ; 40°, ... ஆகிய கோணங்களை அமைக்கின்றன. C_1, C_2, C_3 ஆகிய ஒவ்வொன்றிலும் அமையுங் கோணம் 90° என நீங்கள் அறிவீர்கள். இத்தகைய உருவொன்றை, உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத் தில் வரைக. முதலிலே 5 சமீ. ஆரையுடைய வட்டமொன்று வரைக. அடுத்து, அதன் விட்டமொன்றை வரைந்து AB எனப் பெயரிடுக. உரு 7–7 இற் காட்டியது போன்று, AB உடன் 20°, 30°, 40°, ... ஆகிய கோண அளவுகளை அமைக்கும் AC_1, AC_2, AC_3 ஆகிய நாண்களை வரைக. BC_1, BC_2, BC_3 ஆகியவற்றை இணைத்தபின் அவற்றின் நீளங்களை அளக்க. இவ்வளவுகளை அட்டவணை 7–2 இன்

மூன்றும் நிரலில் எழுதுக. AC_1, AC_2, AC_3 ஆகியவற்றின் நீளங்களை யும் அளந்து 4 ஆம் நிரலில் எழுதுக. நீங்கள் வரைந்த உருவைப் பயன்படுத்தி அட்டவணை 7–2 ஐப் பூர்த்தியாக்குக. இந்நூலிலே தரப்பட்டுள்ள உரு 7–7 ஐப் பயன்படுத்தியும் அட்டவணை 7–2 போன்ற ஓர் அட்டவணையைப் பூரணப்படுத்துக. இவ்விரு அட்ட வணைகளையும் ஒப்பிடுக.



உரு 7–7

$0 < x < 90$ ஆக அமையும்பொழுது, $x°$ இன் பெறுமானத் தொடை யையும் அதற்குரிய சைன் $x°$ ஐயும் நோக்குக. $x°$ இற்கும் சைன் $x°$ இற்கும் உள்ள தொடர்பை, வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாக நாம் எழுதலாம். அங்கு முதற்கூறு பாகையில், கோணத்தினது அளவாகவும், இரண்டாங்கூறு அதற்குரிய சைன்

ஆகவும் அமையும். நாம் கூர்ங்கோணங்களையே நோக்குகிறோ மாகையால், மேற்படி வரிசைப்பட்ட சோடிகளைப் பின்வருமாறு எழுத லாம் :

$$\{(x,y) : y = \text{சைன் } x^\circ, \quad o < x < 90\}$$

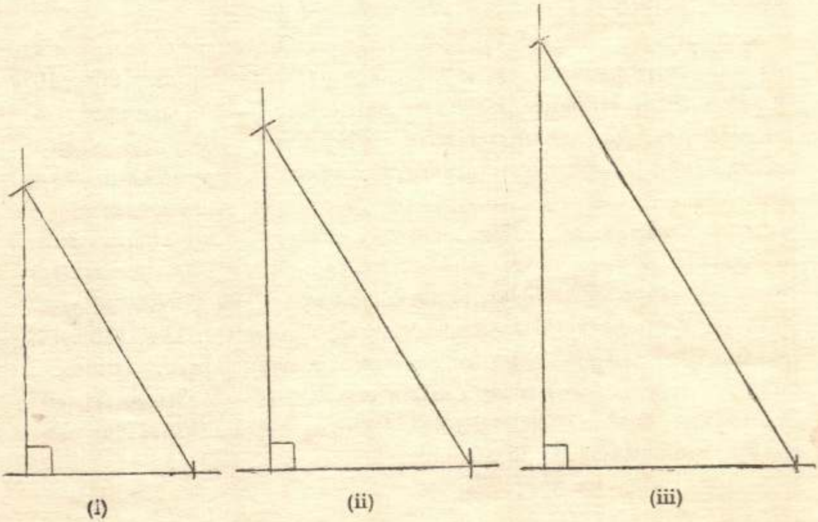
கோணம் x°	AB (சமீ.)	BC (சமீ.)	AC (சமீ.)	(சைன் x°) $= \frac{BC}{AB}$
20°				
30°				
40°				
50°				
60°				
70°				

அட்டவணை 7–2

ABC என்னும் செங்கோண முக்கோணியை நோக்கினீர்களே யானால், $A\hat{C}_6B = 90^\circ$ ஆகவும், $B\hat{A}C_6 = 70^\circ$ ஆகவும் அமைகின்ற படியால் $A\hat{B}C_6 = 20^\circ$ ஆக அமைவதை அறிவீர்கள். எனவே, $\triangle ABC_6$ இலிருந்து சைன் 20° ஐக் காணலாம். அதாவது, சைன் $20^\circ = \frac{AC_6}{AB}$ இவ்வண்ணமே சைன் 30°, சைன் 40° ஆகியவற் றையுங் காணலாம். அட்டவணை 7–2 போன்ற ஒன்றினை அமைத்து, அதை முன் அமைத்த இரு அட்டவணைகளுடன் ஒப்பிடுக. இவ் வட்டவணையிலிருந்து, ($0 < x < 90$ ஆக இருக்கும்பொழுது) x ஒரு கோணத்தின் அளவைக்குறிக்கின், ஒவ்வொரு x உம் ஒரேயொரு y (= சைன் x°) உடன் மாத்திரமே சோடி சேர்க்கப்பட்டுள்ளது என்பது புலனாகும். அத்துடன் ($0 < x < 90$ ஆகவிருக்கையில்) x அதிகரிக்கும் பொழுது, y(= சைன் x°) உம் அதிகரிப்பதை அவதானித்திருப்பீர்கள்.

இனி, தரப்பட்ட விகிதமொன்று எத்தனை கூர்ங்கோணங் களுடன் சோடி சேர்க்கப்படலாமென நாம் ஆராய்வோம். 0·5 ஐத் தனது சைன் ஆகக் கொண்ட கோணமொன்றை முதலில் நோக்கு வோம். $0{\cdot}5 = \frac{1}{2} = \frac{1{\cdot}2}{2{\cdot}4} = \frac{1{\cdot}5}{3{\cdot}0}$ எனுஞ் சமத்துவம், நாம் அறிந்த ஒன்றே. இப்பின்னமொன்றின் தொகுதி எண்ணை, காணவேண்டிய கோணத்திற்கு எதிராகவுள்ள பக்கத்தின் நீள அளவாகவும், பகுதி

யெண்ணைச் செம்பக்கத்தின் நீள அளவாகவுங் கொண்டுசெங்கோண முக்கோணி வரையலாம். இவ்வாறு ஒவ்வொரு பின்னத்திற்குஞ் செங்கோண முக்கோணிகள் வரையலாம். சதம மீற்றரை அலகாகக் கொண்டு $\frac{3}{6}$, $\frac{3\cdot5}{7}$, $\frac{4}{8}$ போன்ற சமவலுப் பின்னங்களுக்குரிய செங்கோண முக்கோணிகளை உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகங்களில் வரைக. உரு 7–8, $\frac{1}{2}$ இற்குரிய செங்கோண முக்கோணிகளின் தொடையொன்றைக் காட்டுகிறது.



உரு 7–8

உரு 7–8 இலுள்ள முக்கோணிகளிலும், நீங்கள் வரைந்த முக்கோணிகள் ஒவ்வொன்றிலும், தரப்பட்ட நீள அளவுகளுட் சிறிய அளவைக் கொண்ட பக்கத்திற்கு எதிராகவுள்ள கோணத்தை அளக்க. அக் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றினதும் அளவுகள் பற்றி என்ன அவதானித்தீர்கள்? அவை ஏறக்குறையச் சமமானவையா? வழுக்களின் காரணமாகச் சிறிய விலகல் ஏற்படக் கூடுமெனக் கொள்வோமாயின், அவ்வளவுகள் ஒவ்வொன்றும், 30° எனக் கொள்ளலாமா? செங்கோண முக்கோணி ஒன்றின் பெரிய பக்கம் எது? ஒரு செங்கோண முக்கோணியில், செங்கோணத்தை அமைக்கின்ற பக்கங்கள் செம்பக்கத்திலும் அளவிற் குறைவென நீங்கள் அறிவீர்கள். ஆகவே, நாம் நோக்கும் கோணம் கூர்ங் கோணமாதலால், சைனுக்குரிய விகிதத்தின் தொகுதியெண், பகுதி யெண்ணிலுஞ் சிறியதாகவே எப்பொழுதும் அமையும்.

அட்டவணை 7–2 ஐ அவதானித்தால், கூர்ங் கோணத்தின் அளவொன்றாக x° இருக்கும்போது சைன் x° எப்போதும் 0 உக்கும் 1 உக்கும் இடையிலேயே அமையுமென்பதைக் காண்பீர்கள்.

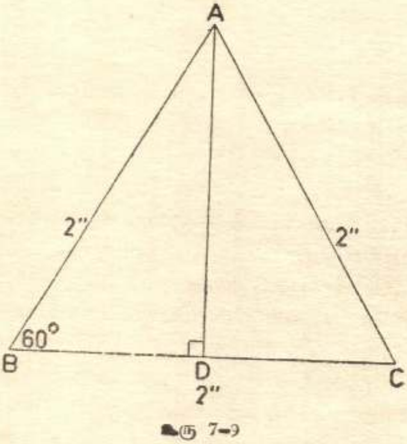
சைனுக்குரிய விகிதத்திற்கு $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ போன்ற எந்தவொரு பின்னத்தையும் எடுத்து, அதற்குரிய கோணத்தைக் காண்போமாயின், ஒரேயொரு கூர்ங்கோணமே ஒவ்வொரு விகிதத்தினுடனும் சோடி சேர்க்கப்படும் என்பதைக் காண்போம். ஆகவே, $\{(x, y) : y =$ சைன் $x^\circ, 0 < x < 90\}$ என்னுந் தொடர்பு 1—1 ஒத்திருக்கைத் தொடர்பாகும். எனவே, இது ஒரு படமாக்கல் எனக் கூறலாம்.

கணிதத்திற்குரிய கணிப்புக்களிலே கோணமொன்றின் சைன் எவ்வாறு பயன்படுத்தலாமென்பதை இப்போது நோக்குவோம். 20°, 40° போன்ற கோணங்களின் சைன்களை அட்டவணை 7—2 கொண்டுள்ளது. எல்லாக் கூர்ங்கோணங்களுக்கும் அவற்றின் சைன்களை அட்டவணைப் படுத்திஞேமாஞல், கணிப்புக்கள் செய்வதற்கு மிகவும் வசதியாகவிருக்கும். கணித வல்லுனர்கள் இவற்றைக் கூடியவளவு திருத்தமாகக் கணித்து அட்டவணைப் படுத்தியுள்ளனர். அதிகமான அட்டவணைகளில் இவ்வளவுகள் நான்காம் தசமதானத்திலே தரப்பட்டுள்ளன. இவ்வகுப்பிலே செய்யும் கணிப்புக்களுக்கு இவ்விகிதங்கள் மூன்றும். தசமதானத்திற் கொடுக்கப்பட்டாற் போதுமானது. 184, 185 ஆம் பக்கங்களிலே அத்தகைய ஓர் அட்டவணையைக் காண்பீர்கள். இவ்வட்டவணை, பொதுவாக **சைன் அட்டவணை** எனப்படும். இப்போது கோணமொன்றின் சைனைப் பயன்படுத்தி இலகுவாகச் செய்யக்கூடிய சில உத்திக் கணக்குகளை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 1

ABC ஒரு சமபக்க முக்கோணி. அதன் பக்கமொன்றின் நீள அளவு 2". AD என்பது A இலிருந்து BC இற்கு வரையப்பட்ட குத்துயாமாகும். (i) BD (ii) முக்கோணி ABC உள்ளடக்கும் பரப்பளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

திருத்தமான அளவின்படி முக்கோணி வரையாமல் கோணமொன்றின் சைனைப்



படம் 7–9

பயன்படுத்தி மேற்படி உத்திக் கணக்கைச் செய்யலாம்.

$$\text{முக்கோணி ABC இல் } \hat{B} = 60°,$$

$$AB = 2''.$$

$$\text{சைன் } A\hat{B}D = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{சைன் } 60° = \frac{AD}{2}$$

சைன் அட்டவணையிலிருந்து,

$$\text{சைன் } 60° = 0{\cdot}866$$

$$\therefore 0{\cdot}866 \times 2 = AD$$

$$\therefore AD = 1{\cdot}732$$

$AD = 1{\cdot}73$ அங். (2 ஆம் தசமதானத்தில்)

$$\triangle \text{ ABC உள்ளடக்கும் பரப்பளவு} = \tfrac{1}{2}\, BC \times AD$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 2 \times 1{\cdot}73$$

$$= 1{\cdot}73 \text{ சது. அங்.}$$

இன்னுமோர் உதாரணத்தை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 2

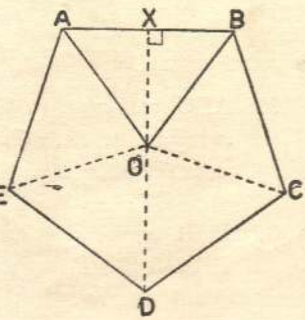
ABCDE ஓர் ஒழுங்கான ஐங்கோணி. அதன் மையம் O ஒவ்வொரு உச்சியிலிருந்தும் 3″ தூரத்தில் அமைந்தால், AB இன் நீள அளவைக் காண்க.

O விலுள்ள ஒவ்வொரு கோணமும் $\frac{360°}{5}$ என அறிவீர்கள்.

$\therefore A\hat{O}B = 72°$

OX ஐ AB இற்குச் செங்குத்தாக வரைவோம்.

OA = OB ஆகையால், $\triangle$ AOB ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணி.



உரு 7–10

$$\therefore B\hat{O}X = A\hat{O}X = 36°.$$

அத்துடன் X, AB இன் நடுப்புள்ளியாகும்.

$\triangle$ BOX இல்,

$$\text{சைன் } B\hat{O}X = \frac{BX}{BO}$$

$$\text{சைன் } 36^\circ = \frac{BX}{3}$$

சைன் அட்டவணையிலிருந்து சைன் $36^\circ = 0 \cdot 588$ ஆகும்.

$$\therefore 0 \cdot 588 \times 3 = BX$$

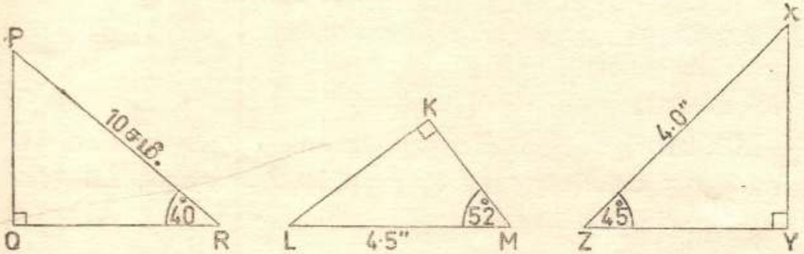
$$\therefore BX = 1 \cdot 764$$

$$AB = 3 \cdot 528$$

$\therefore AB = 3 \cdot 53$ அங். (2 ஆம் தசமதானத்தில்)

பயிற்சி 7–2

1. பின்வருஞ் செங்கோண முக்கோணிகளின் எஞ்சிய பக்கங்களின் நீள அளவுகளை இரண்டாம் தசமதானத்திற் காண்க.



உரு 7–11

2. ABC என்னும் முக்கோணியில் $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{C} = 62^\circ$, $AB = 8$ அங்குலமாயின், (i) AC (ii) BC (iii) $\triangle$ ABC உள்ளடக்கும் பரப்புளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

3. PQR ஒரு முக்கோணியாகும். அதில் $\hat{Q} = 90^\circ$, $\hat{P} = 30^\circ$, $PR = 5 \cdot 2$ சமீ. ஆயின், PQ, QR ஆகியவற்றின் நீள அளவைக் காண்க.

4. ABCD பக்கம் $2 \cdot 0$ அங்குல நீள அளவுள்ள சதுரமாகும். BD இன் நீள அளவைக் காண்க.

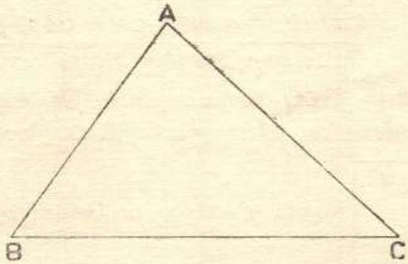
5. AB மையம் O வையும், 5 சமீ. ஆரையையுமுள்ள வட்டமொன்றின் நாணாகும். $O\hat{A}B = 40°$ எனின், AB இன் நீள அளவைக் காண்க. (குறிப்பு—AB இற்குச் செங்குத்தாக OD ஐ வரைந்து, $\triangle$ OAD இலிருந்து AD ஐக் காண்க.)

6. ஒரு நுனி நிலத்திலும், மறு நுனி சுவரிலுமாக 20 அடி நீளமுள்ள ஏணி சாத்தி வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏணி நிலத்துடன் 65° அமைக்கின், சுவரிலுள்ள ஏணியின் நுனி நிலமட்டத்திலிருந்து எவ்வுயரத்தில் இருக்கிறதெனக் காண்க.

7. பாலம் ஒன்று ஆற்றங்கரை ஒன்றுடன் 80° அமைக்கும் வண்ணம் கட்டப்பட்டுள்ளது. பாலத்தின் நீளம் 120 யாராயின் ஆற்றின் அகலமென்ன ? (ஆற்றின் அகலம் ஒழுங்கான தெனக் கொள்க.)

8. ABC ஒரு முக்கோணி வடிவான வயல் ஆகும். இதன் பரப்பளவைக் கணிப்பதற்கு அளவையாளர் பின்வரும் அளவுகளை எடுத்துள்ளார்.

$AB = 180$ யார், $BC = 250$ யார் $A\hat{B}C = 42°$ எனின், வயலின் பரப்பளவைக் காண்க. (குறிப்பு—BC இற்குச் செங்குத்தாக AD ஐ வரைக.)



உரு 7–13

9. O என்னும் மையமும், 5 சதம மீற்றர் ஆரையுமுள்ள வட்டத்தில் உச்சிகள் அமையும் வண்ணம் ஒழுங்கான அறுகோணி ABCDEF ஒன்று வரையப்பட்டுள்ளது. AB இற்குச் செங்குத்தாக OP வரைக. (i) $A\hat{O}B$ (ii) $A\hat{O}P$ (iii) AP (iv) AB (v) ABCDEF இன் சுற்றளவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

10. 70 அடி நீளமுள்ள "கிறேன்" ஒன்றினால் பாரம் ஒன்று உயர்த்தப்பட்டது. பாரத்தை இறக்கும்பொழுது "கிறேன்"

நிலமட்டத்துடன் 72° அமைத்ததாயின், பாரம் உயர்த்தப்பட்ட உயரத்தைக் காண்க.

கோணமொன்றின் கோசைன், தான்சன்

கோணமொன்றின் சைன் பற்றியும், அதன் பிரயோகங்கள் பற்றியும் படித்துள்ளீர்கள். உத்திக் கணக்குகள் தீர்ப்பதற்குப் பயன்படுத்தக் கூடிய இன்னொரு விகிதத்தைப் பற்றி இப்போது நோக்குவோம். உரு 7–5 ஐ மீண்டும் நோக்குக. $\frac{KP}{PQ}$ என்னும் விகிதத்திற்குச் சமமான விகிதங்கள் எவை ? ஒவ்வொரு விகிதத்தினதும் தொகுதியெண், x° அளவுடைய கோணத்தை அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீள அளவிற்குச் சமமாயும், பகுதியெண் செம்பக்கத்தின் நீள அளவிற்குச் சமமாயும் இருப்பதை அவதானிப்பீர்கள். உரு 7–6 இலுள்ள செங்கோண முக்கோணி ABC ஐ நோக்கினீர்களானால், மேற்கூறிய விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{b}{c}$ இற்குச் சமன் என்பதை அறிவீர்கள். இவ்விகிதம், x° இன் **கோசைன்** எனப்படும். அதாவது x° இன் கோசைன் $\frac{b}{c}$. இதைச் சுருக்கமாக கோசை $x^\circ = \frac{b}{a}$ என எழுதுவதுண்டு.

செங்கோண முக்கோணி ஒன்றில், கூர்ங்கோணமொன்றினது

$$\text{கோசைன்} = \frac{\text{கோணத்தை அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீள அளவு}}{\text{செம்பக்கத்தின் நீள அளவு}}$$

அட்டவணை 7–2 ஐ நிரப்புதற்குப் பயன்படுத்திய உருவை நோக்குங்கள். அவ்வட்டவணையில் பின்வரும் தலைப்புள்ள ஒரு நிரலைச் சேர்க்க.

கோசை x°.
$\frac{AC}{AB}$

முதல் நிரலிலுள்ள கோணங்கள் ஒவ்வொன்றுக்கும் இந்நிரலைப் பூர்த்தியாக்கி, கோணம் ஒன்றின் அளவு மாற்றமடையும்போது அக்கோணத்தின் கோசைன் எவ்வண்ணம் மாறுதலடைகிறது எனப் பார்க்க.

சைன் போன்று, இங்கும் x° இற்கும் கோசைன் x° இற்கு மிடையே உள்ள தொடர்பை வரிசைப்பட்ட சோடிகளின் தொடையாகக் கூறலாம்.

$$\{(x, y) : y = \text{கோசை } x^\circ,\ 0 < x < 90\}$$

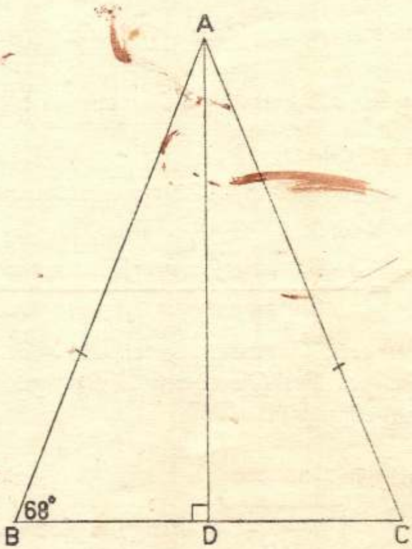
184, 185 ஆம் பக்கங்களில் கோசைன் அட்டவணை ஒன்றைக் காண்பீர்கள். அங்கு இவ்விகிதங்கள் மூன்றுந் தசம தானத்திற்குத் தரப்பட்டுள்ளன.

சைனைப் பயன்படுத்தித் தீர்த்த உத்திக் கணக்குகளை எல்லாம், கோசைனைப் பயன்படுத்தியுந் தீர்க்கலாம். இப்பொழுது, உதாரணங்கள் சிலவற்றை நோக்குவோம்.

உதாரணம் 3

ABC ஓர் இரு சமபக்க முக்கோணி, அதில் AB = AC = 5 அங்., $\hat{B} = 68°$. BC இன் நீள அளவை அங்குலத்தின் பத்தின் கூறிற் காண்க.

AD, BC இற்குச் செங்குத்தாக வரைவோம். D, BC இன் நடுப்புள்ளியாக அமையுமென அறிவீர்கள். சைனையோ கோசைனையோ பயன்படுத்தி இவ்வுத்திக் கணக்கைத் தீர்க்கலாம்.



உரு 7–13

நாம் கோசைனைப் பயன்படுத்தி இதனைச் செய்வோம்.

$$\text{கோசை } A\hat{B}D = \frac{BD}{AB}$$

$$\text{கோசை } 68° = \frac{BD}{5}$$

$$0{\cdot}375 = \frac{BD}{5}$$

$$BD = 1{\cdot}875$$

$$BC = 3{\cdot}75 \text{ அங்.}$$

$\therefore$ BC = 3·8 அங். (அங்குலத்தின் பத்தாம் கூறில்)

மேற்படி உத்திக் கணக்கைப் பின்வருமாறும் செய்யலாம் :—

$$\triangle ABD \text{ இல், } B\hat{A}D = 90° - 68° = 22°$$

$$\therefore \text{ சைன் } 22° = \frac{BD}{5}$$

$\therefore$ இதிலிருந்து BD ஐக் கணிக்கலாம்.

பயிற்சி 7–2 இலே வினா 1 இல் QR, KM, YZ ஆகியவற்றின் நீள அளவுகளைக் கோசைன் பயன்படுத்திக் காண்க.

கணித பாடத்திலே அதிகம் பயன்படுத்தும் இன்னொரு விகிதம் **தான்சன்** ஆகும். ABC என்னும் முக்கோணியில் (உரு 7–6) x° இன் தான்சன் $\frac{a}{b}$. x° இன் தான்சன், தான் x° எனப் பொதுவாக எழுதப்படும். கோணமொன்றின் தான்சனைப் பற்றி உங்களால் யாது கூற முடியும்? $\frac{KP}{KQ}, \frac{KR}{KS}, \frac{KM}{KL}$ ஆகிய விகிதங்கள் பற்றி யாது கூறுவீர்கள்? முக்கோணிகள் MKL, RKS, PKQ (உரு 7–5) ஆகியவற்றையும் $\triangle ACB$ (உரு 7–6) ஐயும் நோக்கினீர்களேயானால், இவை இயல்பொத்தனவெனவும் $\frac{KP}{KQ}, \frac{KR}{KS}, \frac{KM}{KL}$ ஆகிய விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் $\frac{a}{b}$ இற்குச் சமனாக அமைவதையுங் காண்பீர்கள்.

அதாவது, எந்தவொரு முக்கோணியிலும் அதன் கூர்ங்கோணம் ஒன்றினது தான்சன்

$$= \frac{\text{அக்கோணத்திற்கு எதிராகவுள்ள பக்கத்தின் நீள அளவு}}{\text{அக்கோணத்தை அடுத்துள்ள பக்கத்தின் நீள அளவு}}$$

சைன், கோசைன், தான்சன் ஆகிய மூன்று விகிதங்களையும் பற்றி மேலும் சில இயல்புகள் அறிதற்குப் பின்வரும் பயிற்சி பயனுடையதாகவிருக்கும்.

பயிற்சி 7–3

1. $\boxed{\text{தான் } x^\circ \; \frac{BC}{AC}}$ என்னும் நிரலை அட்டவணை 7–2 உடன் சேர்க்க. உங்கள் பயிற்சிப் புத்தகத்திலே சைனுக்குரிய விகிதத்திற்கு வரைந்த (உரு 7–7 போன்ற) உருவைப் பயன்படுத்தி இந்நிரலை நிரப்புக.

2. அட்டவணை 7–2 உடன் கோசைன் x°; தான்சன் x° ஆகிய நிரல்களைச் சேர்க்க. பாடநூலிலுள்ள உரு 7–7 ஐப் பயன்படுத்தி இவ்வட்டவணையைப் பூர்த்தியாக்குக. வினா 1 இற்கு அமைத்த அட்டவணையுடன் இதனை ஒப்பிடுக.

3. இப்பயிற்சியின் வினா 1, 2 ஆகியவற்றுக்கு அமைத்த அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வினாக்களுக்கு விடை தருக.

   (i) (அ) கோசை 30° (ஆ) கோசை 50° (இ) கோசை 60° ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii) (அ) தான் 30° (ஆ) தான் 50° (இ) தான் 60° ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(iii) கோசை 40° இன் பெறுமானம், கோசை 30° இன் பெறுமானத்திலுங் கூடியதா ?

(iv) கோசை 50° இன் பெறுமானம், கோசை 40° இன் பெறுமானத்திலுங் கூடியதா ?

(v) கோணத்தின் அளவு அதிகரிக்கும்பொழுது, கோசைனின் பெறுமானம் எவ்வாறு மாறுகின்றது ?

(vi) தான் 40° இன் பெறுமானம், தான் 30° இன் பெறுமானத்திலுங் கூடியதா ?

(vii) தான் 50° இன் பெறுமானம், தான் 40° இன் பெறுமானத்திலுங் கூடியதா ?

(viii) கோணத்தின் அளவு அதிகரிக்கும்பொழுது, தான்சனின் பெறுமானம் எவ்வாறு மாறுகின்றது ?

(ix) $0 < x < 90$ ஆக இருக்கும் பொழுது, கோசை $x°$, 1 இலுங் கூடிய பெறுமானத்தைக் கொண்டதாக அமைய முடியுமா ?

(x) $0 < x < 90$ ஆக இருக்கும்பொழுது தான் $x°$, 1 இலுங் கூடிய பெறுமானத்தைக் கொண்டதாக அமைய முடியுமா ?

4. ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் அதன் கூர்ங்கோணம் ஒன்றின் கோசைன் $\frac{1}{2}$ ஆக அமையும் வண்ணம் மூன்று செங்கோண முக்கோணிகள் வரைக.

5. வினா 4 இற்கு வரைந்துள்ள முக்கோணிகளிலிருந்து கோசைன் விகிதம் $\frac{1}{2}$ ஆகவுள்ள கோணத்தின் அளவைக் காண்க.

6. ஒவ்வொரு முக்கோணியிலும் அதன் கூர்ங்கோணம் ஒன்றின் தான்சன் $\frac{3}{4}$ ஆக அமையும் வண்ணம் மூன்று செங்கோண முக்கோணிகள் வரைக. இவற்றிலிருந்து தான்சனுக்குரிய விகிதம் $\frac{3}{4}$ ஆகவுள்ள கோணத்தின் அளவைக் காண்க.

7. (i) பின்வருஞ் சோடிகளின் மூலகங்களினது அளவுகளை ஒப்பிடுக. (விடையளிப்பதற்கு கோசை $x°$, தான் $x°$ ஆகியவற்றின் அட்டவணைகளைப் பயன்படுத்துக).

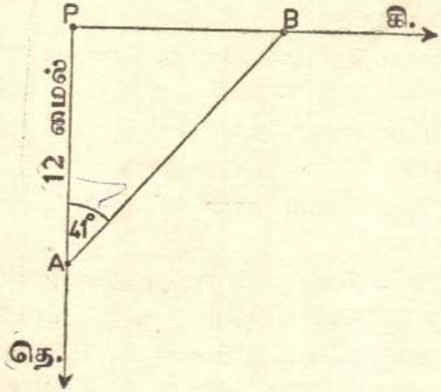
(அ) (கோசை 20°, சை 70°) (ஆ) (கோசை 30°, சை 60°).

(இ) (கோசை 40°, சை 50°). (ஈ) (கோசை 60°, சை 30°)

(உ) (கோசை 70°, சைன் 20°).

(ii) ஒவ்வொரு சோடியினதும் மூலகங்களின் பெறுமானங்கள் பற்றி என்ன கூறுவீர்கள் ?

8. A, B என்னும் இரு கப்பல்கள் P என்னும் துறைமுகத்திலிருந்து ஒரே நேரத்தில் புறப்படுகின்றன. A தெற்கு நோக்கியும், B கிழக்கு நோக்கியுஞ் செல்கின்றன. ஒரு மணி நேரத்திற்குப்பின் தெற்கு நோக்கிச் செல்லும் கப்பல் A, துறைமுகத்திலிருந்து 12 மைல் தூரத்திலிருக்கும் பொழுது, அதன் தலைவன் வடக்கிலிருந்து $41°$ கிழக்கில் (வ. $41°$ கி.) மற்றைய கப்பல் இருப்பதை அவதானிக்கிறான். (உரு 7—14 ஐப் பார்க்க). இருகப்பல்களுக்கும் இடையேயுள்ள தூரம் என்ன ?



உரு 7–14

9. ஒரு தந்தித் தூணின் தாங்கு கம்பியின் ஒரு நுனி அதன் அடியிலிருந்து 12 அடி தூரத்திலே நிலத்தில் நாட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் மறு நுனி தூணின் நுனியிலிருந்து 4 அடி உயரத்தில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது. கம்பி நில மட்டத்துடன் $64°$ அமைக்கின், கம்பியின் நீளமென்ன ?

10. ஒரு செவ்வகத்தின் மூலே விட்டமொன்றின் நீள அளவு 10 சமீ. அது நீண்ட பக்கத்துடன் $40°$ அமைக்கின், அச் செவ்வகத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

$$\{(x, y) : y = \text{சை } x°,\ 0 < x < 90\},$$

$$\{(x, y) : y = \text{கோசை } x°,\ 0 < x < 90\}$$

போன்ற தொடர்புகள் 1–1 ஒத்திருக்கையானவை என அறிந்துள்ளீர்கள். எனவே, அவை ஒவ்வொன்றும் படமாக்கலாகும். $0 < x < 90$ ஆக அமையும் பொழுது சைன் $x°$, கோசை $x°$, ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 0 இற்கும் 1 இற்கும் இடையில் அமையுமெனவும், x இன் பெறுமானம் அதிகரிக்கும்பொழுது சைன் $x°$ அதிகரிக்கின்றதெனவும், கோசை $x°$ குறைகிறதெனவும் அவதானித்திருப்பீர்கள்.

பயிற்சி 7—3 இலிருந்து $\{(x, y) : y = \text{தான் } x°,\ 0 < x < 90\}$ எனுந் தொடர்பு 1—1 ஒத்திருக்கையானது எனவும், அதனால் அது ஒரு படமாக்கல் எனவும் அறிந்திருப்பீர்கள். அத்துடன் $0 < x < 90$ ஆக

விருக்கும்பொழுது, $x°$ இன் பெறுமானம் அதிகரிக்கும்பொழுது தான் $x°$ அதிகரிக்கிறது எனவும்; சைன் $x°$ உம், கோசை $x°$ உம் போன்றல்லாது தான் $x°$ இன் பெறுமானம் 1 இலும் கூடியதாக அமையலாமெனவும் அறிந்திருப்பீர்கள் 184, 185 ஆம் பக்கங்களிலே தான்சன் அட்டவணை ஒன்றுள்ளது. அங்கு தான்சனுக்குரிய விகிதங்கள் மூன்று இலக்கங்களிலே தரப்பட்டுள்ளன. முக்கோணி ஒன்றில் ஏதேனும் இரு பக்கங்களினது நீள அளவுகளுக்கிடையே உள்ள சைன் $x°$, கோசை $x°$, தான் $x°$ போன்ற விகிதங்கள் **திரிகோண கணித விகிதங்கள்** எனப்படும். கோணங்களின் அளவுகளையும் அவற்றுக்குரிய விகிதங்களையுந் தரும் அட்டவணைகள் **திரிகோண கணித அட்டவணைகள்** எனப்படும்.

செங்கோண முக்கோணிகளைச் சார்ந்த உத்திக்கணக்குகள் தீர்த்தற்குச் சைன், கோசைன் ஆகியன வற்றைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம். இயல் பொத்த முக்கோணிகள், அளவிடை வரைவு ஆகியவை பிரயோகித்துச் செய்த உத்திக்கணக்குகள் பலவற்றைத் திரிகோண கணித விகிதங்கள் பிரயோகித்துத் தீர்க்கலாம். இப்பொழுது தான்சனுக்குரிய விகிதங்களைப் பயன்படுத்திச் சில உத்திக்கணக்குகள் செய்வோம்.

உதாரணம் 4

ABC என்னும் இருசமபக்க முக்கோணியில் $\hat{C} = \hat{B} = 70°$. $BC = 5''$ ஆயின், $\triangle ABC$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவை இரண்டாந் தசம தானத்திற் காண்க.

AD ஐ BC இற்குச் செங்குத்தாக வரைவோம்.

அப்பொழுது D, BC இன் நடுப்புள்ளியாக அமையுமென அறிவோம்.

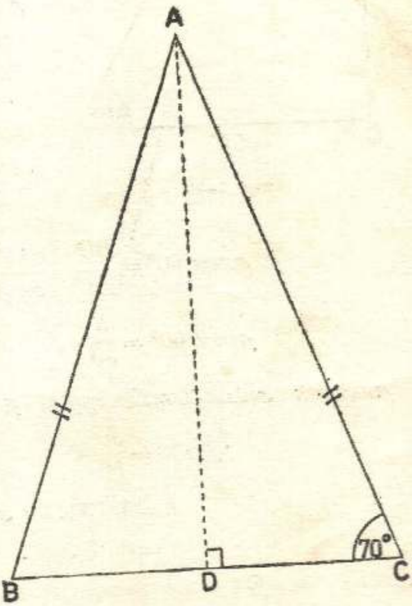
$\therefore DC = \frac{5}{2}'' = 2{\cdot}5''$

ஆகவே, செங்கோண முக்கோணி ADC இல்

$$\text{தான் } 70° = \frac{AD}{DC}$$

$$2{\cdot}75 = \frac{AD}{2{\cdot}5}$$

$$AD = 2{\cdot}75 \times 2{\cdot}5$$



உரு 7–15

6—CP 9457 (70/10)

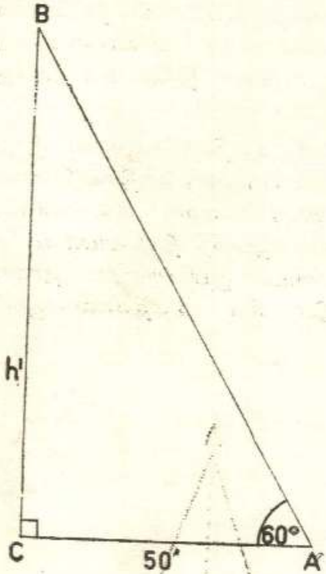
$\therefore \triangle ABC$ உள்ளடக்கும் பரப்பளவு $= \frac{1}{2}. BC. AD$

$= 2{\cdot}5 \times 2{\cdot}75 \times 2{\cdot}5$ சது. அங்.

மேற்படி பெருக்கலை மடக்கை வாய்பாடு பயன்படுத்திச் சுருக்குக.

உதாரணம் 5

நிலைக்குத்தான கோபுரமொன்றின் அடியிலிருந்து நிலத்திலே 50 அடி தூரத்தில் A என்னும் ஒரு புள்ளியில் அக்கோபுரத்தின் உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் 60° ஆகும். கோபுரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.



உரு 7–16

இப்பொழுது உரு 7–16 போன்ற ஓர் உருவை வரைவோம். இங்கு BC கோபுரத்தைக் குறிக்கின்றது. கோபுரம் நிலைக்குத்தானபடியால் BC, AC இற்குச் செங்குத்தாகும். $BC = h$ அடி எனக் கொள்வோம்.

$\triangle ABC$ இல் AC இன் அளவும் $\hat{A}$ இன் அளவுந் தரப்பட்டுள்ளன. BC இன் அளவே காண வேண்டியதாகும். BC இன் அளவாகிய h ஐக் காண்பதற்குப் பிரயோகிக்கக்கூடிய மிகப் பொருத்தமான திரிகோண கணித விகிதமென்ன?

$$\text{தான் } 60° = \frac{BC \text{ இன் நீள அளவு}}{AC \text{ இன் நீள அளவு}}$$

$$\text{தான் } 60° = \frac{h}{50}$$

தான்சன் அட்டவணையிலிருந்து தான் $60° = 1{\cdot}73$

$$\therefore 1{\cdot}73 = \frac{h}{50}$$

$$h = 1{\cdot}73 \times 50 \text{ அடி}$$

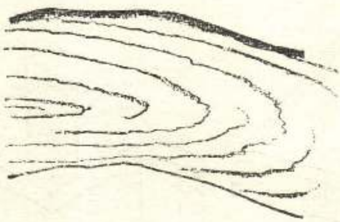
$$= 86{\cdot}5 \text{ அடி.}$$

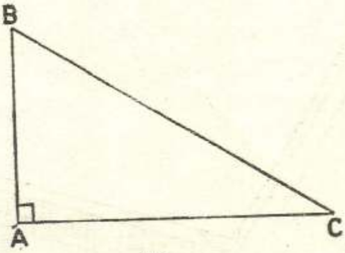
மேற்படி உத்திக் கணக்கை அளவிடை வரைவு முறையாலுஞ் செய்யலாமென அறிவீர்கள். திரிகோண கணித விகிதங்கள் பயன்

படுத்திச் செய்யும் முறை அளவிடை வரைவு முறையிலும் இலகு வானதென நீங்களே கண்டிருப்பீர்கள்.

இடைத்தளத்தில் அளவீடுகள்

இப்பொழுது, வேறோர் உதாரணத்தை நோக்குவோம். உரு 5—17 (i) இல் ஆற்றின் படமொன்றுள்ளது. இவ்வாற்றைக் கடக்காது அதன் அகலத்தைக் காணல் வேண்டும். அதனை எவ்வாறு காணலாமென்பதை இப்பொழுது நோக்குவோம். உரு 7—17 (ii) இலுள்ளது போன்று ஆற்றின் அகலமாகிய AC ஐ ஒரு பக்கமாகக் கொண்டு செங்கோண முக்கோணி ABC ஐ வரைந்தால், அதன் அகலத்தைக் காணக்கூடியதாக இருக்கும்.


(i)



(ii)

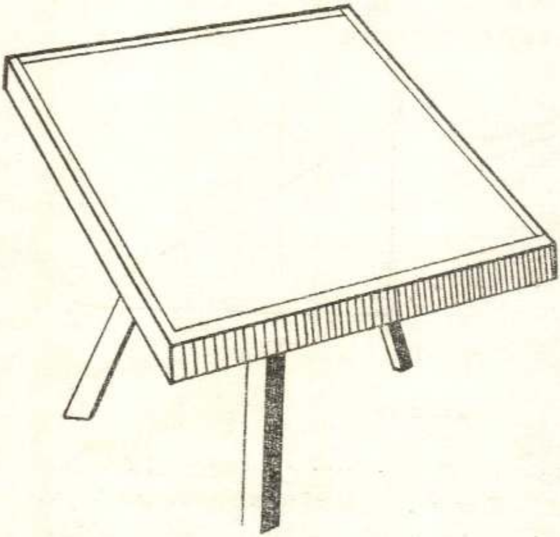
உரு 7-17

AC இன் அளவும், கோணம் C இன் அளவுந் (நாம் AC உள்ள கரையில் நிற்பதாகக் கொள்க.) தெரிந்தால், அகலத்தைக் காணலாம். AC இன் அளவு ஆற்றங்கரையில் எடுக்கவேண்டிய நீள அளவாகும். ஆகவே, கோணம் C இன் அளவு தெரிந்தால், AB இன் நீள அளவைக் காணலாம்.

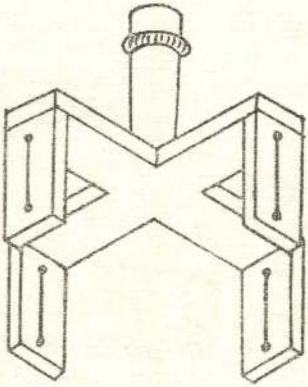
இத்தகைய அளவுகள் எடுக்கும்பொழுது அளவையாளர் பலவகையான கருவிகளைப் பயன்படுத்துவர். உங்களிற் சிலர் அவற்றைக் கண்டிருத்தல் கூடும். நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கோணமொன்றை அளப்பதற்கு வகுப்பிற் செய்த சாய்வுமானியைப் பயன்படுத்தியிருப்பீர்கள். அளவையாளர் புல வேலைசெய்யும்பொழுது அளவீடுகள் குறிப்பதற்குத் **தளமேசை** ஒன்றைப் பயன்படுத்துவர். நிலி ஒன்றுடன் பொருத்தப்பட்ட தட்டையான மரப்பலகையே தளமேசையாகும். அளவீடுகள் எடுக்கும் பொழுது நிலியின் உதவியால் இதனை நிறுத்தலாம்.

செங்கோணமொன்று அமைப்பதற்கு அளவையாளர் **குறுக்குத் தண்டு** ஒன்றினைப் பயன்படுத்துவர். இதனை வகுப்பில் செய்திருப்

பீர்கள். இது இரு சலாகைகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகப் பொருத்தப்பட்ட கருவியாகும். வேண்டியபொழுது நிலத்திலே நாட்டுதற் பொருட்டு இக்கருவி கூர் நுனிக்கம்பமொன்றுடன் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. உரு 7—18 இல் தளமேசை ஒன்றினதும், குறுக்குத் தண்டு ஒன்றினதும் படங்களைக் காண்பீர்கள். உரு 7—19 இல் **அலிடேற்று** ஒன்றின் படம் உள்ளது. அலிடேற்று ஒன்றினைப் பயன்படுத்திக் கிடைத் தளத்தில் கோணங்கள் அளப்பதற்கு வகுப்பிற் படித்திருப்பீர்கள்.

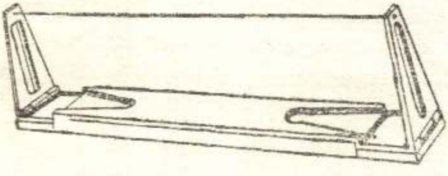


(i)



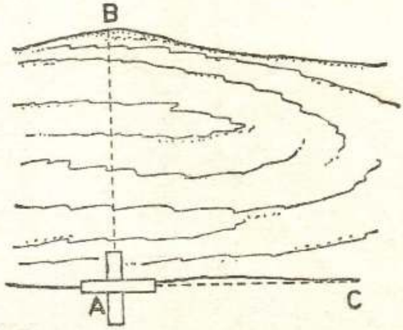
(ii)

உரு 7-18



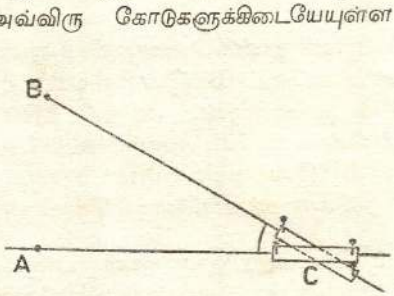
உரு 7-19

ஆற்றின் அகலத்தைக் காண்பதற்கு மேற்கூறிய கருவிகளை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாமென ஆராய்வோம். முதலில், மறு கரையில் மரம் B போன்ற ஒரு நிலையத்தைத் தேர்ந்தெடுக்க. (உரு 7-20) நீங்கள் நிற்கும் கரையில் B இற்கு நேரெதிராகவுள்ள புள்ளி A ஐத் தெரிக. A இல் குறுக்குத் தண்டை நாட்டி, அதன் சலாகைகளுள் ஒன்று AB என்னுங்கோட்டில் அமையும் வகையில் அதனைச் செப்பஞ் செய்க. (நீங்கள் வகுப்பிற் செய்த குறுக்குத் தண்டில் சதுரத்தின் மூலைவிட்டங்கள் சலாகைகளைக் குறிக்கின்றன.) குறுக்குத் தண்டின் மற்றைய சலாகை AC என்னுங் கோட்டில் அமையும் வகையில், C என்னும் வசதியான புள்ளி ஒன்றில் நிலைக்குத்தாகக் கம்பம் ஒன்றை நாட்டுக. (C இலிருந்து பார்க்கும் பொழுது B கண்ணுக்குத் தோன்றக் கூடிய புள்ளியாக அமையும் வகையில் C ஐத் தெரிதல் வேண்டும்.)



உரு 7–20

C இல் அதன் மையம் அமையும் வண்ணம் தளமேசையை வைத்து, அதில் ஒரு தாளை நிலைநிறுத்துக. இப்பொழுது அலிடேற்று ஒன்றை அதன் மையம் மேசையின் மையத்தில் அமையக்கூடியதாகத் தாளின் மேல் வைக்க. அலிடேற்று CA என்னுங் கோட்டில் அமையும் வகையில், அதை C பற்றிச் சுழற்றுக. இந்நிலையில் அலிடேற்றின் விளிம்பொன்றின் ஓரமாகக் கோடு ஒன்று வரைக. CB என்னுங் கோட்டில் அமையத்தக்கதாக அலிடேற்றை C பற்றி மீண்டுஞ் சுழற்றுக. இந்நிலையிலும் அதன் விளிம்பொன்றின் ஓரமாக உரு 7–21 இற் காட்டியது போன்று கோடு ஒன்று வரைக. இப்பொழுது அவ்விரு கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் ACB ஐ நீங்கள் அளக்கலாம். AC இன் தூரத்தையும் அளக்க.



உரு 7–21

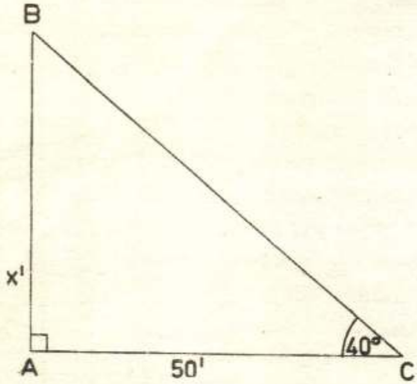
உதாரணமாக, $AC = 50$ அடி,

$$A\hat{C}B = 40°$$

எனக் கொள்வோம்.

செங்கோண முக்கோணி ABC இல் $\hat{C} = 40°$, $AC = 50$ அடி. AB இன் நீள அளவைக்

காணல் வேண்டும். அதனை x அடி எனக்கொள்வோம். தான் $40° = \frac{x}{50}$
இதிலிருந்து x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



உரு 7-22

பயிற்சி 7—4

1. மரத்தின் மேல் ஏருது, மரத்தின் உயரத்தை அறிதற்கு ஒரு மாணவன் விரும்புகிருன். மரத்தின் அடியிலிருந்து 40 அடி தூரத்தில் நிலத்திலே நின்று மரத்தின் நுனியின் ஏற்றக் கோணம் $52°$ என அறிகிருன். மரத்தின் உயரத்தைக் காண்க.

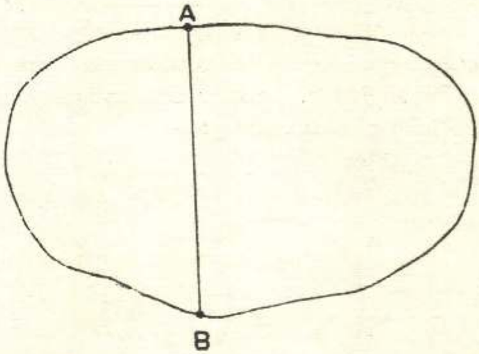
2 பயிற்சி 7—3 இன் **வினு** 9 இலே தந்தித் தூணின் உயரத்தைக் காண்க.

3. ஒருவன் A என்னும் கட்டடத்தின் நான்காம் மாடியிலிருந்து வீதியின் மறு பக்கத்திலுள்ள கட்டடம் B இன் அடியினது இறக்கக்கோணம் $42°$ ஆகக் காண்கிருன். அதேயிடத்தில் B இனது உச்சியின் ஏற்றக் கோணம் $50°$ ஆகும். வீதியின் அகலம் 60 அடி ஆயின், B இன் உயரத்தைக் காண்க. (A, B வீதியின் இருமருங்கிலும் அமைந்துளதெனக் கொள்க.)

4. பயிற்சி 7—2 இலே வினு 9 இல் அறுகோணி உள்ளடக்கும் பரப்பளவைக் காண்க. (மடக்கை வாய்பாடு பயன்படுத்தி விடையைச் சுருக்குக.)

5. ஓர் உற்பத்திச்சாலையின் சிமினியிலிருந்து 80 யார் தூரத்திலே நிற்கும் அளவையாளர் அச்சிமினியின் உச்சியினது ஏற்றக் கோணம் 35° ஆகக் காண்கிருர். அளவையாளர் 5 அடி 6 அங்குல உடாமுடையவராயின், சிமினியின் உயரத்தைக் காண்க. (விடையைச் சுருக்குதற்கு மடக்கை வாய்பாடுகள் பயன்படுத்துக.)

6.



உரு 7—23

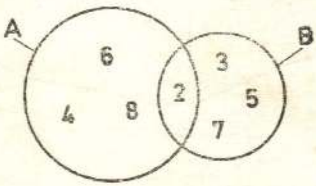
உரு 7—23 ஒரு சேற்றுநிலத்தைக் காட்டுகிறது. AB இன் தூரத்தை அளக்க வேண்டின், அதனைக் காண்பதற்கு முறை ஒன்று கூறுக.

8 எண்கள்

எண் தொடைகள் பற்றியும் அவற்றின் தொடைப் பிரிவுகள் சிலவற்றின் இயல்புகள் பற்றியும் ஆறும், ஏழாம் வகுப்புகளிலும் இவ்வாண்டின் முற்பகுதியிலும் நீங்கள் படித்திருக்கிறீர்கள். கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய கணிதச் செய்முறைகளால் எண்கள் எவ்வண்ணஞ் சேர்க்கப்படுகின்றன எனவும் நீங்கள் முன்பு படித்திருக்கிறீர்கள். முன்பு படித்தவற்றை மீட்குமுகமாகப் பின்வரும் பயிற்சிக்கு விடையளிக்க :—

பயிற்சி 8–1

1.

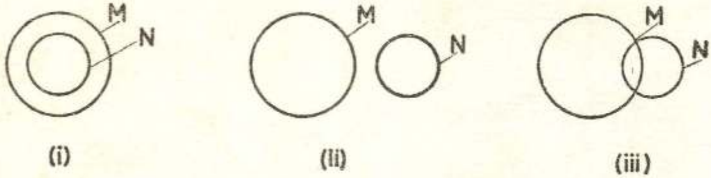


உரு 8–1

உரு 8–1 இலுள்ள வென் உருவம் தொடைகள் A, B ஆகியவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்டுகிறது. மூலகங்களை நிரைப்படுத்துவதன் மூலம் பின்வருந் தொடைகளைத் தருக.

(i) A (ii) B (iii) $A \cap B$ (iv) $A \cup B$

2.



உரு 8-2

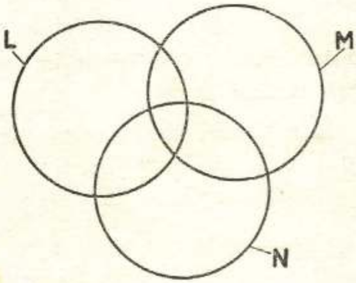
தரப்பட்ட வென் உருவங்களிலிருந்து, பின்வருந் தொடர்புகளைக் குறிப்பனவற்றைத் தெரிக :—

(அ) $N \subseteq M$ (ஆ) $M \cap N = \phi$

(இ) $M \cap N = N$ (ஈ) $M \cap N = \phi$

3 இங்கு தரப்பட்ட வென் உருவம் போன்று நான்கு வரைக. அவற்றில், பின்வருந் தொடைகளைத் தனித்தனியே நிறந்தீட்டுக :—

(i) $M \cap N$ (ii) $M \cap L$ (iii) $N \cap L$ (iv) $L \cap M \cap N$



உரு 8-3

4. $W = \{$முழு எண்கள்$\}$; $Z = \{$நிறை எண்கள்$\}$

$Z^+ = \{$நேர்நிறை எண்கள்$\}$; $Z^- = \{$மறைநிறை எண்கள்$\}$

எனின் பின்வருந் தொடைகளை (அ) வென் உருவம் வரைந்து காட்டுக. (ஆ) மூலகங்களை நிரைப்படுத்திக் காட்டுக.

(i) $Z^+ \cap Z^-$ (ii) $Z^+ \cup Z$ (iii) $Z \cup W$

(iv) $Z \cap W$ (v) $Z \cap Z^-$

5. இடைவெளிகளை நிரப்புக :
$(a, b, c, p, q, \ldots\ldots\ldots\ldots \in W)$

(i) $5 + 7 = 7 + \ldots\ldots$ (ii) $a + b = \ldots\ldots + a$

(iii) $10 \times \ldots\ldots = 25 \times 10$ (iv) $a \times b = b \times \ldots\ldots$

(v) $(10 + 3) + 8 = 10 + (3 + \ldots\ldots)$ (vi) $(a + b) + c = \ldots + (b + c)$

(vii) $10 \times (2 + 5) = (10 \times 2) + (10 \times \ldots\ldots)$

(viii) $p\,(q + r) = (p \times \ldots\ldots) + (p \times r)$

(ix) $8\,(10 - 7) = (8 \times \ldots\ldots) - (8 \times \ldots\ldots)$

(x) $l\,(m - n) = (l \times m) - (\ldots\ldots \times \ldots\ldots)$

(xi) $10 \times (15 \times 18) = (10 \times \ldots\ldots) \times 18$

(xii) $a \times (b \times c) = (a \times \ldots\ldots) \times c$

(xiii) $5 + (-8) = (-8) + \ldots\ldots$

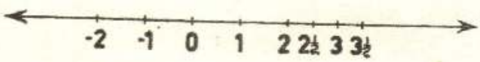
(xiv) $(-12) + (-15) = \ldots\ldots + (-12)$

(xv) $3\frac{1}{2} \times (2 - 1\frac{1}{2}) = (\ldots \times 2) - (3\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{2})$

பயிற்சி 8–1 ஐச் சரியாகச் செய்து முடிப்பீர்களானால், எண்கள் பற்றி முன்பு படித்தவற்றை ஓரளவு மீட்டிருப்பீர்கள். முன்பு நீங்கள் படித்துள்ள எண்களின் தொடையை இப்பொழுது மீண்டுங் கவனிப் போம். அது, நிறையெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகிய வற்றை உள்ளடக்கியதாகும்.

நிறையெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றை எண் கோட்டிற் குறித்துக் காட்டல்

நிறையெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றை எண் கோட்டிலே குறித்துக் காட்டலாமென முன்பு படித்திருக்கிறீர்கள். உரு 8–4. அத்தகைய எண்கோடொன்றின் ஒரு பகுதியைக் காட்டு கிறது.



உரு 8–4

இக்கோட்டிலே, அடுத்துள்ள நிறை எண்கள் இரண்டைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரத்தை 1 அலகு எனக் கொள்வோம். அப்பொழுது, இவ்வெண்கோட்டிலே 0, 3 ஆகிய எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் என்ன ? 1, 3 ஆகியவற்றைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என்ன ? –1, 2 ஆகிய எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் என்ன ? 0, 3 ஆகியவற்றுக்கு இடையேயுள்ள நிறையெண்கள் யாவை ? 0, 3 ஆகியவற்றுக்கு நடுவே உள்ள எண் யாது ? அவ்வெண்ணும் நிறையெண்ணாக அமைய முடியுமா ?

0, 3 ஆகிய எண்களைக் குறிக்கும் புள்ளிகளிடையே உள்ள தூரம் 3 அலகுகள் என நீங்கள் உணர்ந்திருப்பீர்கள். எனவே, அவற்றின் நடுவேயுள்ள எண் 0 ஐக் குறிக்கும் புள்ளியிலிருந்து $1\frac{1}{2}$ அலகுகள் $\left(\frac{3-0}{2}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}\right)$ தூரத்தில் இருப்பதையும் அவதானிப்பீர்கள். இவ் வெண், $0+1\frac{1}{2}$ ஆகும். அதாவது, $1\frac{1}{2}$ ஆகும். இது, ஒரு கலப்பெண். இதே முறையில், 1, 3 ஆகியவற்றின் நடுவே உள்ள எண் 2 என அறிவீர்கள். 25, 45 ஆகியவற்றின் நடுவே உள்ள எண் $\left(25+\frac{45-25}{2}=25+10=35\right)$ ஆகும். 2, $2\frac{1}{2}$ ஆகிய இரண்டுக்கும் நடுவே உள்ள எண் யாது? 2, $2\frac{1}{4}$ ஆகியவற்றுக்கு நடுவே உள்ள எண் யாது ? இவ்வண்ணமாக, 2, 3 ஆகிய எண்களுக்கு இடையே எத்தனை எண்களைக் காண முடியும் ?

இதுவரை நீங்கள் படித்தவற்றிலிருந்து, 2, 3 ஆகிய எண்களுக்கு இடையேயும், பெருந்தொகையான எண்களைக் காண முடியும் என்பது வெளிப்படையாகியிருக்கும். அவை ஒவ்வொன்றுக்கும் பொருத்த மானவொரு புள்ளியும், எண் கோட்டிலிருக்கும். ஆனால், பெருந் தொகையான எண்கள் ஆங்கிருப்பதால், அப்புள்ளிகள் எல்லாம் மிகமிக நெருக்கமாக இருக்கும். அதனால், அவற்றையெல்லாம் எண்கோட்டிற் குறித்துக் காட்டல் மிகக்கடினமாகும்.

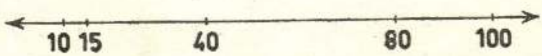
மேலே படித்தவற்றிலிருந்து, இரு உண்மைகள் வெளிப்படையாக வுள்ளன. அவையாவன,

1. இரு நிறையெண்களுக்கிடையே, வேறு நிறையெண்கள் இருத்தல் கூடும்; இல்லாமலிருந்தலுங் கூடும்.

2. இரு நிறையெண்களுக்கிடையே, பெருந்தொகையான எண்கள் இருத்தல் கூடும்.

-3. 2 ஆகியவற்றை எண்கோட்டிற் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் 5 அலகுகள் என அறிவீர்கள். ஏனெனில், $2-(-3)=5$. ஆகவே, -3 உக்குப் பின் 2 வரையில், 5 நிறையெண்கள் உள்ளன. அவையாவன, -2, -1, 0, 1, 2. ஆனால், -3 உக்கும் 2 உக்கும் இடையே, நிறையெண்கள் அல்லாத பெருந்தொகையான எண்களையும் நாம் காணலாம்.

எண்கோடு ஒன்றிலே, 40, 10, 100, 15, 80 ஆகியவை குறிக்கப் பட்டால், அவை பின்வரும் உருவில் உள்ளதுபோல அமையும்.



உரு 8-5

அதேபோல் பின்வரும் எண்களை, எண்கோட்டிலே குறித்துக் காட்டுக :— $4\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{8}$, 2.

இவற்றிலிருந்து, எண்கோட்டிலே எண்கள் குறித்துக் காட்டப்படும் போது, இடமிருந்து வலமாக உள்ள எண்கள் ஏறுவரிசையில் இருக்கும் என அறிவீர்கள். இரண்டு அல்லது அதற்குக் கூடிய தொகையான நிறையெண்கள், பின்னங்கள் அல்லது கலப்பெண்கள் தரப்படும்போது, அவற்றை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்கு வரிசை யில் ஒழுங்குபடுத்தலாம்.

2, 3, -2, -6, 0, $2\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$ ஆகிய எண்களை நோக்குங்கால், $-6<-2$ எனவும், $-2<0$ எனவும் அறிவீர்கள். அதாவது $-6<-2<0$. இவ்வண்ணமே மற்றைய எண்களையும் தொடர்புபடுத்தலாம். $-6<-2<0<\frac{1}{2}\ldots.$ என்பதைப் பூர்த்தியாக்கினால், அவை

ஏறுவரிசையில் அமையும். இவ்வெண்களை, எண் கோட்டிலே குறித்துக் காட்டினால் பொருத்தமான இடைவெளிகளுடன் அவை இதே ஒழுங்கில் அமைந்திருக்கும். (இதே எண்களை, இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தலுங்கூடும்.) நிறை யெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றைக் கொண்ட எண்தொடையின் மூலங்கள் இரண்டோ அல்லது அதிலும் அதிகமானவையோ தரப்படின், அவற்றை ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில் ஒழுங்குபடுத்தல் கூடுமென இப்போது அறிந்துள்ளீர்கள். ஆகவே, இவ்வெண் தொடையானது வரிசை இயல்புடையதாகும்.

பயிற்சி 8–2

1. எண்கோடு ஒன்றிலே -5, 0, $2\frac{1}{2}$, 7 ஆகிய எண்களைக் குறித்துக் காட்டுக.

2. (வினா 1 உக்கு வரைந்த எண்கோட்டைப் பயன்படுத்தி பின்வருவனவற்றுக்கு விடை காண்க).

(i) -5 உக்கும் 7 உக்கும் இடைப்பட்ட நிறையெண் தொடையை எழுதுக.

(ii) -5, 2 ஆகிய இரண்டு எண்களையுங் குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் யாது? (இரு அடுத்துள்ள நிறையெண்களை குறிக்கும் புள்ளிகளுக்கிடைப்பட்ட தூரம் 1 அலகு எனக் கொள்க).

(iii) -5 உக்கும் 2 உக்கும் நடுவே உள்ள எண் யாது?

(iv) 5 உக்கும் 6 உக்கும் இடையேயுள்ளதும் 4 எண்களைக் கொண்டுடுள்ளதுமான தொடையொன்று எழுதுக.

3. $\frac{1}{4}$ உக்கும் $\frac{1}{2}$ உக்கும் இடைப்பட்டதும் 5 எண்களைக் கொண்டதுமான தொடையொன்று எழுதுக. இவற்றை ஏறுவரிசையில் எழுதுக.

நிறையெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றை எழுதும் வேறு முறைகள்.

நிறையெண்கள், பின்னங்கள், கலப்பெண்கள் ஆகியவற்றை எண் கோட்டிலே குறித்துக் காட்டலாமெனவும், இடமிருந்து வலமாக நோக்கின் அவை ஏறுவரிசையில் அமையும் எனவும் நீங்கள் அறிவீர்கள். இந்த எண்கள் பற்றி மேலும் சில விபரங்களை அறிய நாம் இப்போது முயல்வோம்.

$\frac{1}{2}$ என்பது ஒரு பின்னமாகும்.

$0{\cdot}5,\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{50}{100}\ldots\ldots$ ஆகியவை, $\frac{1}{2}$ உக்குச சமமான வேறு சில பின்னங்களாகும். இதற்குச் சமமான பின்னங்கள் இன்னும் பலவற்றை நாம் எழுதலாம்.

8 உக்குச் சமமானவற்றுள், $\frac{8}{1},\ \frac{16}{2},\ \frac{40}{5},\ \frac{800}{100}$ ஆகியவை சிலவாகும். எனவே, இதுவரை நாம் அறிந்துள்ள எண்களுள் எதையேனும்; பலமுறைகளில் நாம் எழுதுதல் முடியும். சில எண்களை நீங்களாகவே எழுதி, அவை ஒவ்வொன்றையும் 5 வேறு முறைகளில் எழுதுக. உதாரணமாக, 1, 2, $\frac{2}{3}$, $0{\cdot}7$, $2{\cdot}3$, $2\frac{1}{5}$, -4, $-12\frac{1}{2}$ ஆகியவற்றை 5 வேறுமுறைகளில் எழுதுக. எங்களுக்கு உதவும் வகையில், இரு உதாரணங்களைக் கீழே தருகிறோம்.

$$2{\cdot}3 = 2\frac{3}{10} = \frac{23}{10} = \frac{46}{20} = \frac{276}{120} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$-12\frac{1}{2} = -12{\cdot}5 = -\frac{25}{2} = -\frac{400}{16} = -\frac{1{,}000}{40} = \ldots\ldots$$

விகிதமுறுமெண்கள்

இதுவரை நீங்கள் அறிந்துள்ள எண்களை எல்லாம், வெவ்வேறு முறைகளில் எழுதலாமென அறிந்தீர்கள். அவை எல்லாவற்றையும் எழுதிக் காட்டக்கூடிய ஒரு பொதுமுறையை நீங்கள் அவதானித் தீர்களா ?

நீங்கள் அறிந்துள்ள எண்களுள் எதையும், இரு நிறையெண் களின் உதவியுடன் எழுதுதல் முடியும். அவற்றுள் ஒன்று பகுதி எண்ணாகவும் மற்றையது தொகுதியெண்ணாகவும் இருக்கும். அதாவது, அவை

$$\frac{\text{பகுதியெண் (ஏதாவது ஒரு நிறையெண்)}}{\text{தொகுதியெண் (0 அல்லாத ஒரு நிறையெண்)}}$$

என்ற அமைப்பில் அமையும்.

0 ஆல் வகுத்தற்கு கருத்துக்கொடுக்கப்படாமையால், 0 தொகுதி யெண்ணாக அமைதல் முடியாது. இந்த எண்களைக் குறியீட்டில் எழுதினால், $\frac{a}{b}$ என அமையும். $a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq o$

நீங்கள் இதுவரை அறிந்துள்ள எண்களுள் இவ்வமைப்பில் எழுத முடியாத எண் எதுவும் உண்டா என ஆராயுங்கள். அப்படியான எண் எதையும் இதுவரை நீங்கள் அறியவில்லை என்பதை அப்

பொழுது உணர்வீர்கள். ஆகவே, இதுவரை நாம் அறிந்துள்ள எண்களுள் எதையும்

$$\frac{a}{b},\ a \in Z,\ b \in Z,\ b \neq o$$

என்ற அமைப்பிலே எழுதுதல் கூடும். இவ்வமைப்பில் உள்ள எண்கள், **விகிதமுறுமெண்கள்** எனப்படும். இவ்விகிதமுறும் எண்களைக் கொண்டுள்ள எண்தொடை, விகிதமுறுமெண் தொடை எனப்படும். விகிதமுறும் எண்தொடையைக் குறிக்க வழமையாகப் பிரயோகிக்குங் குறியீடு **Q** ஆகும்.

$$\therefore\ Q = \{\text{விகிதமுறுமெண்கள்}\}$$

அல்லது

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z;\ b \in Z;\ b \neq o \right\}$$

R எனும் எண் தொடையிலே, இவ்வெண்களும் பிற எண்களும் உள்ளன. R எனுந் தொடையின் மற்றை மூலகங்கள் பற்றிப் பின்னைய வகுப்புக்களிற் படிப்பீர்கள்.

ஆகவே $Q \subseteq R$

விகிதமுறுமெண் தொடையிலே, நிறையெண்தொடை, முழுவெண் தொடை, நேர் நிறையெண் தொடைபோன்ற பலவும் உள்ளன. இவற்றை எல்லாங் குறியீடு மூலம் எப்படி எழுதுவீர்கள்.

[உதாரணமாக ; $[W \subseteq Q]$

பயிற்சி 8–3

பின்வருவனவற்றில் இடைவெளிகளை நிரப்புக :—

1. (i) $2 + 3 = \ldots.$ (ii) $100 + 25 = \ldots.$
   (iii) $12 + \ldots = 35$ (iv) $\ldots + 72 = 127$
2. (i) $10 - 7 = \ldots$ (ii) $75 - 26 = \ldots$
   (iii) $3 - 5 = \ldots$ (iv) $12 - 85 = \ldots$
3. (i) $2 \times 3 = \ldots$ (ii) $13 \times 25 = \ldots$
   (iii) $9 \times 7 = \ldots$ (iv) $7 \times \ldots = 35$
4. (i) $9 \div 3 = \ldots$ (ii) $27 \div 2 = \ldots$
   (iii) $35 \div 7 = \ldots$ (iv) $5 \div 15 = \ldots$
5. (i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \ldots$ (ii) $\frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \ldots$
   (iii) $\frac{4}{5} + \ldots = 2$ (iv) $1\frac{1}{2} + \ldots = 2\frac{5}{6}$
6. (i) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \ldots$ (ii) $\frac{3}{4} \times \ldots = 1\frac{1}{8}$
   (iii) $1\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{7} = \ldots$ (iv) $\ldots \times \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

7. (i) $\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{2} = \ldots$ (ii) $1\frac{1}{5} \div \frac{4}{5} = \ldots$
(iii) $\frac{2}{3} \div \ldots = \frac{3}{2}$ (iv) $\ldots \div 1\frac{2}{3} = 9$

8. (i) $\frac{3}{2} \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \ldots$ (ii) $2 \times (1\frac{5}{6} - 1\frac{1}{2}) = \ldots\ldots$
(iii) $\frac{1}{2}(\frac{2}{3} \div 1\frac{1}{2}) = \ldots$ (iv) $(5 - 1\frac{2}{3}) \div \frac{2}{3} = \ldots$

இப்பயிற்சி வினாக்களுக்கு விடையளித்தல் உங்களுக்கு இலகுவாக இருந்திருக்கும். அதிற் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ள எண்களையும் விடைகளாகப் பெற்ற எண்களையும் இப்போது ஆராய்வோம்.

அடைத்தவியல்பு

பயிற்சி 8–3 இன் வினா 1 ஐப் பாருங்கள். அதிலே, (1) $2 + 3 = \ldots$ எனவுள்ளது. இடைவெளியை நிரப்பி எழுதினால், $2 + 3 = 5$ என்ற சமன்பாட்டைப் பெறுவீர்கள். அங்கு, $2 \in Z^+$; $3 \in Z^+$; $5 \in Z^+$. இவ்வாறே, வினா 1 (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றுக்கும் ஆராயுங்கள். அவற்றிலும், எண்கள் ஒவ்வொன்றும் நேர்நிறை எண்தொடையின் மூலகங்களாகவுள்ளனவா எனப் பாருங்கள். மேலுஞ் சில நேர்நிறை எண்களை விரும்பியபடி எழுதி, அவற்றின் கூட்டுத்தொகையும் நேர்நிறை எண்ணாகவே அமைகிறதாவென ஆராய்க. அப்பொழுது, எந்த விரு நேர்நிறை எண்களைக் கூட்டினாலும், அவற்றின் விடையும் நேர்நிறையெண்ணாகவே அமைவதைக் காண்பீர்கள். எனவே, நேர்நிறையெண் தொடையின் யாதேனும் இரண்டு மூலகங்களின் கூட்டுத்தொகையும் அதே தொடையின் மூலகமாக அமைவதைக் காணலாம். ஆகவே, நேர்நிறையெண்களின் தொடையானது **கூட்டலுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டுள்ளது** எனக் கூறுவோம். இவ்வியல்பு, **அடைத்தவியல்பு** எனப்படும். யாதுமொரு தொடையின் இரு மூலகங்களைக் கணிதச் செய்கை ஒன்றுக்குட்படுத்தும் போது, விடையும் அதே தொடையின் மூலகமாக அமையின், அத்தொடை அச்செய்கைக்கு உட்பட அடைக்கப்பட்டது என்போம்.

இனி, வினா 2 ஐ எடுத்துக்கொள்க. 2 (1) ஐ நிரப்பி எழுதினால், $10 - 7 = 3$ எனப் பெறுவோம்; அதிலும், $10 \in Z^+$, $7 \in Z^+$, $3 \in Z^+$ ஆகவே, தந்தவிரு எண்களும் அவற்றின் வித்தியாசமும் நேர்நிறையெண் தொடையின் மூலகங்களாகுமென நினைக்கிறீர்களா? ஆனால், 2 (ii) இல், நிலை வேறாகவுள்ளது. அதில், $3 - 5 = -2$. ஆகவே, $3 \in Z^+$ $5 \in Z^+$, $-2 \notin Z^+$. எனவே, நேர்நிறையெண்களின் தொடையானது, கழித்தலுக்குட்பட அடைக்கப்படவில்லை எனக் காண்கிறோம். மேலுஞ் சில எண்களை விரும்பியபடி எழுதிக் கழித்து, இம்முடிவை ஆராய்க.

இப்பயிற்சியிலுள்ள மற்றைய வினாக்களையும், அவற்றின் விடைகளையும் இதே மாதிரி ஆராய்க. அவற்றுடன், நீங்கள் விரும்பியபடி வேறு எண்களையும் எழுதிச் செய்தும் ஆராய்க. அவ்வண்ணமாகவே,

பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளுக்கு உட்பட நேர் நிறையெண்களின் தொடை அடைக்கப்பட்டுள்ளதா இல்லையா என அறிக.

இனி, நிறை எண் தொடை ஒன்றை எடுத்துக்கொள்க. பல வினாக்களை எழுதிச் செய்து, கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளுள் எதற்குட்பட நிறையெண் தொடை அடைக்கப்பட்டுள்ளது என அறிக. அதேபோல, விகிதமுறுமெண் தொடை எச்செய்கைகளுக்கு உட்பட அடைக்கப்பட்டது எனவும் அறிக.

பயிற்சி 8—4

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடைகள், கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய கணிதச் செய்கைகளுள் எவற்றுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டுள்ளன, எவற்றுக்குட்பட அடைக்கப்படவில்லை எனக் காண்க : ஓர் உதாரணம் தரப்பட்டுள்ளது.

1. முழுவெண் தொடை :

விடை :

கூட்டல், பெருக்கல், ஆகியவற்றுக்கு உட்பட அடைக்கப்பட்டது. கழித்தல், வகுத்தல் ஆகியவற்றுக்குட்பட அடைக்கப்படவில்லை.

2. ஒற்றை எண்களின் தொடை

3. இரட்டை எண்களின் தொடை

4. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\}$

5. $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$

6. $\{\frac{1}{2}, 1, 2\}$

7. பின்வருவனவற்றை நிரப்பி எழுதுக :—

(i) நேர் நிறையெண் தொடையானது, கூட்டல்........ஆகிய கணிதச் செய்கைகளுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டது. கழித்தல், வகுத்தல் ஆகிய செய்கைகளுக்குட்பட அது அடைக்கப்படவில்லை.

(ii) நிறையெண் தொடையானது,........., ...பெருக்கல் ஆகிய மூன்று கணிதச் செய்கைகளுக்குமுட்பட அடைக்கப்பட்டது. வகுத்தலுக்குட்பட அது அடைக்கப்படவில்லை.

(iii) ....தொடையானது, கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் ஆகிய நான்கு கணிதச் செய்கைகளுக்குமுட்பட அடைக்கப்பட்டது.

வகுபடுமியல்பு

இரட்டையெண் எதுவும் இரண்டால் செப்பமாக வகுபடும் என்பதை நீங்கள் அறிவீர்கள். செப்பமாக வகுபடும் எனும்போது, ஈவு ஒரு

நிறையெண் எனவும், மீதி பூச்சியம் எனவும் பொருள்படும். 3 இன் பெருக்கங்கள் யாவும் 3 ஆற் செப்பமாக வகுபடும். முன்தந்த பயிற்சிக்கு விடையளிக்கும்போது, இரட்டை எண்களின் தொடையானது கூட்டலுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கண்டிருப்பீர்கள். அதாவது, இரட்டை எண்கள் இரண்டின் கூட்டுத்தொகையும் ஓர் இரட்டை எண்ணே ஆகும். 5 இன் பெருக்கங்களின் தொடை கூட்டலுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டதா ? 12 இன் பெருக்கங்களின் தொடை கூட்டலுக்கு உட்பட அடைக்கப்பட்டுள்ளதா ? n இன் பெருக்கங்களின் தொடை ($n \epsilon Z^+$) கூட்டலுக்குட்பட அடைக்கப்பட்டுள்ளதா ? மேலே கூறப்பட்ட தொடைகள் பெருக்கலுக்குட்படவும் அடைக்கப்பட்டுள்ளனவா என ஆராய்க.

இரு நிறையெண்கள் ஒரு பொதுச் சினையைக் கொண்டனவாயின், அவ்விரு நிறை எண்களின் கூட்டுத்தொகையும் அப்பொதுச் சினையால் வகுபடும். உதாரணமாக 25, 35 ஆகிய ஒவ்வொன்றும் 5 ஐப் பொதுச் சினையாகக் கொண்டுள்ளன. அவற்றின் கூட்டுத்தொகையாகிய 60 உம் 5 ஆற் செப்பமாக வகுபடுமென அறிவீர்கள்.

$$10 + 15 = (5 \times 2) + (5 \times 3) = 5 \times (2 + 3)$$

$$30 + 69 = (3 \times 10) + (3 \times 23) = 3 \times (10 + 23)$$

$$2m + 2n = 2 \times (m + n) \qquad (m, n \epsilon Z)$$

இதை, இரண்டுக்கு மேற்பட்ட நிறையெண் உறுப்புக்கள் உள்ள சந்தர்ப்பங்களுக்கும் விரிவுபடுத்தல் கூடும்.

$6 + 8 + 10$ என்பதை ஆராய்க.

$$6 + 8 = 2 \times (3 + 4)$$

$$\begin{aligned} 6 + 8 + 10 &= (6 + 8) + 10 \\ &= 2 \times (3 + 4) + 2 \times 5 \\ &= 2 \times [(3 + 4) + 5] \\ &= 2 \times (3 + 4 + 5) \end{aligned}$$

எனவே, இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நிறைவெண்களுக்குப் பொதுவான சினை ஒன்றிருப்பின், அந்நிறைவெண்களின் கூட்டுத் தொகைக்கும் அச்சினை பொதுவானதாகும். அதாவது, பொதுச் சினையானது, நிறையெண்கள் ஒவ்வொன்றையும் அவற்றின் கூட்டுத் தொகையையும் செப்பமாக வகுக்கிறது.

பின்வருவனவற்றை ஆராய்க :—

(i) $(5 \times 10^3) + (6 \times 10^2) + (1 \times 10) = 5610$

(ii) $(8 \times 10^4) + (3 \times 10^2) + (7 \times 10) = 80370$

(iii) $(a \times 10^3) + (b \times 10^1) \qquad (a \epsilon Z ; \ b \epsilon Z)$

இவை ஒவ்வொன்றும், செப்பமாக வகுக்கும் எண்ணொன்றைப் பொதுவாகக் கொண்டிருப்பதை அறிவீர்கள். வகுக்கும் அவ்வெண்ணை நீங்கள் கண்டுபிடிக்க முடியுமா ? தசம எண் குறியீட்டு முறையிலே எழுதப்படும் எண்களுள், ஒன்றுகளின் இடத்திலுள்ள இலக்கம் பூச்சியமாக அமைகின்ற எண்கள் எல்லாம், 10 ஆற் செப்பமாக வகுபடும் என்பதை இதிலிருந்து நீங்கள் அறிவீர்கள். அதாவது, தசம எண் குறியீட்டு முறையிலே எழுதப்படும் எண்களுள் இறுதி உறுப்பு (வலது புறத்தேயுள்ள உறுப்பு) 0 ஆக உள்ளவை எல்லாம் 10 ஆற் செப்பமாக வகுபடும்.

$$10_{\text{இரண்டு}} = 2_{\text{பத்து}}$$

இவ்வண்ணமே துவித முறையிலே எழுதுகையில், கடைசி உறுப்பு 0 ஆகவுள்ள நிறையெண் இரண்டால் ($10_{\text{இரண்டு}}$) செப்பமாக வகுபடும்.

பின்வருவனவற்றுள் எவை இரட்டை எண்கள், எவை ஒற்றை எண்கள் என்று கூற முடியுமா ?

(i) $101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $100100_{\text{இரண்டு}}$ (iii) $101011_{\text{இரண்டு}}$

(iv) $100001_{\text{இரண்டு}}$

பயிற்சி 8–5

1. $10+a\,(a>o, a\in Z)$ என்ற எண் இரட்டை எண்ணாயின், a இன் ஆட்சி என்ன ?

2. $10+b\,(b>o, b\in Z)$ என்ற எண் மூன்றின் பெருக்கமாயின் b இன் ஆட்சி என்ன ?

3. பின்வரும் கூட்டல்களைச் செப்பமாக வகுக்கும் எண் ஒன்று காண்க :

(அ) $(3\times 5)+(2\times 5)$

(ஆ) $(7\times 9)+(8\times 3)$

(இ) $(p\times q)+(p\times r)$ $(p, q, r\in Z)$

(ஈ) $(3\times 10^3)+(6\times 10^2)+(5\times 10)$

4. இரட்டை எண்களின் தொடை P, மூன்றின் பெருக்கங்களின் தொடை Q எனின், $P\cap Q$ யாது ?

5. $M=\{x : x=5n+2, n\in Z^+\}$ தொடை M யாது என்பதைச் சொற்களால் விளக்குக.

6. 0 இல் முடிவுறும் துவித எண்கள் இரண்டாற் செப்பமாக வகுபடும். 00, 000 என முறையே முடிவுறும் துவித எண்களைச் செப்பமாக வகுக்கும் எண்கள் யாவை ?

7. சினை காண்க: (a, b, c ஆகியன நிறையெண்களாகும்

(i) $2ab+ac-3ad$

(ii) $5n^2m-10mn$

(iii) $7a^2bc-7ab^2c+7ab^2c$

(iv) $ab-2abc+3b^2$

(v) $px+qx+py+qy$

(vi) $2ax-4bx+5am-10bm$

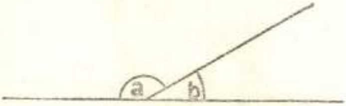
(vii) $2\pi r^2+2\pi rh$

(viii) $5m^2np-15mn+10n^2$

9 எடுகோள்களும் தேற்றங்களும்

உருவங்களை அமைத்துத் திருத்தமான அளவீடுகள் எடுப்பதன் மூலம் கேத்திரகணித உருவங்களின் இயல்புகள் சிலவற்றை முன்னைய வகுப்புக்களிற் பெற்றது உங்களுக்கு ஞாபகம் இருக்கலாம். அவற்றுட் சிலவற்றை இங்கு குறிப்பிட்டுள்ளோம். பின்வருவனவற்றிலுள்ள இடைவெளிகளை நிரப்பி, அவற்றை நினைவுகூர்க.

(i) ஒரு நேர்கோட்டில் இன்னொரு நேர்கோடு நின்றால் உண்டாகும் அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை..........

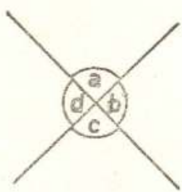


$a+b=......$

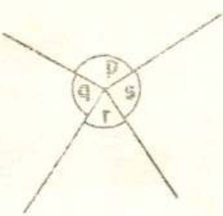
(ii) இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று குறுக்கறுத்தால் உண்டாகும் கோண அளவிற் சமனாகும்.

(அ) $a=......$

(ஆ) $......=d$



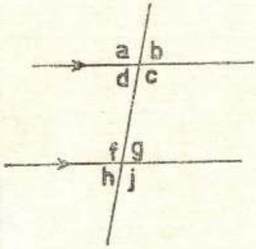
(iii) ஒரு புள்ளியைச் சூழ்ந்து அமைந்துள்ள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை..180°...



$p+q+r+s=......$

(iv) இரு சமாந்தர நேர்கோடுகளை குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டினால் உண்டாகும்

(அ) ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் அளவில். சமன்
(ஆ) ....கோணச் சோடிகள் அளவிற் சமனுகும்.
(இ) குறுக்கோடியின் ஒரே பக்கத்தில் அமைந்துள்ள அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை.......



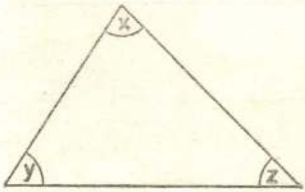
(அ) $c=f, d=$ ......

(ஆ) $b=g, a=$ ......,......,......

(இ) $c+g=$ ......,......$+f=180°$

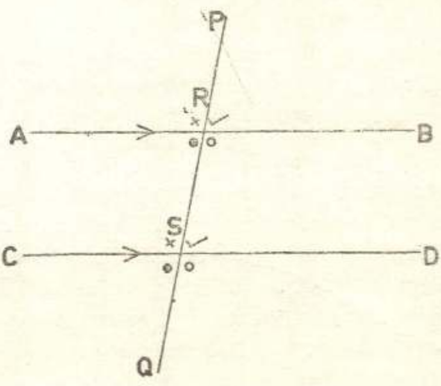
(v) முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180°.......

$x+y+z=$ ......



மேலே தரப்பட்டுள்ள (iv) ஐ நோக்குக. சமாந்தர கோடுகளின் இயல்புகள் மூன்றையும் அளவீடுகள் மூலந்தான் பெறவேண்டுமா ? (i), (ii), (iii), இலே தரப்பட்ட இயல்புகள் எதனையும் பயன்படுத்திச் சமாந்தர கோடுகளின் இயல்புகள் ஒன்றையேனும் நியாய முறையாற் பெற முடியாதா ? இவற்றைப் பெற முடியுமாவென முயன்று பார்க்க.

ஒத்த கோணச் சோடிகளின் இயல்பையும் மேற் கூறிய (i), (ii), (iii), இற் சிலவற்றையும் பயன் படுத்திச் சமாந்தர கோடுகளின் மற்றைய இரு இயல் புகளேயும் நியாயமுறை



உரு 9–1

யாற் பெறமுடியுமா ? பின்வரும் அட்டவணை 9–1 ஐ நிரப்புதல் மூலம், அவ்வியல்புகளுள் ஒன்றினைப் பெறுவீர்கள்.

கூற்று	காரணம்
1. $P\hat{R}B = R\hat{S}D$	1. ஒத்த கோணச் சோடிகள்.
2. $P\hat{R}B = \ldots\ldots$	2. தே$_1$ (குத்தெதிர்க் கோணங்கள்)
3. $R\hat{S}D = A\hat{R}S$	3. ......
4. $P\hat{R}A = \ldots\ldots$	4. ஒத்த கோணச் சோடிகள்.
5. $P\hat{R}A = B\hat{R}S$	5. ......
6. $C\hat{S}R = B\hat{R}S$	6. ......

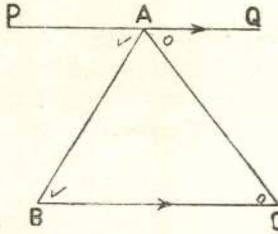
அட்டவணை 9–1

அட்டவணை 9–1 இன் கூற்றுக்கள் (3), (6) ஆகியவற்றிற் பெற்ற $R\hat{S}D$, $A\hat{R}S$; $C\hat{S}R$, $B\hat{R}S$ ஆகிய கோணச் சோடிகளை நோக்குக. அவை ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகளென நீங்கள் அறிவீர்கள். இதே முறையில் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய இயல்பைப் பெறுதற்கு முயல்க. சமாந்தர கோடுகளுக்குரிய இயல்புகளுள் யாதுமொன்றுடன் ஆரம்பித்தால் மற்றைய இரண்டையும் அதே நியாய முறையிற் பெறலாமென நீங்கள் காண்பீர்கள். எனவே, அளவீடுகளிலிருந்து பெறும் இயல்புகளுள் ஒன்றை ஏற்றுக் கொண்டாலே போதுமானதாகும். ஏனெனில் இதனைப் பயன்படுத்தி மற்றைய இரண்டையும் நியாய முறையாற் பெறலாம். எனவே, ஒன்றுவிட்ட கோணவியல்பை அளவீட்டாற் பெற்ற இயல்பாக நாம் ஏற்றுக்கொள்வோம்.

ஆறும் வகுப்பிலே முக்கோணி ஒன்றின் கோண அளவுகளின் கூட்டுத் தொகையை எவ்வாறு பெற்றோமென்பது இப்போது நினைவிருக்கிறதா ? முக்கோணிகள் பல வரைந்து அவற்றின் கோணங்களைத் திருத்தமாக அளக்க வேண்டியிருந்தது உங்களுக்கு நினைவிருக்கலாம். அளவீடுகள் எடுக்கும் போது எத்துணை கவனமாக இருப்பினும் வழுக்கள் தோன்றுமெனக் கணிதம் 8–1 இற் படித்திருப்பீர்கள். முக்கோணிகள் பலவற்றை அமைத்து, அவற்றின் கோணங்களைக் கவனமாக அளக்கும் முறையைத் தவிர்ந்த வேறு முறையில் இவ்வியல்பைப் பெற்றிருக்க முடியாதா ? கணிதம் 8–1

இலே ஒரேயொரு (பருமட்டான) முக்கோணி வரைந்து, அதன் கோணங்களை அளக்காது அவ்வியல்பைப் பெற்றது உங்களுக்கு நினைவிருத்தல் கூடும். அங்கு, நியாய முறையால் அவ்வியல்பைப் பெற்றோம். அவ்வியல்பைப் பெறுதற்கு வேறு எவ்வியல்புகளைப் பயன்படுத்தினோமென நினைவிருக்கிறதா ?

△ ABC இல் BC எனும் பக்கத்திற்குச் சமாந்தரமாக PQ ஐ வரைந்தோம். எனவே, $P\hat{A}B = A\hat{B}C$ எனவும், $Q\hat{A}C = A\hat{C}B$ எனவும் பெற்றோம். ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° எனப் பெற்றோம். ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 200 அலகுகளாயின், முக்கோணி ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை எவ்வளவாக அமையும் ?



உரு 9–2

பயிற்சி 9–1

1. போயா தினங்களில் வங்கிகள் பொதுசனத் தொடர்புக்கு மூடப்படுமெனக் கொள்வோமாயின், பின்வரும் நியாயம் சரியானதெனக் கூறுக.

"இன்று வங்கிகள் பொதுசனத் தொடர்புக்கு மூடப்பட்டுள்ளன".

∴ இன்று போயா தினமாகும்.

2. 18 வயதிற்கு மேற்பட்ட இலங்கைப் பிரஜைகள் எல்லோருக்கும் வாக்குரிமை உண்டெனக் கொள்க.

   (i) நிமலன் 19 வயதினன். அவன் வாக்குரிமைக்கு உரித்தானவனா ?

   (ii) நிமலன் இலங்கைப் பிரஜை. அவனுக்கு 19 வயதாயின், அவன் வாக்குரிமைக்கு உரித்தானவனா ?

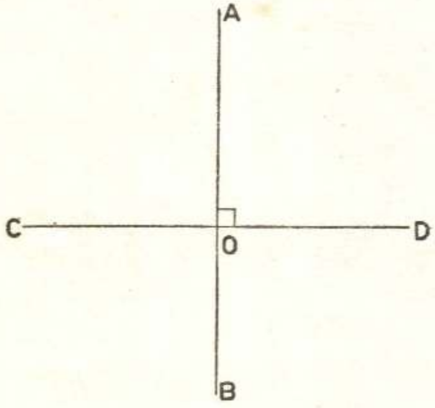
3. சூரியனிலிருந்து வெள்ளியின் தூரம், சூரியனிலிருந்து பூமியின் தூரத்திலுங் குறைந்தது. சூரியனிலிருந்து பூமியின் தூரம், சூரியனிலிருந்து செவ்வாயின் தூரத்திலுங் குறைந்ததாகும். பூமி, வெள்ளி, செவ்வாய் ஆகிய மூன்று கிரகங்களிலும் (i) சூரியனுக்கு அண்மையில் உள்ளது எது ? (ii) சூரியனுக்கு மிகத் தூரத்திலிருப்பது எது ?

4. 8 ஆம் வகுப்பின் A பிரிவிலுள்ள மாணவர்கள் எல்லோரும் சுற்றுலாவிற் சென்றனர். பின்வரும் நியாயஞ் சரியாவெனக் கூறுக.

சந்திரன் சுற்றுலாவிற் சென்முன்

∴ சந்திரன் 8 ஆம் வகுப்பு A பிரிவிலுள்ள மாணவன்.

5. உரு 9-3 இல் $A\hat{O}D = 90°$ ஆயின், நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° எனக் கொண்டு மற்றைய ஒவ்வொரு கோணமும் 90° என நிறுவுக.

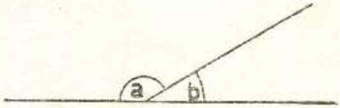


உரு 9-3

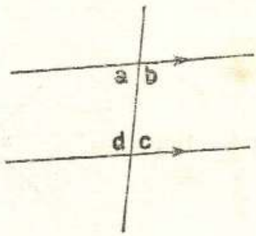
6. நேர்கோடொன்றில் அமைந்துள்ள அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை π ஆரையன் ஆயின், முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை π ஆரையன் எனக் காட்டுக.

முக்கோணி ஒன்றின் கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° என முதலில் அளவீட்டாற் பெற்றுளும், பின்னர் நியாய முறையாலும் அதைப் பெற்றோம். அளவீட்டாற் பெற்ற முடிபுகள் சில, பின்னர் நியாய முறையாற் பெறப்பட்ட சந்தர்ப்பங்கள் ஏதுங் கூற முடியுமா? நாங்கள் பெற்ற முடிபுகளைக் குறிக்கக் குறியீடுகள் பயன்படுத்தினல், அவற்றைப் பின்னர் குறிப்பிடுதற்கு இலகுவாக விருக்கும்.

ஒரு நேர்கோட்டில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோணவியல்பை **எ**$_1$ ஆலும், சமாந்தர கோடுகளின் ஒன்றுவிட்ட கோணவியல்பை **எ**$_2$ ஆலுங் குறிப்போம். இவற்றைப் பின்வரும் உருவங்களாலுங் குறித்துக் காட்டலாம்.

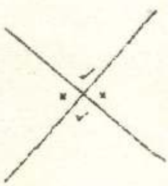


$a + b = 180°$ —— எ$_1$



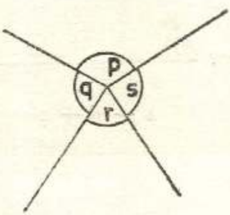
$a = c$
$b = d$ —— எ$_2$

நியாயமுறையாற் பெற்றவற்றுக்கு வேறு வகையான குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துவோம். இங்கு சிலவற்றைத் தந்துள்ளோம்.

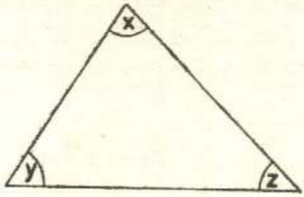


—— தே$_1$

இவ்வியல்பைச் சொற்களிற் கூறமுடியுமா? இதனை நியாய முறையாற் பெறுதற்கு எவ்வியல்பைப் பயன்படுத்தினோம்? (கணிதம் 7–2 அதி. 7 ஐப் பார்க்க.)



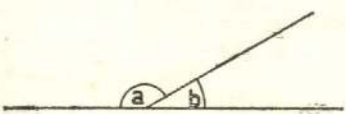
$p + q + r + s = 360°$ —— தே$_2$



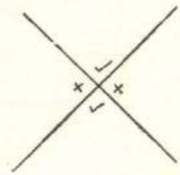
$x + y + z = 180^\circ$ —— தே$_3$

எ$_1$ இலிருந்து தே$_1$ ஐப் பெற்றோம். எனவே, இவற்றுக்குரிய தொடர்பைப் பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டலாம்.

எ$_1$ $\longrightarrow$ தே$_1$



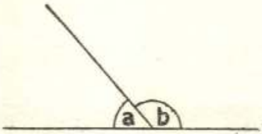
$a + b = 180^\circ \longrightarrow$



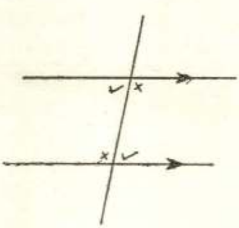
இவ்வண்ணம் தே$_2$ இற்கு எழுதுக.

எ$_1$, எ$_2$ ஆகியவற்றிலிருந்து தே$_3$ ஐப் பெற்றோமென அறிவீர்கள்.

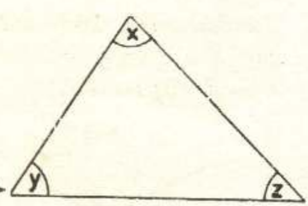
$\left.\begin{array}{c} \text{எ}_1 \\ + \\ \text{எ}_2 \end{array}\right\} \longrightarrow$ தே$_3$



$a + b = 180^\circ$



$\longrightarrow$



$x + y + z = 180^\circ$

ஒரேயொரு பருமட்டான உருவம் வரைந்து பெற்ற வேறு முடிபுகளை நினைவுபடுத்த முடியுமா ? நாற்பக்கல், ஐங்கோணி ஆகியவற்றின் அகக்கோணங்களின் இயல்புகளை நினைவுபடுத்தினுல், நாற்பக்கலை இரு முக்கோணிகளாகப் பிரித்து நாற்பக்கலின் அகக் கோணவியல்பைப் பெற்றது நினைவுக்கு வரும். முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆயின், நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 360° ஆக இருத்தல் வேண்டுமென அறிந்தோம். ஆனுல், முக்கோணியின் அகக்கோண வியல்பை நேர்கோடொன்றில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோணவியல்பி லிருந்து பெற்றோம். நேர்கோடொன்றில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 200 அலகுகளாயின், முக் கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை எவ்வள வாகவிருக்கும் ? நாற்பக்கல் ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை எவ்வளவாகவிருக்கும் ?

முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆயின், ஐங்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை எவ்வளவாகவிருக்கும்.

மேற்குறிப்பிட்ட இயல்புகளிலிருந்து கேத்திரகணித இயல்புகள் ஒன்றுடனென்று தொடர்புடையனவென உணர்வீர்கள். அவற்றின் தொடர்புகளைப் பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டலாம்.

முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோண அளவுகளின் கூட் டுத் தொகை 180°	→	நாற்பக்கல் ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை 360°

முக்கோணி ஒன்றின் அகக் கோண அளவுகளின் கூட் டுத் தொகை 180°	→	ஐங்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத் தொகை ....

இவ்வண்ணமே எத்தனை பக்கம் உள்ள பல்கோணிக்கும் நாம் நியாயங் கூறலாம்.

நாற்பக்கலின் அகக்கோணவியல்பைப் பயன்படுத்தி, ஐங்கோணியின் அகக்கோணவியல்பையும், ஐங்கோணியின் அகக்கோணவியல்பைப் பயன் படுத்தி அறுகோணியின் அகக்கோணவியல்பையும், அவ்வண்ணமே

மற்றைய பல்கோணிகளின் அகக்கோணவியல்புகளைப் பெறும் முறை பற்றி வகுப்பிற் படித்திருப்பீர்கள். எனவே, அவ்வியல்புகளுக்கு இடையிலான தொடர்புகளைப் பின்வருமாறு குறித்துக் காட்டலாம்.

முக்கோணி ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $180°$

↓

நாற்பக்கல் ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $360°$

↓

ஐங்கோணி ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $540°$

↓

....

↓

....

n ($n \geqslant 3$, $n \in z^{+}$) பக்கங்களுடைய பல்கோணியின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $(2n-4)$ செங்கோணங்களாக இருக்க வேண்டுமென ஓரேயொரு பருமட்டான உருவம் வரைந்து நியாய முறையாற் காட்டினேம். அதாவது, பல்கோணிகள் பலவற்றை வரைந்து அவற்றின் கோணங்களை அளக்காமலே மேற்படி முடிபைப் பெற் றுள்ளோம். நியாய முறையாற் பெற்ற முடிபுகள் வேறு சில கூறமுடியுமா ? அவற்றுட் சிலவற்றை இங்கு தந்துள்ளோம்.

1. இரு நேர்கோடுகள் ஒன்றையொன்று குறுக்கறுக்கும்போது உண்டாகும் குத்தெதிர்க்கோணங்கள் அளவிற் சமனாகும் (தே$_1$)
2. முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை $180°$ ஆகும் (தே$_3$).
3. இணைகரமொன்றின் எதிர்ப்பக்கங்கள் நீள அளவிற் சமமாகும்.
4. இணைகரமொன்றின் மூலைவிட்டங்கள் ஒன்றையொன்று இரு சம கூறிடும்.
5. முக்கோணி ஒன்றின் இரு பக்கங்கள் நீள அளவிற் சமமாயின், அப்பக்கங்களுக்கு எதிராக அமைந்துள்ள கோணங்கள் அளவிற் சமமாகும்.

இங்கு குறிப்பிட்டுள்ளவை போன்ற நியாய முறையாற் பெற்ற முடிபுகள் **தேற்றங்கள்** எனப்படும். இவ்வதிகாரத்திலே குறிப்பிட்டுள்ள தேற்றங்கள் எல்லாவற்றையும் நிரைப்படுத்தி எழுதுக.

n பக்கங்கள் கொண்ட பல்கோணி ஒன்றினது அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகையைப் பெறுதற்குக் கையாண்ட நியாயத் தொடரியை நோக்கினால், அதைப் பெறுதற்கு முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினோமென அறிவீர்கள். முக்கோணி ஒன்றின் அகக்கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை பற்றிய இயல்பை நிறுவுதற்கு நேர்கோடொன்றில் அமைந்துள்ள அடுத்துள கோணங்கள் பற்றிய இயல்பையும் ($எ_1$), சமாந்தர கோடுகளின் ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் பற்றிய இயல்பையும் ($எ_2$) பயன்படுத்தினோம். $எ_1$, $எ_2$ ஆகிய இரு இயல்புகளையும் வேறு ஏதாவது இயல்பு $எ_0$ இலிருந்து நிறுவமுடியாதா ? மேலும் $எ_0$ ஐ நிறுவுதற்கு வேறு சில இயல்புகள் வேண்டும். இவ்வண்ணம் ஆராய்ந்தோமானால், இத்தொடரிக்கு முடிவே இராது. ஆகவே, மேலும் புதிய இயல்புகள் பெறுதற்கு நாம் சில இயல்புகளுடன் ஆரம்பித்தே ஆக வேண்டுமென்பதை நீங்கள் உணர்ந்திருப்பீர்கள். $எ_1$, $எ_2$ ஆகியவை போன்ற இயல்புகள் ஆரம்ப இயல்புகளாகக் கருதப்படும். இத்தகைய இயல்புகள் **எடுகோள்கள்** எனப்படும். தெரிந்த இயல்புகளைப் பயன்படுத்திப் புது இயல்புகளை நிலைநிறுத்துவதற்குப் பயன்படுத்தும் நியாயத் தொடரி **நிறுவல்** எனப்படும். நிறுவல்களை நிலை நிறுத்தற்கு எடுகோள்கள் மட்டும் போதாது. அதற்கு வேண்டிய மற்றைய அம்சங்களைப் பற்றிப் பின்னைய வகுப்புக்களிற் படிப்பீர்கள்.

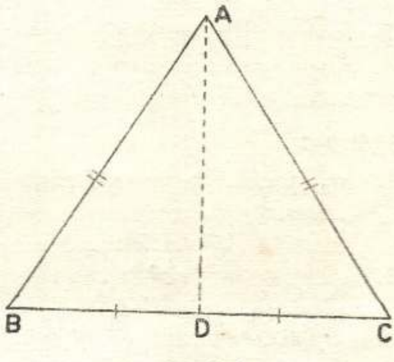
எமது கணித நூல்களிலே $எ_1$, $எ_2$ எனும் இரு எடுகோள்களை மட்டுமா இதுவரை நாம் பயன்படுத்தியுள்ளோம் ? மேலுஞ் சில எடுகோள்களைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம் என்பது, பின்வரும் உதாரணத்திலிருந்து புலனாகும்.

உதாரணம்

AB = AC ஆகவுள்ள முக்கோணி ABC இல் D, BC இன் நடுப்புள்ளி. AD, BD இற்குச் செங்குத்தென நிறுவுக.

இப்போது இதனை நிறுவ முயல்வோம்.

$\triangle$ ABD, $\triangle$ ACD ஆகியவற்றை நோக்குக.



உரு 9-4

கூற்று	காரணம்
1. $AB = AC$	1 ....
2. $BD = DC$	2. ....
3. $AD = AD$	3. ....
4. $\triangle ABD \equiv$	4. ....
5. $A\hat{D}B = A\hat{D}C$	5. ....
6. $A\hat{D}B + A\hat{D}C =$	6. ....
7. $A\hat{D}B = A\hat{D}C = 90°$	7. (5), (6) ஆகியவற்றிலிருந்து

அட்டவணை 9–2

மேற்படி நிறுவலுக்குப் பயன்படுத்திய எடுகோள்கள் யாவை? கூற்று (4) இல் ஒருங்கிசையலின் ப. ப. ப. விதியைப் பிரயோகித்துள்ளோம்.

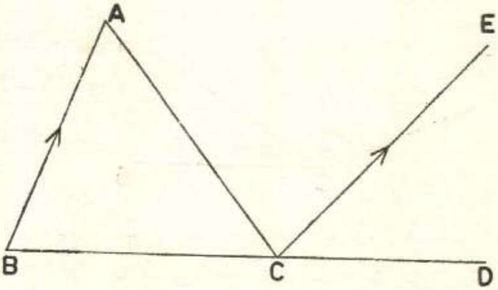
தரப்பட்ட நீள அளவுகளைக் கொண்ட முக்கோணிகள் வரைந்து, மேற்கூறிய ஒருங்கிசையல் விதியைப் பெற்றோமென்பது உங்களுக்கு நினைவு இருக்கும். அதாவது, இம்முடிபைப் பரிசோதனை மூலம் பெற்றோம். ஒருங்கிசையலுக்குரிய விதிகள் யாவற்றையும் எடுகோள்களாகக் கொள்வோம். ஒருங்கிசையலின் விதிகளைப் பயன்படுத்திப் பல இயல்புகளைக் கணிதம் 8–1 இல் நிறுவியுள்ளோம்.

பைதகரசின் தேற்றத்தை நிறுவுதற்கு அதிகாரம் 6 இலே, இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் இயல்புகளைப் பயன்படுத்தியுள்ளோம். அதில், இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் இவ்வியல்பை எடுகோளாகக் கொண்டோம். அவ்வெடுகோளை எழுத முடியுமா?

நாம் இங்கு எடுகோள்களாகக் கொண்ட $எ_1$, $எ_2$ ஒருங்கிசையல் விதி ஆகியன போன்ற இயல்புகள் "**யூகிளிட்டின் மூலகங்கள்**" என்பதைத் தழுவிய கணித பாட நூல்களிலே தேற்றங்களாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை இங்கு கூறுதல் பொருத்தமாகும்.

பயிற்சி 9–2

1. $எ_2$ ஐயும், ஒருங்கிசையலின் விதி ஒன்றினையும் மாத்திரம் பயன்படுத்தி, நாற்பக்கல் ஒன்றின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமாயின், அவை அளவிற் சமமென நிறுவுக.
2. சமாந்தரகோடுகளின் அகக்கோணவியல்பையும் சமத்துவத்தின் இயல்புகளையும் மாத்திரம் பயன்படுத்தி, நாற்பக்கல் ஒன்றின் எதிர்ப்பக்கங்கள் சமாந்தரமாயின், அதன் எதிர்க்கோணங்களும் அளவிற்சமமெனன நிறுவுக.



உரு 9–5

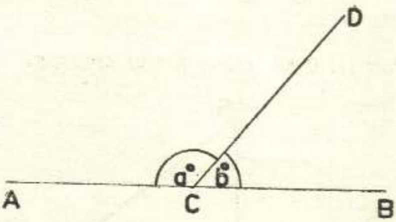
3. எ$_2$ ஐயும் சமாந்தரகோடுகளின் ஒத்த கோணவியல்பையும் சமத்துவ இயல்பொன்றையும் பயன்படுத்தி, உரு 9–5 இல் $A\hat{C}D = C\hat{A}B + A\hat{B}C$ என நிறுவுக.

4. எ$_2$ ஐயும், சமாந்தரகோடுகளின் ஒத்த கோணவியல்பையும், சமத்துவத்தின் இயல்பொன்றையும் மாத்திரம் பயன்படுத்தி, உரு 9–5 இலுள்ள முக்கோணி ABC இன் அகக்கோணங்களினது அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° என நிறுவுக.

5. ஓர் இணைகரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள் நீள அளவிற் சமமென நிறுவுக. எதிர்பபுக்கங்கள் சமாந்தரமாகவுள்ள நாற்பக்கல் இணைகரம் என்பதையும், எ$_2$ ஐயும் மாத்திரம் பயன்படுத்துக.

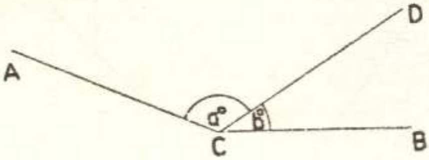
தேற்றங்கள் சில நிறுவுதற்கு நாம் இதுவரை பயன்படுத்திய எடுகோள்களின் தொடை ஒன்றை வினு 6 கொண்டுள்ளது. இடைவெளிகளை நிரப்புதல் மூலம் அவற்றைப் பூரணமாக்குக.

6. (i) ஒரு நேர்கோட்டில் இன்னோர் நேர்கோடு நிற்குமாயின், அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை........



$a + b = \ldots\ldots$

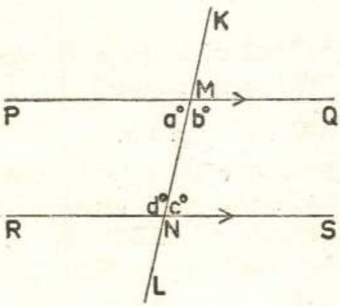
(ii) ஒரு சோடி அடுத்துள்ள கோண அளவுகளின் கூட்டுத்தொகை 180° ஆயின், பொதுச் சிறையின் இருபக்கத்திலுமுள்ள அடுத்துள கோணங்களின் சிறைகள்...........



$a+b=180°$ ஆயின்,

ACB ...

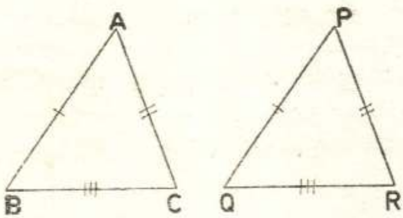
(iii) இரு சமாந்தர நேர்கோடுகள் குறுக்கோடி ஒன்றினுல் வெட்டப்படும் போது உண்டாகும் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் அளவிற்................



$a=...$

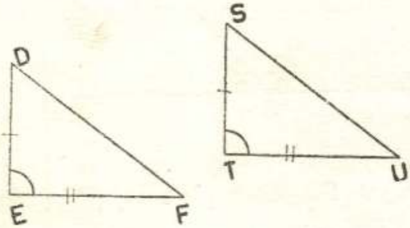
$...=d$

(iv) ஒருங்கிசையலின் ப. ப. ப. விதியை எழுதுக.



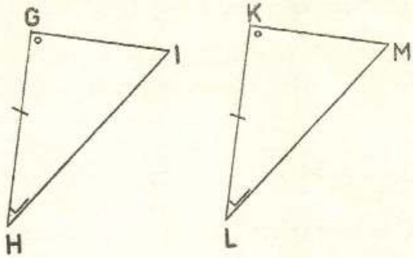
$\triangle ABC \equiv \triangle ...$

(v) ஒருங்கிசையலின் ப. கோ. ப. விதியை எழுதுக.



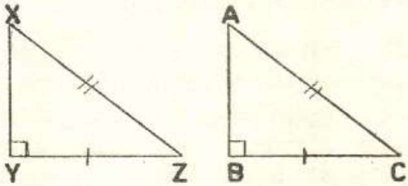
$\triangle DEF \equiv \triangle ...$

(vi) ஒருங்கிசையலின் கோ. ப. கோ. விதியை எழுதுக.



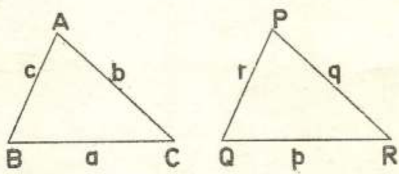
$\triangle GHI \equiv \triangle$ ..

(vii) ஒருங்கிசையலின் செம்ப. ப. விதியை எழுதுக.



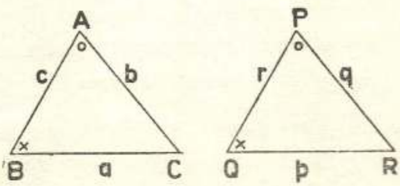
$\triangle XYZ \equiv \triangle$ ...

(viii) இரு முக்கோணிகள் சமகோணமுடையனவாயின் அவற்றின் ஒத்த பக்கங்களின் அளவுகள்.................



$\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \hat{Q}$,
$\hat{C} = \hat{R}$ ஆயின்,
$a : p = b : -$
$= - : r$

(ix) இரு முக்கோணிகளில் அவற்றின் பக்கங்களின் அளவுகள் விகித சமமாயின் அம்முக்கோணிகள்...... .



$a : p = b : q$
$= c : r$ ஆயின்,
$\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \ldots$,
$\ldots = \hat{R}$

மேலே தரப்பட்ட பயிற்சியில் வினா 6 (i), (ii) ஆகியவற்றின் விடைகளை ஒப்பிடுக.

7—CP 9457 (70/10)

(i) ACB ஒரு நேர்கோடாயின், $(a+b)=180°$

(ii) $(a+b)=180°$ ஆயின், ACB ஒரு நேர்கோடு.

இவ்விரு கூற்றுக்களைப் பற்றியும் யாது கூறலாம்? அதே பயிற்சியில் வினு 6 (viii), (ix) ஆகியவற்றின் விடைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

(viii) $\triangle$ ABC, $\triangle$ PQR என்னும் இரு முக்கோணிகளில் $\hat{A}=\hat{P}, \hat{B}=\hat{Q}, \hat{C}=\hat{R}$ எனின், $a:p=b:q=c:r$

(ix) $\triangle$ ABC, $\triangle$ PQR, என்னும் இரு முக்கோணிகளில் $a:p=b:q=c:r$ எனின் $\hat{A}=\hat{P}, \hat{B}=\hat{Q}, \hat{C}=\hat{R}$.

கூற்றுக்கள் (viii), (ix) ஆகியனவற்றுள் ஒன்று மற்றையதன் **மாறுநிலை** எனப்படும். அதேபோன்று (i), (ii) ஆகிய இரண்டிலும் ஒன்று மற்றையதன் மாறுநிலை ஆகும். கூற்றுக்கள் (viii), (ix) ஆகியவற்றைக் கூர்ந்து ஆராய்க. கூற்று (viii) இலே சமகோண முக்கோணிகள் இரண்டுடன் ஆரம்பித்து, ஒத்த பக்கங்களின் நீள அளவுகள் விகிதசமம் என்ற உண்மையைப் பெற்றேம். ஆனல் கூற்று (ix) இல் பக்கங்கள் விகிதசமமாய் அமைந்த இரு முக்கோணிகளுடன் ஆரம்பித்து, அவ்விரு முக்கோணிகளும் சமகோணமுடையவை என்பதைப் பெற்றேம். கூற்று (viii) இலே, ஆரம்பமாகக் கொள்ளப்பட்ட அதே இயல்பு, கூற்று (ix) இலே பெறப்பட்ட இயல்பாகும். அதே போன்று, (ix) இல் ஆரம்பமாகக் கொள்ளப்பட்ட இயல்பு, கூற்று (viii) இற் பெறப்பட்ட இயல்பாகும். மேற்கூறிய கூற்றுக்கள் போன்றவற்றிலே, பெறப்பட்ட இயல்பு **முடிபு** எனப்படும், இம் முடிபைப் பெறுதற்கு என்ன இயல்புடன் ஆரம்பித்தோமோ, அது **கருதுகோள்** எனப்படும். கூற்று (viii) இல் கருதுகோளின் கீழ் கோடிடப்பட்டுள்ளது. அங்கு $a:p=b:q=c:r$ என்பது முடிபாகும். கூற்று (ix) இன் கருதுகோளையும் முடிபையும் எழுதுக. ஒன்று மற்றையதன் மாறுநிலையாக அமையும் வகையில் இரு கூற்றுக்கள் அமையின், ஒன்றின் கருதுகோள் மற்றையதன் முடிபாகவும், அதன் முடிபு மற்றையதன் கருதுகோளாகவும் அமையும்.

கணித பாடத்திலே மேற்படி கூற்றுக்கள் போன்றவற்றைப் படித்த வேறு சந்தர்ப்பங்கள் ஏதும் உங்களுக்கு நினைவிருக்கிறதா? சமாந்தர கோடுகளினது ஒன்றுவிட்ட கோணவியல்பு பற்றி நீங்கள் அறிவீர்கள். இரு கோடுகளைக் குறுக்கோடி ஒன்று வெட்டும்போது உண்டாகும் ஒன்றுவிட்ட கோணச் சோடிகள் அளவிற் சமமாயின், அவ்விரு

கோடுகளுஞ் சமாந்தரமானவை எனும் இயல்பை இந்நூலின் 2 ஆம் அதிகாரத்திற் பயன்படுத்தினோம். (அத்துடன் கணிதம் 6–1 இன் அதி. 9 ஐயும் பார்க்க).

மாறுநிலைகள் உண்மையாக அமைந்த கூற்றுக்களையே இதுவரை நாம் நோக்கினோம். தரப்பட்ட கூற்று உண்மையாயின், அதன் மாறுநிலையும் உண்மையாகுமா ? இரு முக்கோணிகள் ஒருங்கிசை யின், அவை உள்ளடக்கும் பரப்பளவு சமமாகுமென நீங்கள் அறிவீர்கள். ஆனால், இரு முக்கோணிகள் சமபரப்பளவை உள்ளடக்குமாயின், அவை எப்பொழுதும் ஒருங்கிசையமாட்டா என்பதும் உங்களுக்குத் தெரியும். இங்கு, மாறுநிலை உண்மையல்ல என்பதை அறிவீர்கள். கீழே தந்துள்ள கூற்றையும் அதன் மாறுநிலையையும் நோக்கி, மாறுநிலை உண்மையாவென ஆராய்க.

“ ஒரு நாற்பக்கல் சதுரமாயின், அதன் மூலைவிட்டங்கள் நீள அளவிற் சமம் ” இது உண்மையென்பது உங்களுக்குத் தெரியும். அதன் மாறுநிலை பின்வருமாறு :—

“ ஒரு நாற்பக்கலின் மூலைவிட்டங்கள் நீள அளவிற் சமமாயின், அந்நாற்பக்கல் ஒரு சதுரமாகும் ”.

இரண்டாங்கூற்று உண்மையானதா ?

மேலே தந்துள்ள உதாரணங்களிலிருந்து தரப்பட்ட கூற்று உண்மையாயின், அதன் மாறுநிலை உண்மையற்றதாகவும் இருக்கலாமென அறிவீர்கள்.

இப்போது வேறுவகைக் கூற்றுக்களையும் அவற்றின் மாறுநிலைகளையும் நோக்குவோம்.

“ **முன் இறுதிப்போட்டியில் வெற்றியீட்டுபவர்** இறுதிப்போட்டியில் பங்குபற்றத் தகுதியுடையவராவர் ”.

“ இறுதிப்போட்டியில் பங்குபற்றத் தகுதியுடையவர் முன் இறுதிப் போட்டியில் வெற்றியீட்டுபவராவர்.

மேலேயுள்ள கூற்றுக்கள் ஒவ்வொன்றினது கருதுகோளையும், முடிபையுங் கூறமுடியுமா ? இத்தகைய கூற்றுக்களிற் கருதுகோள் நேரடியாகத் தோன்றுது. முதற்கூற்றிலே கருதுகோள் தடித்த எழுத்தில் தரப்பட்டுள்ளது. முதற்கூற்றின் கருதுகோள் இரண்டாவது கூற்றின் முடிபாக வருகின்றது. எனவே, அக்கூற்றுக்கள் இரண்டுள்ளும் ஒன்று மற்றையதன் மாறுநிலையாகும். “ நாதன், நாவலர் மகாவித்தியாலயக் கிறிக்கற் குழுவின் அங்கத்தவனாயின், நாதன் நாவலர் மகாவித்தியாலய மாணவனாவான் ”.

பின்வருங் கூற்றில் வெளியிடங்களை நிரப்பி மேலே தந்துள்ள கூற்றின் மாறுநிலையை எழுதுக.

8—CP 9457 (70/10)

" நாதன், நாவலர் மகாவித்தியால மாணவனுயின், நாதன் ......" தரப்பட்டுள்ள கூற்று உண்மையாயின், அதன் மாறுநிலை உண்மையாகலாம். உண்மையற்றதாகலாமென்பதை இவ்வதிகாரத்தில் இதுவரை நோக்கிய உதாரணங்களிலிருந்து அறிவீர்கள்.

பயிற்சி 9–3

1. பின்வருவன ஒவ்வொன்றிலும் கருதுகோளின் கீழ் கீறிடுக.

(i) நாளை போயாதினமாயின், நாளை விடுமுறை தினமாகும்.

(ii) திரு. பண்டா கண்டிச் சிங்களவராயின், அவன் இலங்கையராவான்.

(iii) இரட்டை எண்கள் இரண்டைக் கூட்டின் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை இரட்டை எண்ணுகும்.

(iv) திரு. பண்டா இலங்கையராயின், அவன் கண்டிச் சிங்களவராவான்.

(v) நாளை விடுமுறை தினமாயின், நாளை போயாதினமாகும்.

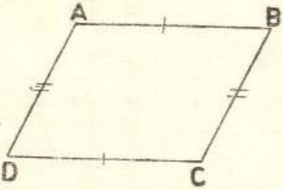
(vi) ஓர் எண் 5 ஆல் வகுபடுமாயின், அவ்வெண்ணின் இறுதி இலக்கம் 0 அல்லது 5 ஆகும்.

(vii) $\triangle$ ABC இல் $AB = AC$ ஆயின், $\hat{B} = \hat{C}$ ஆகும்.

(viii) ஓர் எண்ணின் இறுதி இலக்கம் 0 அல்லது 5 ஆயின், அவ்வெண் 5 ஆல் வகுபடும்.

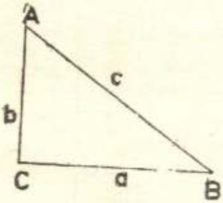
(ix) இரு எண்களின் கூட்டுத்தொகை இரட்டை எண் ஆயின், அவை ஒவ்வொன்றும் இரட்டை எண்ணுகும்.

(x)



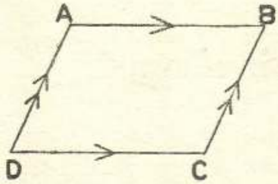
ABCD என்னும் நாற்பக்கலில் $AB = DC$, $AD = BC$ ஆயின், $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ ஆகும்.

(xi)



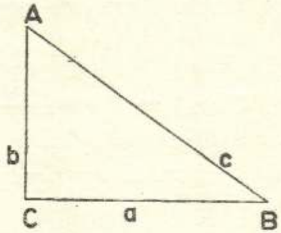
$\triangle$ ABC இல் (a, b, c பக்கங்களின் நீள அளவுகள்) $c^2 = a^2 + b^2$ ஆயின், $\hat{C} = 90°$ $(a, b, c \in R)$

(xii)



ABCD என்னும் நாற்பக்கலில் $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$ ஆயின், $AB = DC$, $AD = BC$ ஆகும்.

(xiii)



$\triangle ABC$ இல் $\hat{C} = 90°$ ஆயின், (a, b, c பக்கங்களின் நீள அளவுகள்) $c^2 = a^2 + b^2$
($a, b, c \in R$)

(xiv) $\triangle ABC$ இல் $\hat{B} = \hat{C}$ ஆயின், $AB = AC$ ஆகும்.

2. வினா 1 இலே தரப்பட்டுள்ள கூற்றுக்களிலே ஒன்று மற்றதன் மாறுநிலையாக அமையுங் கூற்றுக்களைச் சோடிப்படுத்துக.

3. வினா 2 இலே கூற்றும் மாறுநிலையும் உண்மையாகவுள்ள சோடிகளைத் தெரிந்தெடுத்து எழுதுக.

10 நிகழ்ச்சியின் மீடிறன்

ஒரு புத்தகத்தை வாசிக்கும்போது, சில சொற்கள் மீண்டும் மீண்டும் பலமுறை பிரயோகிக்கப்படுவதை நீங்கள் அவதானித்திருத்தல் கூடும். இலங்கை ஒலிபரப்புக் கூட்டுத்தாபன வர்த்தக ஒலிபரப்பு நிகழ்ச்சிகளைக் கேட்கும் போது, குறிப்பிட்ட நேரத்தில் சில விளம்பரங்கள் மற்றையவற்றிலும் பார்க்கக் கூடுதலாக ஒலிபரப்பப்படுவதையும் நீங்கள் அவதானித்திருக்கலாம். பாடசாலை முன்றிலில் நின்று பார்க்கும்போது, அவ்வழியே செல்லும் மோட்டார் வாகனங்கள், சைக்கிள் வண்டிகள் ஆகியனவற்றின் எண்ணிக்கையை நீங்கள் கணக்கிட்டதுண்டா ? இவையும் இவைபோன்ற பிறவும், அன்றாட வாழ்விலே நடைபெறும் சில நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இந்த நூலில் முதலாவது அதிகாரத்தை எடுத்து, முதற் பந்தியை வாசியுங்கள். அதில், மிகக் கூடுதலாகப் பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ள சொல்லைக் கண்டுபிடியுங்கள். அது எத்தனை முறை பிரயோகிக்கப்பட்டுள்ளது ? பின், முதற் பக்கத்தை முழுதாகப் படியுங்கள். அதிலே, மிகக் கூடுதலாகப் பிரயோசிக்கப்பட்டுள்ள சொல்லைக் கண்டுபிடியுங்கள். அந்தப் பக்கத்தில், ஒரு வரியில் உள்ள சொற்களின் சராசரி எண்ணிக்கை என்ன ?

பின்வரும் உதாரணத்தை நோக்குக. குறித்த ஒரு கோணத்தை அளந்து, கிட்டிய பாகையிலே அதன் அளவைத் தருமாறு, 20 பேர் கொண்ட ஒரு தொடை மாணவர்கள் பணிக்கப்பட்டனர். அவர்கள் அளந்து கொடுத்த அளவுகள் வருமாறு :—

$$50°, 51°, 50°, 50°, 49°, 52°, 48°, 53°,$$
$$50°, 50°, 51°, 52°, 51°, 50°, 50°, 51°,$$
$$51°, 48°, 52°, 50°.$$

இந்த அளவீட்டுத் தொடையின் சராசரியை, முதலாவது தசம தானத்துக்கு அண்ணளவாகக் காண்க. மிகக் கூடிய தரம் மீளும் அளவு யாது ? மிகக் கூடிய தரம் மீளும் அளவு 50° என நீங்கள் அவதானித்திருப்பீர்கள். இந்த அளவீட்டுத் தொடையின் **மோடு** 50° ஆகும். எந்த ஓர் எண் தொடையிலும், மிகக் கூடிய தரம் மீளும் எண், “ மோடு ” எனப்படும். இந்தத் தொடையில் உள்ள எண்களின் சாரசரியுடன் அவற்றின் மோட்டை ஒப்பிடுக.

விளையாட்டுப் போட்டியின் நிகழ்ச்சிகள் பற்றி நீங்கள் அறிந்திருப்பீர்கள். பாடசாலைகளுக்கான விளையாட்டுப் போட்டியிலே, 100 மீற்றர் ஓட்டம் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். இன்னொரு நிகழ்ச்சியை நீங்கள் குறிப்பிட முடியுமா ? மேலே தரப்பட்ட அளவீட்டுத் தொடையை நோக்குக. அதில 20 அளவீடுகள் உளவென அறிவீர்கள். இவை ஒவ்வொன்றையும் நிகழ்ச்சிகளாகக் கருதலாம். அவ்வளவீட்டுத் தொடையின் ஒரு நிகழ்ச்சியாக 50° ஐக் குறிப்பிடலாம். அதில் இன்னொரு நிகழ்ச்சியைக் குறிப்பிட உங்களால் முடியுமா ? ஒரு நிகழ்ச்சி எத்தனை முறை நடைபெறுகின்றதோ, அது அந்நிகழ்ச்சியின் **மீடிறன்** எனப்படும். முன் கூறிய அளவீட்டுத் தொடையிலே, 50° என்னும் நிகழ்ச்சியின் மீடிறன் 8; 51° என்னும் நிகழ்ச்சியின் மீடிறன் 5 ஆகும்.

நாம் எடுத்துக்கொண்ட அளவீட்டுத் தொடையிலே, பெரும்பான்மை நிகழ்ச்சிகள் (அளவீடுகள்) மீண்டும் மீண்டும் தோன்றுவதால், அந்த அளவீட்டுத் தொடையைச் சுருக்கமான ஒரு முறையிலே குறிப்பிடல் முடியும். அதற்கு, வெவ்வேறு அளவுகளை (அல்லது நிகழ்ச்சிகளை) முதலிலே நிரலாகக் கீழ்க் காட்டியவாறு எழுதுதல் வேண்டும். பின்பு ஒவ்வொரு அளவீட்டையும் வாசிக்கும்போது, ஒத்த அளவுக்கு எதிராக வரவு அடையாளம் போன்ற ஒரு வரையால் அடையாளமிடல் வேண்டும். முதல் அடையாளம் 50 இன் எதிரே இடப்படல் வேண்டும. மற்றையது, 51 இன் எதிரேயும், அடுத்தது 50 இன் எதிரேயும் அமையும். இப்படியே பிறவும், ஏற்ற இடத்திற் குறிக்கப்படும்.

48°	
49°	
50°	//
51°	/
52°	
53°	

ஒரு நிகழ்ச்சி, இத்தொடையில் நான்கு முறை தோன்றுமாயின், அதற்கு எதிரே நான்கு வரவடையாள வரைகள் இடப்படும். இன்னொரு நிகழ்ச்சி 5 முறை தோன்றுமாயின், ஐந்தாவது வரை, மற்றைய நான்கையும் ஊடறுக்கும் வகையில் (படலையின் குறுக்குச் சலாகை போன்று) ~~////~~ இவ்வண்ணம் அடையாளமிடப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சி 12 முறை தோன்றுமாயின், அது பின்வருமாறு அமையும் :— ~~////~~ ~~////~~ //

இவ்வண்ணம் அடையாளமிடுதல் "குறியிடல்" எனப்படும். வெவ்வேறு நிகழ்ச்சிகள் பலமுறை நிகழும்போது, இவ்வாறு குறியிடல் வசதியாக இருக்கும். முன் கூறிய அளவீடுகளுக்கான குறியிடல் அட்டவணை, அட்டவணை 10—1 இற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

அளவு	குறியிடல்	மீடிறன்
48°	//	2
49°	/	1
50°	~~////~~ ///	8
51°	~~////~~	5
52°	///	3
53°	/	1
	மொத்தம்	20

அட்டவணை 10–1

அட்டவணை 10—1 போன்ற அட்டவணை **மீடிறன் அட்டவணை** எனப் படும். பெருந்தொகையான அளவீடுகளைப் பதிவுசெய்தற்கு, மீடிறன் அட்டவணை வசதியான ஒரு முறையாகும். குறித்தவொரு அளவீட்டின எதிராகவுள்ள குறிகளின் எண்ணிக்கை, அதன் மீடிறனைக் குறிக்கும். உதாரணமாக, 48 இன் மீடிறன் 2 ஆகும்.

எட்டாம் வகுப்பொன்றிலே குறித்த ஒரு மாதத்தில், மாணவர் வரவு வருமாறு —

38, 40, 37, 40, 38, 36, 40, 40, 35, 38, 33, 36, 37, 38, 40, 40 39, 40, 38, 39, 38.

அட்டவணை 10—1 இற் காட்டியதுபோல, இதற்கு ஓர் மீடிறன் அட்டவணை அமைக்க. இவ்வெண் தொடையின் மோடு என்ன? அதன் மீடிறன் என்ன? இத்தொடையின் சராசரித் தினவரவைக் காண்க.

இனி எட்டாம் வகுப்பு மாணவர் தொடை ஒன்று, கணிதச் சோதனையிற் பெற்ற நூற்றுவீதப் புள்ளிகளை எடுத்துக்கொள்வோம். அவை வருமாறு :

40, 29, 44, 38, 60, 62, 68, 18, 12, 35, 24. 53, 36, 42, 70, 65, 62, 48, 52, 53, 04, 22, 26, 12, 05, 08, 16, 25, 34, 48, 64, 72, 67, 58, 46, 52, 24, 32, 55, 27, 15, 18, 36, 30, 10, 35, 10, 60, 42, 15, 08, 75, 84, 04, 18, 27, 35, 38, 47, 50, 80, 44, 25, 38, 44, 40, 00, 50, 43, 45, 28, 90, 08, 12, 42, 16, 62, 56, 36.

புள்ளி ஆயிடை	குறியிடல்	மீடிறன்
0–4		
5–9		
10–14	/	
15–19	/	
20–24		
25–29	/	
30–34		
35–39	//	
40–44	//	
45–49		
50–54		
55–59		
60–64	//	
65–69	/	
70–74		
75–79		
80–84		
85–89		
90–94		
	மொத்தம்	

அட்டவணை 10–2

அட்டவணை 10—1 இற் காட்டியதுபோன்று, மீடிறன் அட்டவணை யாக இந்தப் புள்ளிகளின் தொடையை அமைப்போமாயின், புள்ளிகள் 0 தொடக்கம் 90 வரை இருப்பதால், பல நிரல்கள் பெறுவோம். இந்நிலைகைய சூழ்நிலையில், புள்ளிகளைக் கூட்டமாக்கி, மீடிறன் அட்டவணை அமைத்தல் வழக்கம். பின்வருவது, ஒரு வகையான **கூட்டமாக்கல்** ஆகும்:—0–4, 5–9, 10–14, இப்படியே பிறவும். 30–34 என்ற கூட்டத்திலே, 30, 31, 32, 33, 34 ஆகியன அடங்கும். இதேபோல், ஒவ்வொரு கூட்டமும், 5 வேறு புள்ளிகளை உள்ளடக்கும். ஒரு கூட்டத்தின் அளவு, அதன் **கூட்ட ஆயிடை** அல்லது **வகுப்பு ஆயிடை** எனப்படும். எனவே, மேற்கூறிய கூட்ட மாக்கலிலே, வகுப்பு ஆயிடை 5 ஆகும். ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத் துக்கும் ஏற்றவாறு, வகுப்பு ஆயிடைகள் டீாறுபடும். பொதுவாக அகன்ற வீச்சுடைய வகுப்பு ஆயிடைகள் தெரிவு செய்யப்படுவதில்லை.

இப்பொழுது, முன்கூறிய புள்ளித் தொடைக்கு வகுப்பு ஆயிடை 5 ஆகக் கொண்டு மீடிறன் அட்டவணை (அட்டவணை 10–2) ஒன்று அமைப்போம். முதற் பத்துப் புள்ளிகளுக்கும் குறியிடல் செய்யப்பட் டுள்ளது. மிகுதியைப் பூரணப்படுத்துக.

பயிற்சி 10—1

1. ஒரு நாணயத்தை 50 முறைவரை எறிந்து, தலை, பூ ஆகிய வற்றைக் குறியிடல் செய்க.

2. ஒரு சிறு தகரப்பெட்டி எடுத்து, அதனுட் சிவப்பு மாபிள்கள் 2, நீல மாபிள்கள் 4, பச்சை 3, மஞ்சள் 1 இடுக. நன்கு குலுக்கிய பின், பார்க்காமல் அவற்றுள் ஒன்றை எடுக்க. அதை உள்ளே இட்டு, மீண்டும் ஒன்றை எடுக்க. அப்படியே 50 முறை ஒவ்வொன்று எடுக்க. பின்வருமாறு அச் சோதனையை அட்டவணைப்படுத்துக.

மாபிள்	குறியிடல்	மீடிறன்
சிவப்பு		
நீலம்		
பச்சை		
மஞ்சள்		
	மொத்தம்	50

அட்டவணை 10–3

3. ஒரு மேசையின் நீளத்தை அளக்குமாறு ஒரு மாணவர் குழு பணிக்கப்பட்டார். அங்குலத்தின் பத்திலொரு கூறுக்கு அண்ணளவாக அவர்கள் எடுத்த அளவீடுகள், பின்வருமாறு :—

4′ 4·0″ ; 4′ 3·8″ ; 4′ 4·0″ ; 4′ 3·9″ ; 4′ 4·0″ ;
4′ 4·2″ ; 4′ 3·7″ ; 4′ 4·0″ ; 4′ 4·0″ ; 4′ 4·1″ ;
4′ 3·7″ ; 4′ 4·0″ ; 4′ 4·0″ ; 4′4·1″.

(1) மேசையின் சராசரி நீள அளவைக் கணிக்க.

(2) இவ்வளவீட்டுத் தொடையின் மோட்டைக் காண்க.

(3) மோட்டின் மீடிறன் யாது ?

4. அட்டவணை 10—2 ஐப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வினுக்களுக்கு விடை தருக :—

(i) மிகக் கூடிய மீடிறன் உள்ள கூட்ட ஆயிடை எது ?

(ii) சித்திப் புள்ளி 40 ஆயின், சித்தி எய்தியோர் எண்ணிக்கை யாது ?

(iii) 50 முதல் (74 உட்பட) 74 வரையான புள்ளிகள் பெறுபவர்களுக்குத் திறமைச் சித்தியும், 75 முதல் அதற்குக் கூடிய புள்ளிகள் பெறுபவர்களுக்கு விசேட சித்தியும் வழங்கப்படின், (அ) திறமைச் சித்தி எய்தியோர் தொகை என்ன ? (ஆ) விசேட சித்தி எய்தியோர் தொகை என்ன?

(iv) 35 புள்ளிகள் பெற்றவர் எத்தனை பேர் ?

(v) 50 புள்ளிகள் பெற்றோர் எத்தனை பேர் ?

(vi) அட்டவணையை மட்டும் பயன்படுத்தி இவ்வினுவின் (iv) ஆம் (v) ஆம் பகுதிகளுக்கு விடையளிக்க முடியுமா ?

5. அட்டவணை 10—2 இலே உள்ள தரவுகளுக்குக் கூட்ட ஆயிடை 10 கொண்ட அதாவது, (0—9), (10—19) முதலியன கொண்ட, மீடிறன் அட்டவணை ஒன்று அமைக்க. அதன் உதவியுடன் வினு 4 இல் விடையளிக்கக்கூடிய எல்லாப் பகுதிகளுக்கும் விடை தருக.

6. 8 ஆம் வகுப்பொன்றிலே படித்த மாணவரின் வயது, உயரம், நிறை ஆகியன இங்கு தரப்படுகின்றன. அவை ஒவ்வொன்றுக்கும், கீழே தரப்பட்ட வகுப்பு ஆயிடை கொண்ட மீடிறன் அட்டவணை அமைக்க.

வகுப்பாயிடை

வயது : 12 வரு. 6 மா.—13 வரு. 5 மா. ; 13 வரு. 6 மா.— 14 வரு. 5 மா. முதலியன (ஒவ்வொரு ஆயிடையிலும் 2 அளவுகளும் உட்படும்)

உயரம் : 3 அங்குலம்—வகுப்பு ஆயிடை.

நிறை : 10 இருத்தல்—வகுப்பு ஆயிடை.

நிறை இரு.	உயரம் அடி.	உயரம் அங்.	வயது வரு.	வயது மா.
78	4	8	14	1
65	4	4	14	0
60	4	3	14	4
63	4	4	13	11
58	4	6	13	9
82	4	7	15	0
55	4	11	13	2
83	5	0	13	9
85	4	11	16	0
80	5	1	13	7
87	5	1	13	5
120	5	0	13	0
80	5	1	13	8
125	5	0	13	0
90	5	1	13	9
100	5	4	13	5
85	4	11	13	9
63	4	4	12	7
68	4	11	15	8
68	4	7	13	8
74	4	10	14	6
69	4	9	14	6
87	5	2	16	10
60	4	9	13	9
78	5	0	15	9
80	5	0	14	6
62	4	8	14	0
80	4	10	15	9
70	4	8	13	11
75	4	11	16	6
82	5	3	14	10
73	5	1	13	5
85	4	10	14	1
73	4	10	15	5
54	4	6	14	6
55	4	4	15	5
59	4	6	13	6
86	5	0	15	6
64	4	8	15	6
90	5	4	17	3
82	4	10	15	8
78	4	11	15	5
70	4	7	15	9
99	5	5	17	0
105	5	4	15	6
71	4	8	14	7
95	5	1	15	7
67	4	8	15	1
80	4	10	13	9
84	5	3	14	9

நிறை இரு.	உயரம் அடி.	உயரம் அங்.	வயது வரு.	வயது மா.
75	4	10	14	4
75	5	1	14	11
66	4	11	14	10
75	5	2	17	5
80	5	2	14	5
82	4	6	14	6
57	4	6	13	10
76	4	9	14	5
103	5	3	17	7
72	4	7	14	6
62	4	5	12	7
67	4	9	14	4
76	5	0	14	4
67	4	8	14	3
83	5	0	15	1
72	4	7	14	10
75	4	9	14	6
105	5	4	15	2
70	4	7	14	8
78	4	10	13	11
53	4	4	13	1
87	4	11	14	0
61	4	9	15	0
85	5	0	14	6
99	5	6	16	4
78	5	3	18	8
69	4	9	16	4
92	5	3	13	3
76	4	11	13	2
82	4	11	14	0
73	4	10	14	0
75	4	11	13	9
73	4	8	13	3
65	4	7	13	0
50	4	3	12	10
50	4	2	13	2
90	5	0	12	8
83	5	3	16	0
78	4	9	13	2
64	4	7	13	9
82	4	10	13	3
85	4	10	14	7
80	4	10	12	8
85	4	11	13	7
66	4	10	13	0
68	4	9	12	7
79	4	11	14	2
83	4	11	12	9
70	4	11	14	3
76	4	10	15	5

மேலே தந்துள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் வினுக்களுக்கு விடை தருக :—

(i) மிகக் கூடிய மீடிறன் உள்ள வயது ஆயிடையைக் காண்க.

(ii) வயது அதி உயர்ந்த கூட்டத்தில் எத்தனை மாணவர் உள்ளனர் ?

(iii) வயது அதி குறைந்த கூட்டத்தில் எத்தனை மாணவர் உள்ளனர் ?

(iv) மிகக் கூடிய மீடிறனுள்ள நிறை ஆயிடை எது ?

(v) நிறை மிகக் கூடிய கூட்டத்தில் எத்தனை மாணவர் உள்ளனர் ?

(vi) உயரம் மிகக் கூடிய கூட்டத்தில் எத்தனை மாணவர் உள்ளனர் ?

(vii) வகுப்பின் மாணவருள் அதிகமானேர் உள்ள உயர ஆயிடை எது ?

(viii) 5 அடி உயரமுள்ள மாணவர் எத்தனை பேர் ?

(ix) 100 இரு. நிறையுடைய மாணவர் எத்தனை பேர் ?

(x) வினு 6 உக்கு அமைத்த அட்டவணையை மட்டும் பயன்படுத்தி இவ்வினுவின் (viii), (ix) ஆம் பகுதிகளுக்கு விடையளிக்க உங்களால் முடியுமா ?

(xi) 5 அடியினும் கூடிய உயரமுள்ளவர்கள் எத்தனை பேர் ?

(xii) 100 இருத்தலினுங் கூடிய நிறையுடையவர்கள் எத்தனை பேர் ?

8. ஒரு தொடை மாணவர் பெற்ற புள்ளித் தொடையின் மீடிறன் அட்டவணை 170 ஆம் பக்கத்திலே தரப்பட்டுள்ளது. அதனைப் பயன்படுத்திக் கீழே உள்ள வினுக்களுக்கு விடை தருக :—

(i) 10 இனுங் குறைந்த புள்ளிகள் பெற்ற மாணவர் எத்தனை பேர் ?

(ii) 30 இனுங் குறைந்த புள்ளிகள் பெற்ற மாணவர் எத்தனை பேர் ?

(iii) 50 இனுங் கூடிய புள்ளிகள் பெற்ற மாணவர் எத்தனை பேர் ?

(iv) சித்திப் புள்ளி 40 எனின், சித்தியடைந்தோர் எத்தனை பேர் ?

(v) சித்தியடைந்தோர் நூற்றுவீதம் யாது ?

(vi) மிகக்கூடிய மீடிறனுள்ள புள்ளி ஆயிடை என்ன ?

புள்ளி ஆயிடை	குறியிடல்	மீடிறன்
0—9	||||	4
10—19	~~||||~~ |||	8
20—29	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ |	16
30—39	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	22
40—49	~~||||~~ ~~||||~~ |||	13
50—59	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
60—69	~~||||~~ ||	7
70—79	|||	3
80—89	|	1
	மொத்தம்	85

(vii) மேலுள்ள புள்ளித் தொடையின் மோடு என்னவென்று கூற உங்களால் முடியுமா ?

(viii) எந்தப் புள்ளி வீச்சில் மோடு உள்ளது எனக்கூற முடியுமா ?

(ix) சரியாக 40 புள்ளிகள் பெற்றவர் எத்தனை பேர் எனக் கூற முடியுமா ?

(x) பெற்ற புள்ளிகளுள் அதி கூடியது யாது எனக் கூற முடியுமா ?

இதுவரை செய்த பயிற்சி, செயல்கள் ஆகியவற்றின் மூலம், தரவுகளைச் சுருக்கமாகக் காட்டுதற்கு மீடிறன் அட்டவணைகள் மிக வசதியாக இருக்கும் என விளங்கிக் கொண்டிருப்பீர்கள். அதே வேளையில் மீடிறன் அட்டவணை அமைக்கும்போது சில தரவுகள் மறைந்துவிடுவதையும் அவதானித்திருப்பீர்கள். எனினும், இதில் மறையுந் தரவுகள், நாம் மேற்கொள்ளும் ஆராய்ச்சிகளுக்குத் தேவை யற்றவையாகும். உங்கள் பாடசாலையிலே 8 ஆம் வகுப்பிற் பின்வருஞ் செயல்களை மேற்கொண்டு, மீடிறன் அட்டவணைகள் அமைத்துப் பாருங்கள் :—

(i) மிகப் பிடித்த பாடம் (ii) மிக விருப்பமான நிறம்

(iii) மிகப் பிடித்தமான பின்னணிப் பாடகர்.

(iv) பாடசாலைக்குப் பிரயாணஞ் செய்யும் முறை (நடத்தல், சைக்கிள் வண்டி, பஸ், புகையிரதம், மோட்டார் வண்டி முதலியன).

விடைகள்

அதிகாரம் 1

பயிற்சி 1—2

1. (i) $507_{\text{எட்டு}}$ (ii) $255_{\text{எட்டு}}$ (iii) $11542_{\text{எட்டு}}$
   (iv) $12470_{\text{எட்டு}}$

2. (i) $28_{\text{பத்து}}$ (ii) $86_{\text{பத்து}}$ (iii) $157_{\text{பத்து}}$
   (iv) $1255_{\text{பத்து}}$

3. 0, 1, 2, 3, 4.

பயிற்சி 1—3

1. (i) $1100_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $11010_{\text{இரண்டு}}$ (iii) $1000000_{\text{இரண்டு}}$
   (iv) $11000110_{\text{இரண்டு}}$

2. (i) $1101_{\text{இரண்டு}}$ (ii) $100011_{\text{இரண்டு}}$ (iii) $10101_{\text{இரண்டு}}$
   (iv) $10101_{\text{இரண்டு}}$

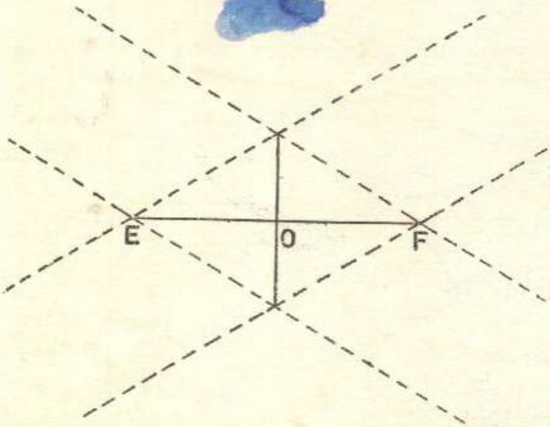
அதிகாரம் 2

பயிற்சி 2—1

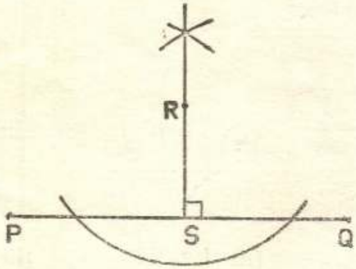
1. (i) சமாந்தரம் (ii) எதிர் (iii) இருசமகூறிடும்
   (iv) மூலைவிட்டம் (v) சாய்செவ்வகம் (vi) சாய்சதுரம்
   (vii) அடுத்துள்ள (viii) செங்கோண இணைகரம்
   (ix) செங்குத்தாக இருசமகூறு (x) இருசமகூறு

பயிற்சி 2—3

8.



10.



அதிகாரம் 3

பயிற்சி 3—2

1.	(i) $10^{0.4362}$	(iii) $10^{0.8376}$	
2.	(i) $2 \cdot 90 \times 10^{2}$	(iii) $6 \cdot 01 \times 10^{2}$	(iv) $4 \cdot 00 \times 10^{-1}$
3.	(i) $10^{1.4771}$	(iii) $10^{0.6990} \times 10^{-1}$	

பயிற்சி 3—3

1.	(i) 3·67	(iii) 79·1	(iv) 3·16
2.	(i) $x = 42 \cdot 2$	(iii) $x = 3 \cdot 92$	(v) $M = 32$

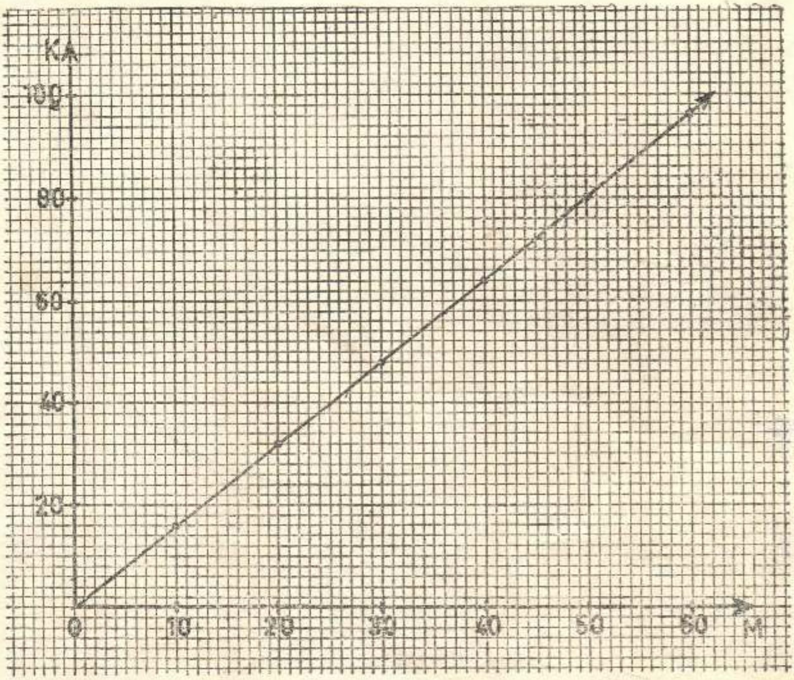
பயிற்சி 3—4

1. 18·7	3. 1·92	5. 0·798
7. 3·41	9. 2·95	

அதிகாரம் 4

பயிற்சி 4—1

5



பயிற்சி 4—2

3. 7·5 மைல்

5. (i) 3·5 சமீ. (ii) 10·85 அங். (iii) $12\frac{8}{11}$ அங்.

7. 240

பயிற்சி 4—3

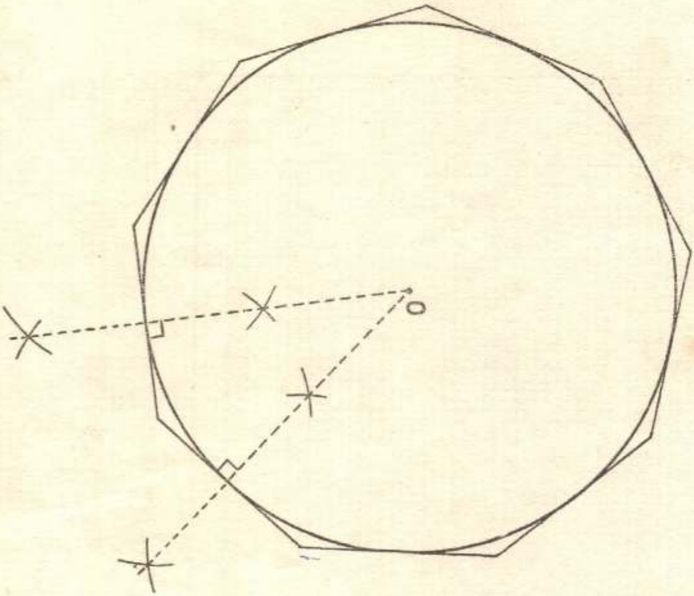
3. (i) (2, 4) (iii) (2, 4)

(v) {(1, 2) ; (2, 4) ; (3, 6) ; (4, 8) ; (0, 6) ; (1, 5) ; (3, 3) ; (4, 2) ; (5, 1)}

(vii) {(2, 4)}

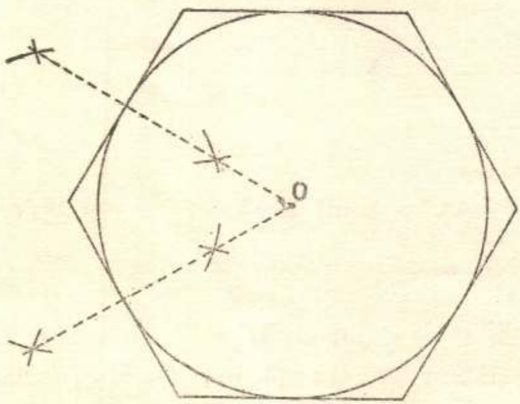
பயிற்சி 5—2

5.



பயிற்சி 5—3

6. (i)



(ii) 0·36 சது. அங்.

பயிற்சி 5—4

1. 19·36 சது. அடி. 3. (i) 14 அடி (ii) 396 சது. அடி.

அதிகாரம் 6

பயிற்சி 6—1

1. (அ) 17 அங். (இ) 39 சமீ.

3. 13 அங்.

5. 12 அடி. 9. (i) $4CO^2$ (ii) $4\ DO^2$

(iii)

கூற்று	காரணம்
$\triangle$ DOC இல்	
1. $D\hat{O}C = 90°$	1. சாய்சதுரத்தின் மூலை விட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக இரு சமகூறிடும்
2. $OD^2 + OC^2 = DC^2$	2. பைதகரசின் தேற்றம்
3. $4OD^2 + OC^2 = 4DC^2$	3. சமத்துவ இயல்பு
4. $4OD^2 + 4OC^2 = AC^2 + BD^2$	4. இவ்வினாவின் (i), (ii) ஆம் பகுதிகளுக்குரிய விடைகளிலிருந்து
5. $DC = AB$	5. சாய்சதுரத்தின் எதிர்ப்பக்கங்கள்
6. $AC^2 + BD^2 = 4AB^2$	6. மேற்படி (3), (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து

அதிகாரம் 7

பயிற்சி 7—2

1. (i) $PQ = 6{\cdot}43$ சமீ. (ii) $MK = 2{\cdot}77$ அங்.
$QR = 7{\cdot}66$ சமீ. $KL = 3{\cdot}55$ அங்.
(iii) $XY = YZ = 2{\cdot}83$ அங்.

2. (i) 9·06 அங். (ii) 4·25 அங். (iii) 17 சது. அங்.

3. $PQ = 4{\cdot}5$ சமீ., $QR = 2{\cdot}6$ சமீ.

4. 2·83 அங்.

5. 7·66 சமீ.

6. 18·12 அடி

7. 118·2 யார்

8. 15052·5 சது. யார்

9. (i) 60° (ii) 30° (iii) 2·5 சமீ.
(iv) 5 சமீ. (v) 30 சமீ.

10. 66·57 அடி

பயிற்சி 7—3

8. 15·89 மைல்

9. 27·4 அடி

10. 28·18 சமீ.

பயிற்சி 7—4

1. 51·20 அடி

2. 28·60 அடி

3. 125·54 அடி

4. 65·0 சது. சமீ.

5. 57·89 யார்

அதிகாரம் 8

பயிற்சி 8—4

2. பெருக்கலுக்குட்பட மட்டும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.
3. பெருக்கல், கூட்டல் ஆகியவற்றுக்குட்பட மட்டும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.
4. பெருக்கலுக்குட்பட மட்டும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.
5. பெருக்கலுக்குட்பட மட்டும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.
6. பெருக்கலுக்குட்பட மட்டும் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

பயிற்சி 8—5

1. $\{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\ldots\ldots\}$

6. $4_{\text{பத்து}} = 100_{\text{இரண்டு}}$, $8_{\text{பத்து}} = 1000_{\text{இரண்டு}}$

7. (i) $a\,(2b+c-3d)$

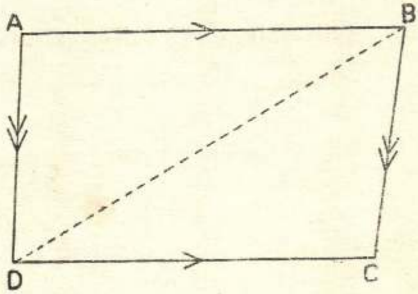
(iii) $7abc\,(a-b+c)$

(v) $(x+y)\,(p+q)$

(vii) $2\pi r\,(r+h)$

பயிற்சி 9—2

1.



கூற்று	காரணம்
$\triangle ABD$, $\triangle CDB$ களில்	
1. $A\hat{B}D = C\hat{D}B$	1. ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (எ$_2$)
2. $A\hat{D}B = C\hat{B}D$	2. ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள் (எ$_2$)
3. $BD = BD$	3. பொதுப்பக்கம்
4. $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$	4. ஒருங்கிசையலின் கோ. ப. கோ. விதி
5. $AB = DC$, $AD = BC$	5. ஒருங்கிசை முக்கோணிகளின் ஒத்த பக்கங்கள்

3.

கூற்று	காரணம்
1. $A\hat{C}E = C\hat{A}B$	1. ஒன்றுவிட்ட கோணங்கள்
2. $E\hat{C}D = A\hat{B}C$	2. ஒத்த கோணங்கள் (தே$_3$)
3. $A\hat{C}E + E\hat{C}D = C\hat{A}B + A\hat{B}C$	3. சமத்துவ இயல்பு
4. $A\hat{C}E + E\hat{C}D = A\hat{C}D$	4. உருவிலிருந்து
5. $A\hat{C}D = C\hat{A}B + A\hat{B}C$	5. மேற்படி (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து

பயிற்சி 9—3

2. (i), (v) ; (ii) (iv) ; (iii), (ix) ; (vi), (viii) ; (vii), (xiv) ; (x), (xii) ; (xi), (xiii).

3. (vi), (viii) ; (vii), (xiv) ; (x), (xii) ; (xi), (xiii).

அதிகாரம் 10

பயிற்சி 10—1

3. (i) 4 அடி 4·0 அங். (ii) 4 அடி 4·0 அங். (iii) 5

8 (i) 4 (ii) 28 (iii) 22

(iv) 35 (v) 38·9% (vi) 30–39

(vii) கூறமுடியாது (viii) கூறமுடியாது

(ix) கூறமுடியாது (x) கூறமுடியாது

பின்னிணைப்பு 1

கணிதக் குறியீடுகளை வாசிக்கும் முறை

1 $467_{\text{எட்டு}}$—நாலு ஆறு எழு அடி எட்டு.

2. $1101_{\text{இரண்டு}}$—ஒன்று ஒன்று பூச்சியம் ஒன்று அடி இரண்டு

3. மட$_e$ a—மட a அடி e இற்கு

4. மட$_5$ 248—மட 248 அடி 5 இற்கு

5. மட$_{10}$ 1000 = 3—மட 1000 அடி 10 இற்குச் சமன் 3

6. $\pi \simeq 3{\cdot}14$—பை அண் சமன் 3·14

பின்னிணைப்பு 2

கலைச் சொற்கள்

அடிப்படை எண்குறிகள்	..	Basic Numerals
அடைத்த இயல்பு	..	Closure Property
அலிடேற்று	..	Alidade
இடப்பெறுமானம்	..	Place value
ஈரிலக்க எண்கள்	..	Two-digit numbers
உய்த்தறி நியாயம்	..	Deductive Reasoning
உருளை ..	..	Cylinder
செவ்வட்ட உருளை	..	Right circular cylinder
ஏகபரிமாணச் சமன்பாடு	..	Linear Equations
எடுகோள்	..	Assumption
எண்கள் ..	..	Numbers
கலப்பெண்கள்	..	Mixed Numbers
விகித முறுமெண்கள்	..	Rational Numbers
எண்சட்டம்	..	Abacus
ஒருங்கமை சமன்பாடு	..	Simultaneous Equations

ஒருமை ..	.. Constant
ஓரிலக்க எண்கள்	.. Single Digit numbers
கருதுகோள்	.. Hypothesis
குத்துயரம்	.. Altitude
குறியிடல்	.. Tally
குறுக்குத்தண்டு	.. Cross staff
கூட்ட ஆயிடை	.. Group Interval
கூட்டமாக்கல்	.. Grouping
கோசைன்	.. Cosine
அட்டவணை	.. Cosine table
சைன் ..	.. Sine
அட்டவணை	.. Sine Table
தசம எண்குறியீட்டு முறை	.. Decimal Numeration System
தளமேசை	.. Plane Table
தான்சன் ..	.. Tangent
அட்டவணை	.. Tangent table
திரிகோணகணித அட்டவணை ..	Trigonometric Table
திரிகோணகணித விகிதங்கள் ..	Trigonometrical Ratios
துவித எண்கள்	.. Binary Numbers
துவித முறை	.. Binary system
தேற்றம் ..	.. Theorem
தொகுப்பு இயல்பு	.. Associative property
தொடரி ..	.. Sequence
தொடை A கூட்டற் செய்கைக்குட்பட அமைக்கப்பட்டது ..	.. Set A is closed under the operation of addition
நிகர்மாற்று	.. Reciprocal
நிகழ்ச்சி ..	.. Event
நியம வடிவம்	.. Standard Form
நிரப்புக் கூட்டல்	.. Complementary Addition
நிறுவல் ..	.. Proof

நேரடி விகிதசமம்	Direct Proportion
படித்திறன்	Gradient
பரிதி	Circumference
பைதகரசின் தேற்றம்	Pythogoras' Theorem
மடக்கை	Logarithms
அட்டவணை	Logarithmic Table
பொது மடக்கை	Common Logarithms
முரண் மடக்கை	Antilogarithms
மாறுநிலை	Converse
மின்சூள்கலம்	Torchlight Battery
மீடிறன்	Frequency
அட்டவணை	Frequency Table
முடிபு	Conclusion
மோடு	Mode
யூக்கிளிட்டின் மூலகங்கள்	Elements of Euclid
வகுப்பு ஆயிடை	Class Interval
வரிசை இயல்பு	Order Property
விகிதசம ஒருமை	Constant of Proportionality
வெளிப்படையுண்மை	Axiom
b ஆற் செப்பமாக *a* வகுபடும்	*a* is exactly divisible by *b*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

மடக்கை அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

பின்னிணைப்பு 4

கோணத்தின் அளவு பாகையில்	சைன்	கோசைன்	தான்சன்
0	0·000	1·000	0·000
1	0·017	1·000	0·017
2	0·035	0·999	0·035
3	0·052	0·999	0·052
4	0·070	0·998	0·070
5	0·087	0·996	0·087
6	0·105	0·995	0·105
7	0·122	0·993	0·123
8	0·139	0·990	0·141
9	0·156	0·988	0·158
10	0·174	0· 85	0·176
11	0·191	0·982	0·194
12	0·208	0·978	0·213
13	0·225	0·974	0·231
14	0·242	0·970	0·249
15	0·259	0·966	0·268
16	0·276	0·961	0·287
17	0·292	0·956	0·306
18	0·309	0·951	0·325
19	0·326	0·946	0·344
20	0·342	0·940	0·364
21	0·358	0·934	0·384
22	0·375	0·927	0·404
23	0·391	0·921	0·424
24	0·406	0·914	0·445
25	0·423	0·906	0·466
26	0·438	0·899	0·488
27	0·454	0·891	0·510
28	0·469	0·883	0·532
29	0·485	0·875	0·554
30	0·500	0·866	0·577
31	0·515	0·857	0·601
32	0·530	0·848	0·625
33	0·545	0·839	0·649
34	0·559	0·829	0·675
35	0·574	0·819	0·700
36	0·588	0·809	0·727
37	0·602	0·799	0·754
38	0·616	0·788	0·781
39	0·629	0·777	0·810
40	0·643	0·766	0·839
41	0· 56	0·755	0·869
42	0·669	0·743	0·900
43	0·682	0·731	0·933
44	0·695	0·719	0·966

திரிகோண கணித அட்டவணைகள்

கோணத்தின் அளவு பாகையில்	சைன்	கோசைன்	தான்சன்
45	0·707	0·707	1·00
46	0·719	0·695	1·04
47	0·731	0·682	1·07
48	0·743	0·669	1·11
49	0·755	0·656	1·15
50	0·766	0·643	1·19
51	0·777	0·629	1·23
52	0·788	0·616	1·28
53	0·799	0·602	1·33
54	0·809	0·588	1·38
55	0·819	0·574	1·43
56	0·829	0·559	1·48
57	0·839	0·545	1·54
58	0·848	0·530	1·60
59	0·857	0·515	1·66
60	0·866	0·500	1·73
61	0·875	0·485	1·80
62	0·883	0·469	1·88
63	0·891	0·454	1·96
64	0·899	0·438	2·05
65	0·906	0·423	2·14
66	0·914	0·407	2·25
67	0·921	0·391	2·36
68	0·927	0·375	2·48
69	0·9[illegible]4	0·358	2·61
70	0·940	0·342	2·75
71	0·946	0·326	2·90
72	0·951	0·309	3·08
73	0·956	0·292	3·[illegible]7
74	0·961	0·276	3·49
75	0·966	0·259	3·73
76	0·970	0·242	4·01
77	0·974	0·225	4·33
78	0·978	0·208	4·70
79	0·982	0·191	5·14
80	0·985	0·174	5·67
81	0·988	0·156	6·31
82	0·990	0·139	7·12
83	0·993	0·122	8·14
84	0 995	0·105	9·51
85	0·996	0·087	11·4
86	0·998	0·070	14·3
87	0·999	0·052	19·1
88	0·999	0·035	28·6
89	1·000	0·017	57·3
90	1·000	0·000	—

சுட்டி